

**dr inż. Andrzej Cińcio**

Katedra Mechaniki i Mostów, Politechniki Śląskiej

[andrzej.cincio@polsl.pl](mailto:andrzej.cincio@polsl.pl)

ORCID: 0000-0002-7937-3859

## **Metodyczny przykład rozwiązania statycznie wyznaczalnego ustroju prętowego wraz z obliczeniem przemieszczenia metodą prac wirtualnych**

### **Materiały pomocnicze dla studentów Wydziału Budownictwa**

#### **1. Wprowadzenie**

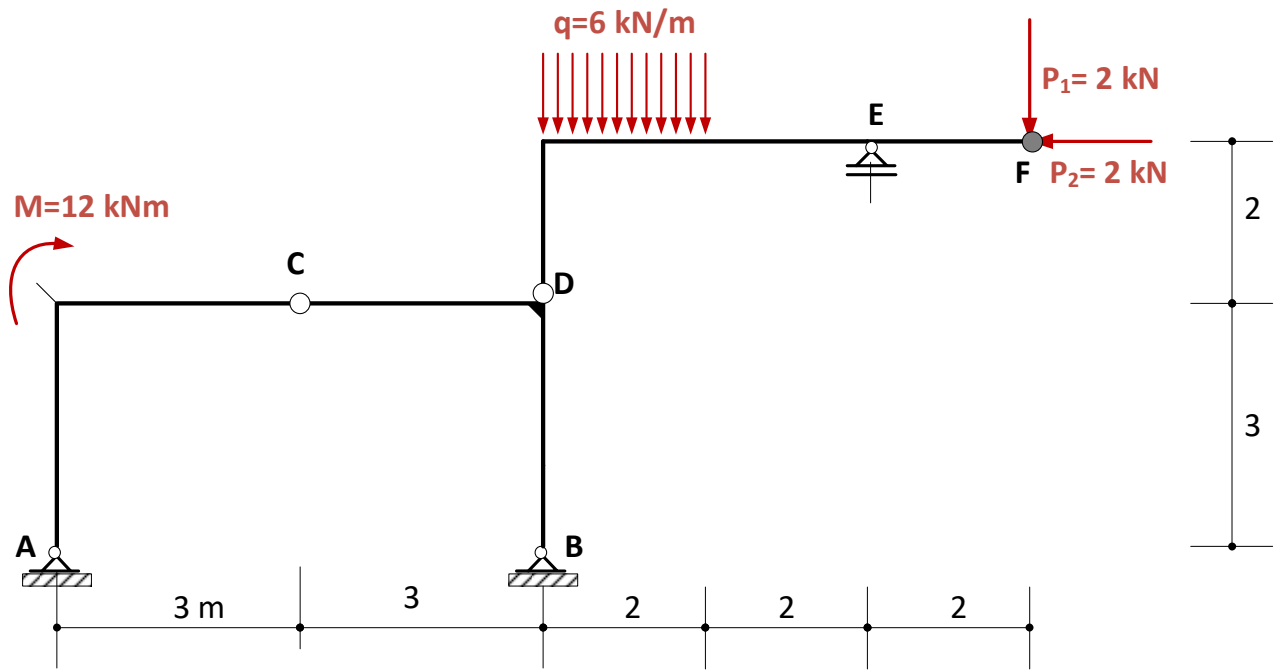
Poprawne rozwiązywanie ustrojów statycznie wyznaczalnych jest podstawową umiejętnością, jaką powinien posiadać student wydziału budownictwa. Rozwiązywanie tego typu ustrojów przedstawiane jest także na kursie mechaniki teoretycznej i wytrzymałości materiałów, w ramach niższych semestrów toku studiów. Jednak prezentowany w ramach wymienionych przedmiotów, sposób rozwiązywania ustrojów prętowych jest sposobem elementarnym, wymagającym m.in. zapisu funkcji sił przekrojowych przed narysowaniem ich wykresów. W ramach kursu mechaniki budowli wymagana jest biegłość rozwiązywania ustrojów statycznie wyznaczalnych, niezbędna z kolei m.in. do rozwiązywania ustrojów statycznie niewyznaczalnych. Dlatego w niniejszym artykule przedstawiono sposób rozwiązywania ustrojów złożonych, za pomocą rozkładu na ustroje proste, dla których wyznaczenie rozwiązania nie jest skomplikowane. Również w prosty sposób można wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych (przekrojowych), bez konieczności układania funkcji matematycznych w kolejnych przedziałach obciążenia. W artykule przedstawia się także inżynierski sposób wyznaczania przemieszczeń za pomocą zasady prac wirtualnych, stosując tzw. mnożenie wykresów sił wewnętrznych sposobem Wereszczagina, pozwalające na wyznaczenie wartości całek Maxwella-Mohra. Zamieszcza się także rozwiązania prezentowanych przykładów wyznaczone za pomocą programu komputerowego *Autodesk Robot Structural Analysis*.

Artykuł ten może być pomocą w wykonaniu ćwiczenia projektowego w ramach zajęć z mechaniki budowli na sem. 3 studiów inżynierskich.

#### **2. Przykład obliczeniowy wyznaczania rozwiązania ustroju złożonego**

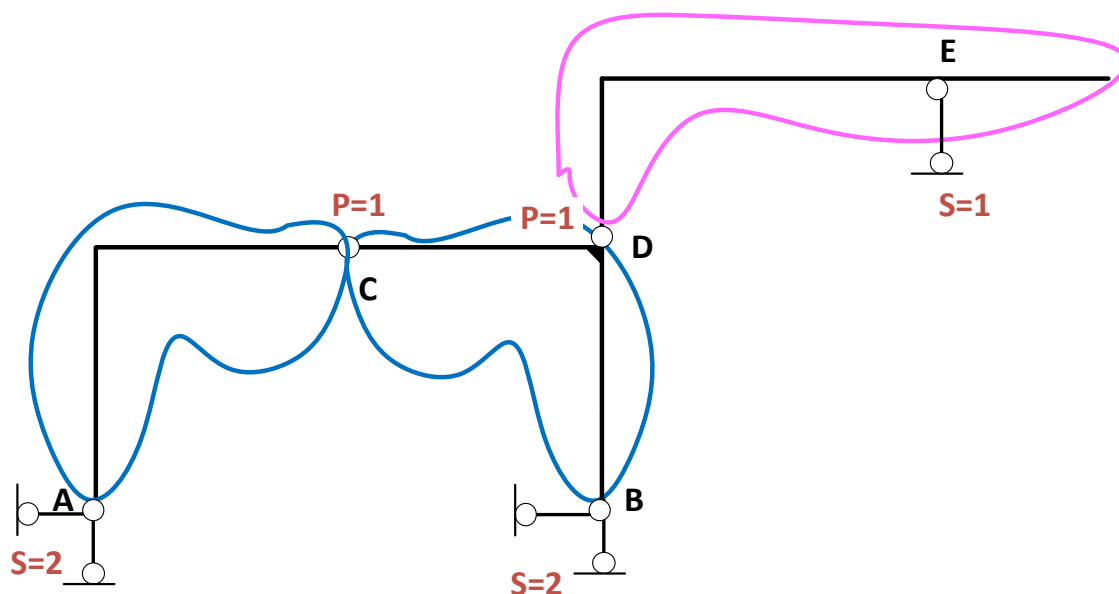
Dla podanego ustroju (rys.1) należy:

1. Przeprowadzić analizę kinematyczną geometrycznej niezmienności ustroju (zbadać warunek konieczny oraz warunek dodatkowy w oparciu o podstawowe twierdzenia kinematyczne).
2. Wyznaczyć wszystkie reakcje sposobem analitycznym
3. Wyznaczyć wykres sił przekrojowych sposobem analitycznym
4. Wyznaczyć pionowe przemieszczenie końca wspornika (węzeł F) na podstawie zasady prac wirtualnych i wzoru całkowego Maxwella-Mohra



Rys.1. Temat zadania

## Ad1. Analiza kinematyczna geometrycznej niezmienności ustroju.



Rys.2. Schemat budowy kinematycznej ustroju

### 1.1 Warunek konieczny (niewystarczający) na GN:

Ustrój zbudowany jest z **trzech tarcz kinematycznych**  $E=3$ , połączonych **dwoma pojedynczymi przegubami obrotowymi** (przegubami kołowymi) oraz podparty **pięcioma więzami podporowymi**  $S=5$ .

$$W = 3E - 2P - S = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0 \quad (0)$$

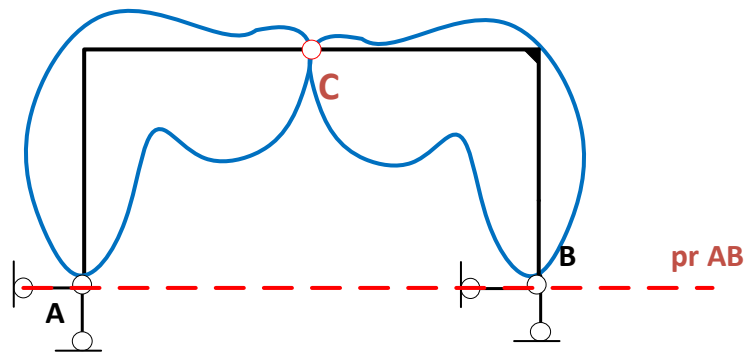
Warunek konieczny został spełniony, jednak nie jest on wystarczający dla stwierdzenia, że ustrój jest GN. Ustrój co prawda posiada dostateczną liczbę więzów kinematycznych, niezbędną do odebrania wszystkich stopni swobody ( $W=0$ ), jednak więzy te muszą być prawidłowo rozmieszczone, aby zapewnić GN. Wymaga to zbadania warunku dodatkowego na GN np. w oparciu o podstawowe twierdzenia kinematyki.

### 1.2 Budowa ustroju

Ustrój w zadaniu jest ustrojem złożonym. Składa się z części podstawowej w postaci trójprzegubu ABC (tarcze w kolorze niebieskim) oraz części podrzędnej będącej załamaną belką (tarcza w kolorze fioletowym).

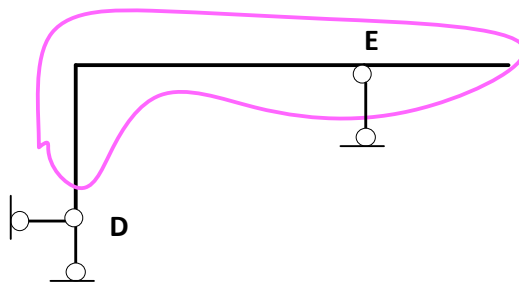
### 1.3 Warunek dodatkowy na GN - badanie prawidłowości budowy ustroju na podstawie podstawowych twierdzeń kinematyki.

- Badanie ustroju rozpoczynamy od wyodrębnienia części podstawowej, która jest trójprzegubem prawidłowym (przegub C nie leży na prostej przechodzącej przez wezłowania trójprzegubu A i B). Zatem w myśl odpowiedniego twierdzenia kinematyki część podstawowa ustroju jest GN



Rys. 3. Badanie prawidłowości trójprzegubu

- W drugiej kolejności badamy część drugorzędną ustroju opartą na części podstawowej, która jest GN (co udowodniliśmy powyżej). Część drugorzędna jest podparta trzema więzami o kierunkach nierównoległych wzajemnie i nie przecinających się w jednym punkcie. Zatem w myśl odpowiedniego twierdzenia kinematyki, ta część jest także GN.



Rys. 4. Schemat kinematyczny części drugorzędnej

- Jeżeli zarówno część podstawowa jak i część drugorzędna jest GN to ustrój jako całość jest także GN

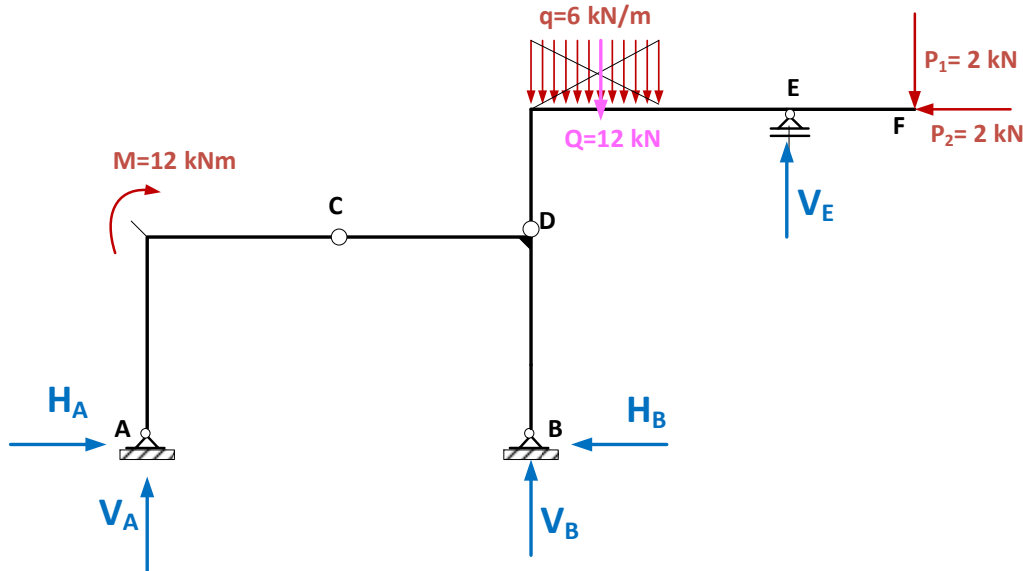
Wniosek: ustrój jest GN. C.b.d.o.

## Ad.2.1 Wyznaczenie reakcji dwoma sposobami

Reakcje wyznaczać się będzie sposobem elementarnym, stosując ogólne i dodatkowe warunki równowagi oraz prostszym sposobem poprzez rozdzielenie ustroju złożonego na ustroje proste. Ten drugi sposób jest polecany.

### 2.1. Wyznaczenie reakcji w sposób elementarny, dla ustroju rozpatrywanego w całości (bez rozdzielania na ustroje proste)

Przyjmujemy zwroty reakcji jak na rysunku 5.



Rys. 5 Przyjęte zwroty reakcji

Obciążenie rozłożone zastępujemy wypadkowa w środku ciężkości tego obciążenia. Mamy do wyznaczenia pięć składowych reakcji. Dysponujemy trzema ogólnymi warunkami równowagi oraz dwoma warunkami dodatkowymi w oparciu o przegub obrotowy: C i D. Staramy się sformułować tak równania równowagi, aby obliczenia reakcji były jak najprostsze.

Ogólne warunki równowagi i niewiadome w nich występujące:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad (H_A, H_B) \quad (1)$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad (V_A, V_B, V_E) \quad (2)$$

$$\sum_i M_{iB} = 0 \quad (V_A, V_E) \quad (3)$$

Dodatkowe warunki równowagi i niewiadome w nich występujące:

$$\sum_i M_{iC}^{CA} = 0 \quad (H_A, V_A) \quad (4)$$

$$\sum_i M_{iD}^{DF} = 0 \quad (V_E) \quad (5)$$

Rozpoczynamy rozwiązanie układu równań od równania (5) z jedną niewiadomą.

$$\begin{aligned}\sum_i M_{iD}^{DF} = 0 & \quad Q \cdot 1 + V_E \cdot 4 + P_1 \cdot 6 - P_2 \cdot 2 = 0 \\ & \quad 12 \cdot 1 + V_E \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 0 \\ & \quad 4V_E = 20 \\ & \quad V_E = 5 \text{ kN}\end{aligned}\tag{6}$$

Następnie wykorzystujemy równania (3) zawierającą (po wyznaczeniu  $V_E$ ) tylko jedną niewiadomą. Jest to równanie ogólne sumy momentów statycznych, dlatego musimy uwzględnić całość ustroju (wszystkie obciążenia i reakcje, niektóre z nich dają moment statyczny równy zero względem punktu B i nie są w równaniu uwzględnione:

$$\begin{aligned}\sum_i M_{iB} = 0 & \quad V_A \cdot 6 + M + Q \cdot 1 - V_E \cdot 4 + P_1 \cdot 6 - P_2 \cdot 5 = 0 \\ & \quad V_A \cdot 6 + 12 + 12 \cdot 1 - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 0 \\ & \quad 6V_A = -6 \\ & \quad V_A = -1 \text{ kN}\end{aligned}\tag{7}$$

Znak ujemny oznacza, że zwrot reakcji jest przeciwny do założonego. Zwrot ten zmienimy jednak na samym końcu.

W następnej kolejności wyznaczmy reakcję  $H_A$  z dodatkowego równania równowagi (4):

$$\begin{aligned}\sum_i M_{iC}^{CA} = 0 & \quad -H_A \cdot 3 + V_A \cdot 3 + M = 0 \\ & \quad -H_A \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 12 = 0 \\ & \quad -3H_A = -9 \\ & \quad H_A = 3 \text{ kN}\end{aligned}\tag{8}$$

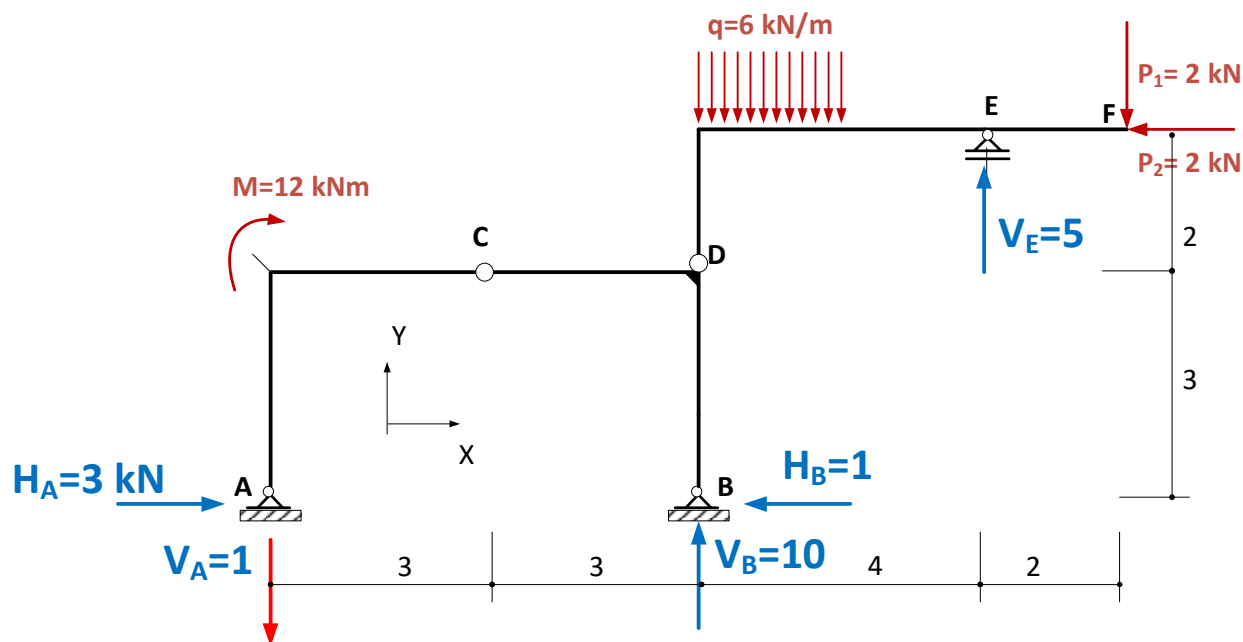
W następnej kolejności z równania (11) określimy wartość drugiej poziomej reakcji w węzłowie B trójkątnego przegubu:

$$\begin{aligned}\sum_i P_{ix} = 0 & \quad H_A - H_B - P_2 = 0 \\ & \quad 3 - H_B - 2 = 0 \\ & \quad H_B = 1 \text{ kN}\end{aligned}\tag{9}$$

Pozostaje jeszcze do wykorzystania równanie (2) w celu wyznaczenia pionowej reakcji  $V_B$ :

$$\begin{aligned}\sum_i M_{iB} = 0 & \quad V_A + V_B - Q + V_E - P_1 = 0 \\ & \quad (-1) + V_B - 12 + 5 - 2 = 0 \\ & \quad V_B = 10 \text{ kN}\end{aligned}\tag{9a}$$

Wyznaczone reakcje są pokazane na rys. 6 (zmieniono zwrot reakcji  $V_A$  na przeciwny, zmieniając jednocześnie jej wartość z ujemnej na dodatnią )



Rys. 6. Wyznaczone reakcje w sposób elementarny

Po wyznaczeniu reakcji należy skontrolować ich poprawność sprawdzając ponownie warunki równowagi. Warunek sumy momentów statycznych zaleca się sformułować względem innego punktu aniżeli punkt użyty przy wyznaczaniu reakcji.

Ogólne warunki równowagi – kontrola:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad -3 - 1 - 2 = 0 \quad (10)$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad -1 + 10 - 12 + 5 - 2 = 0 \quad (11)$$

$$\sum_i M_{iA} = 0 \quad 12 - 10 \cdot 6 + 12 \cdot 7 - 5 \cdot 10 + 2 \cdot 12 - 2 \cdot 5 = 0 \quad (12)$$

Dodatkowe warunki równowagi – kontrola:

$$\sum_i M_{iC}^{CBDEF} = 0 \quad -10 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 12 \cdot 4 - 5 \cdot 7 + 2 \cdot 9 - 2 \cdot 2 = 0 \quad (13)$$

$$\sum_i M_{iD}^{ABC} = 0 \quad -3 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 12 + 1 \cdot 3 = 0 \quad (14)$$

Warunki równowagi są spełnione, co potwierdza poprawność wyznaczenia ich wartości.

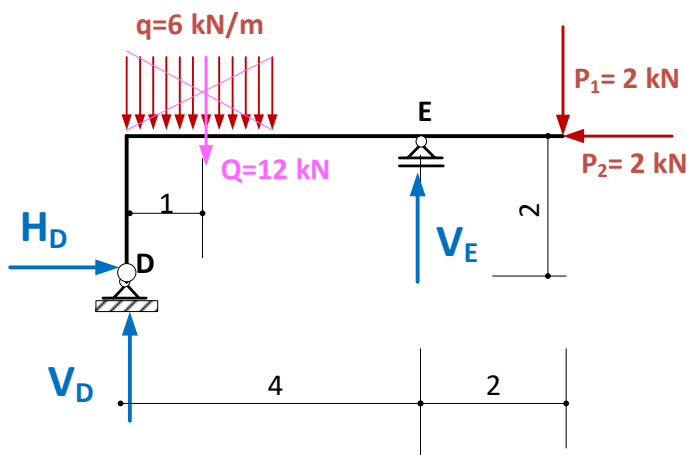
## 2.2. Wyznaczenie reakcji w sposób uproszczony

Przed wyznaczeniem reakcji tym sposobem musimy rozłożyć nasz ustrój złożony na ustroje proste – tj. na: trójprzegub ABC, który stanowi część podstawową ustroju złożonego oraz część drugorzędną w postaci załamanej belki DEF (patrz pkt 1). Zgodnie z budową hierarchiczną naszego złożonego ustroju w pierwszej kolejności rozwiązać musimy jego część podrzędną. W tym celu wyodrębniamy ją, zastępując przegub obrotowy D podporą nieprzesuwną i wyznaczamy reakcje od obciążenia przypadającego na tę część ustroju.

W dalszej kolejności należy rozwiązać część podstawową ustroju od obciążeń przypadających na tę część ustroju oraz od oddziaływania przekazanego z części drugorzędnej w miejscu przegubu D (są nimi siły oddziaływania przeciwnie skierowane w stosunku do zwrotów reakcji  $H_D$  i  $V_D$ , na podporze nieprzesuwniej D w części drugorzędnej ustroju).

### A. Rozwiązanie części drugorzędnej ustroju:

Przyjmujemy następujące zwroty reakcji oraz układamy ogólne warunki równowagi (brak możliwości wykorzystania dodatkowych war. równowagi – bo jest to ustrój prosty „bezprzegubowy”).



Rys. 7. Przyjęte zwroty reakcji dla części drugorzędnej ustroju złożonego

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad (H_D) \quad (15)$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad (V_D, V_E) \quad (16)$$

$$\sum_i M_{iD} = 0 \quad (V_E) \quad (17)$$

Mamy zatem dwa równania równowagi niezależne od pozostałych - równ. (15) i (17), bowiem zawierają jedną tylko niewiadomą:

$$\text{Z równania (15) otrzymujemy: } H_D = P_2 = 2 \text{ kN} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{Z równania (17) mamy: } & Q \cdot 1 - V_E \cdot 4 - P_2 \cdot 2 + P_1 \cdot 6 = 0 \\ & 12 \cdot 1 - V_E \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$



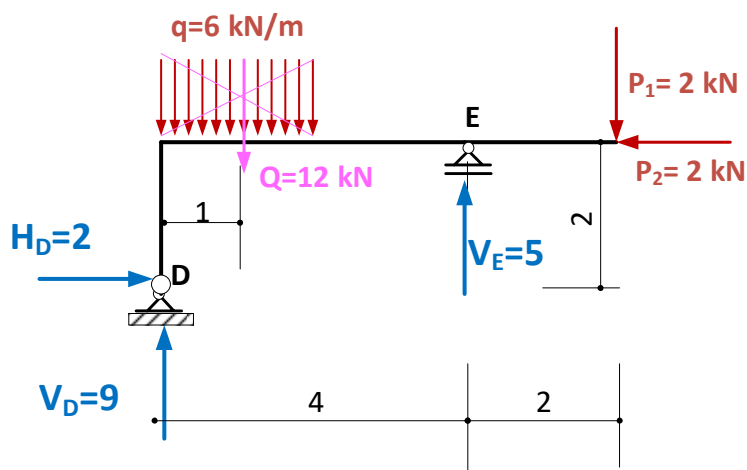
$$V_E = 5 \quad (19)$$

Z równania (16) mamy natomiast:  $V_D - Q + V_E - P_1 = 0$

$$V_D - 12 + 5 - 2 = 0$$

$$V_D = 9 \quad (20)$$

Wyznaczone reakcje w części drugorzędnej wynoszą:

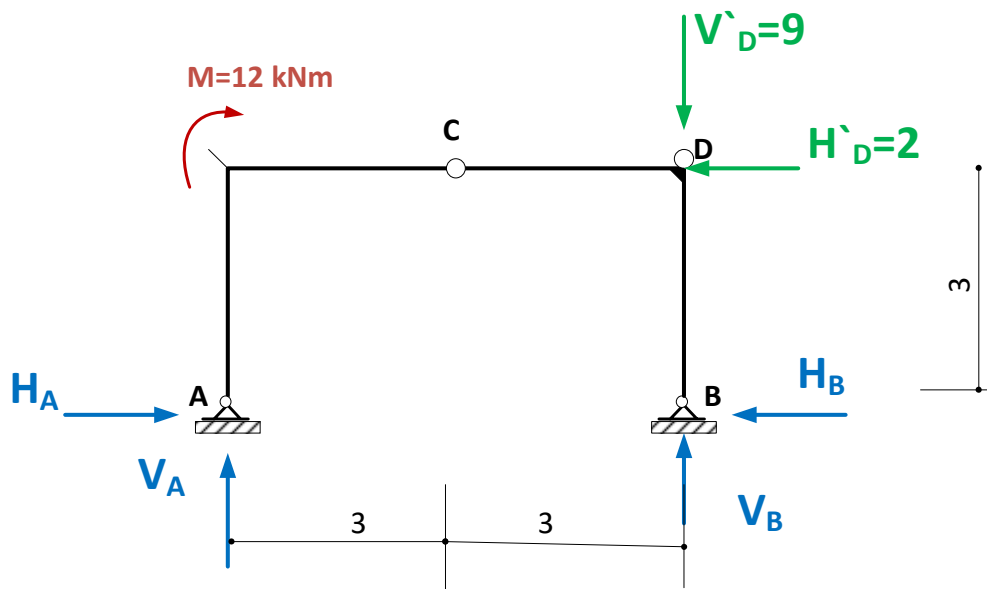


Rys. 8. Wyznaczone reakcje dla części drugorzędnej ustroju złożonego

Reakcje te spełniają warunki równowagi, co należy oczywiście wykazać.

## B. Rozwiązanie części podstawowej ustroju:

Część podstawową ustroju, jak wspomniano, rozwiązujemy od obciążeń przypadających na tę część oraz od oddziaływania przekazanego z części drugorzędnej (oznaczone w kolorze zielonym) w miejscu przegubu D.



Rys. 9. Przyjęte zwroty reakcji dla części podstawowej ustroju złożonego

Ponownie, tym razem dla części podstawowej układamy warunki równowagi. Ponieważ jest to trójprzegub, zatem oprócz trzech podstawowych warunków, dysponujemy także jednym warunkiem dodatkowym w oparciu o przegub C.

Ogólne warunki równowagi:

$$\sum_i P_{ix} = 0 \quad (H_A, H_B) \quad (21)$$

$$\sum_i P_{iy} = 0 \quad (V_A, V_B) \quad (22)$$

$$\sum_i M_{iB} = 0 \quad (V_B) \quad (23)$$

Oraz dodatkowy warunek równowagi:

$$\sum_i M_{iC}^{CA} = 0 \quad (H_A, V_A) \quad (24)$$

W pierwszej kolejności wykorzystamy, niezależne od pozostałych równanie sumy momentów statycznych względem punktu B (23):

$$V_A \cdot 6 + M - H'_D \cdot 3 = 0$$

$$V_A \cdot 6 + 12 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$V_A = -1 \text{ kN}$$

Z dodatkowego warunku równowagi (24) wynika, że pozioma reakcja w węzłowi A trójprzegubu wynosi:

$$\begin{aligned} -H_A \cdot 3 + H_B \cdot 3 + M &= 0 \\ -H_A \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 12 &= 0 \\ \mathbf{H_A = 3 \text{ kN}} \end{aligned}$$

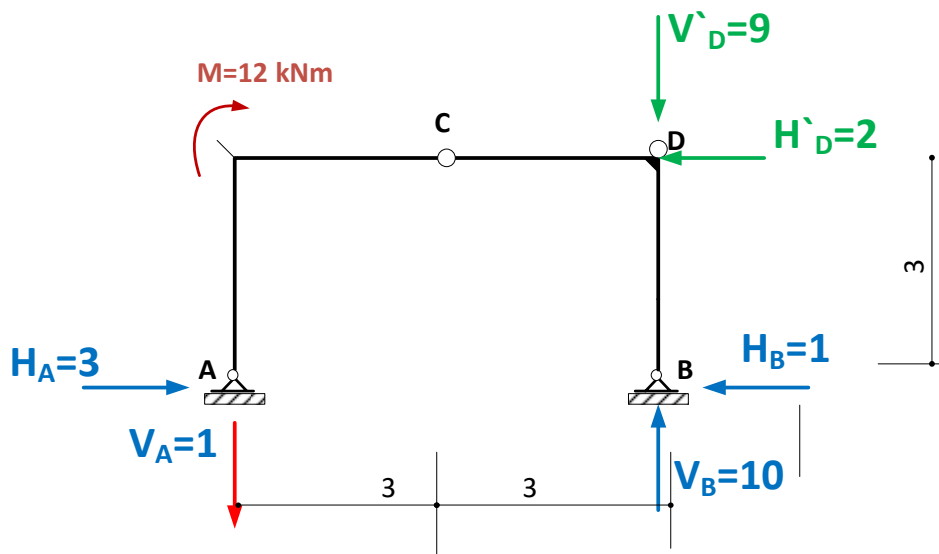
Pozostaje do wyznaczenia reakcja pozioma w drugim węzłowi B z równania (21)

$$\begin{aligned} H_A - H_B - H'_D &= 0 \\ 3 - H_B - 2 &= 0 \\ \mathbf{H_B = 1 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Ostatnią do wyznaczenia reakcję obliczamy z równania sumy rzutów na oś pionową (22)

$$\begin{aligned} V_A + V_B - V'_D &= 0 \\ -1 + V_B - 9 &= 0 \\ \mathbf{V_B = 10 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Na rysunku 10 przedstawiono wyznaczone reakcje w części podstawowej ustroju, zmieniając zwrot reakcji  $V_A$  ze względu na ujemną jej wartość. Reakcje te spełniają warunki równowagi, co należy wykazać.

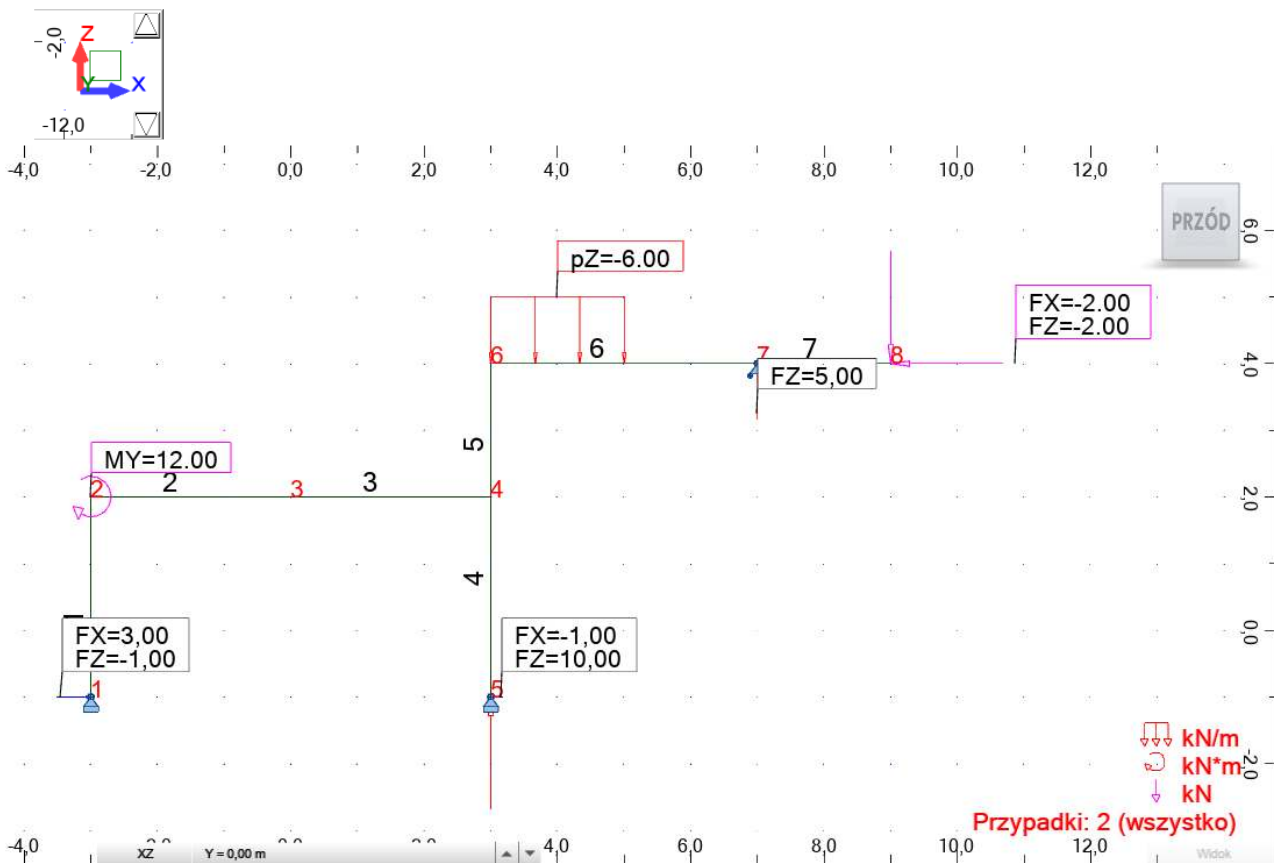


Rys. 10. Wyznaczone zwroty reakcji dla części podstawowej ustroju złożonego

Jak można zauważyć reakcje wyznaczone pierwszym i drugim sposobem (pkt 2.1 i 2.2) są takie same, co jest oczywiste i jest dodatkową kontrolą poprawności rozwiązania.

### 2.3 Wyznaczenie reakcji w programie Robot

Wyznaczone reakcje w programie Robot przedstawiono na rys. 11j. Należy zauważyć, że program znakuje reakcje zgodnie z globalnym układem odniesienia XZ (wartość dodatnia oznacza zgodność reakcji z kierunkiem osi tego układu), natomiast w w/w obliczeniach znakowanie nawiązuje do przyjętych na początku obliczeń zwrotów reakcji (znak minus oznacza zwrot przeciwny reakcji do zwrotu przyjętego). Stąd różnice w znakach reakcji w programie Robot i obliczeniach odręcznych.



| Reakcje:1 w układzie globalnym - Przypadek: 2 (wszystko) |             |             |          |
|--|-------------|-------------|----------|
| Węzeł/Przypadek  | FX (kN)     | FZ (kN)     | MY (kNm) |
| 1/ 2   | 3,00        | -1,00       | 0,00     |
| 5/ 2   | -1,00       | 10,00       | -0,00    |
| 7/ 2   | 0,00        | 5,00        | 0,00     |
| <b>Przypadek 2</b>                                       |             |             |          |
| Suma całkowita   | 2,00        | 14,00       | 0,00     |
| Suma reakcji   | 2,00        | 14,00       | -70,00   |
| Suma sił   | -2,00       | -14,00      | 70,00    |
| Weryfikacja  | -0,00       | 0,0         | -0,00    |
| Precyzja   | 5,82077e-15 | 3,09459e-29 |          |

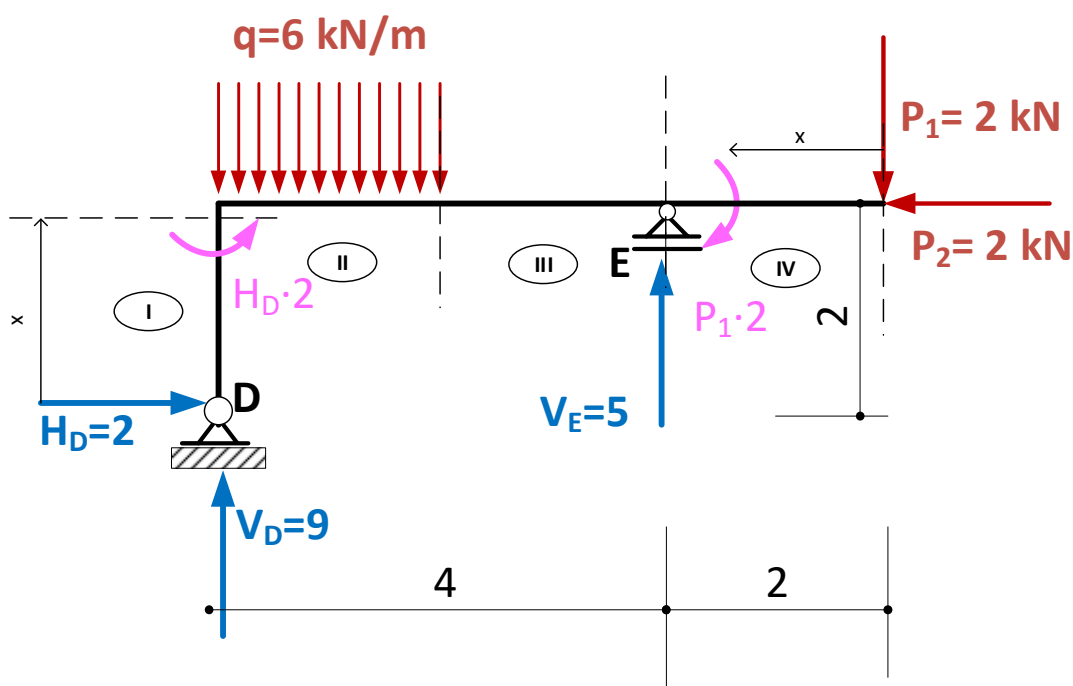
Rys. 11. Wyznaczone reakcje w programie Robot

### Ad. 3. Wyznaczenie sił przekrojowych

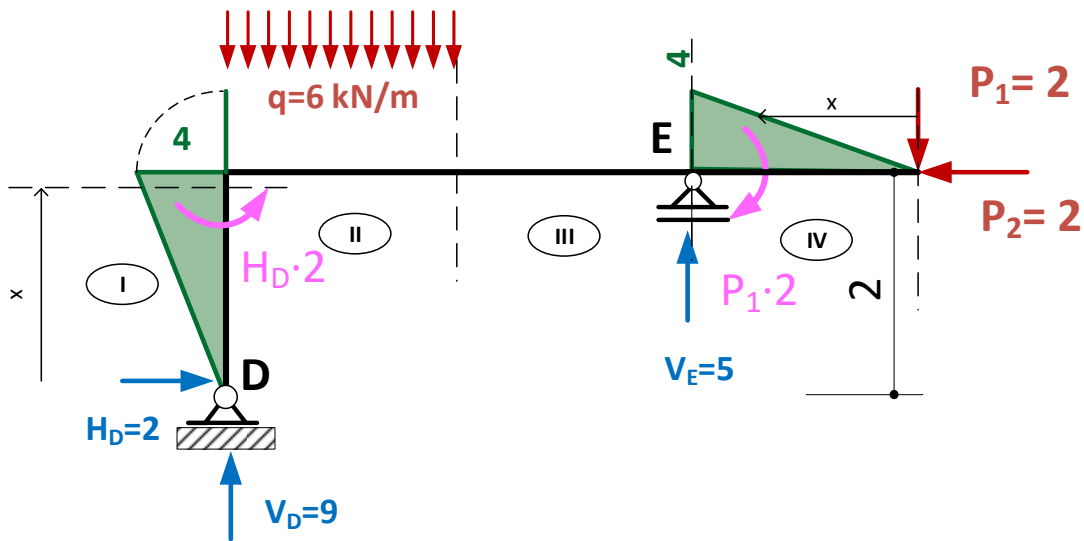
Siły przekrojowe wyznaczone w sposób uproszczony, bez wyznaczania funkcji sił wewnętrznych. Dodatkowo dla ułatwienia rozwiązania określono dla ustroju rozłożonego na części proste (część podstawową w postaci trójprzegubu i część drugorzędną w postaci załamanej belki), analogicznie do obliczeń reakcji przedstawionych w podrozdziale 2.2. W pierwszej kolejności rozwiązujemy część drugorzędną ustroju, sporządzając wykresy sił przekrojowych w kolejności: M, T, N zgodnie z zasadami podanymi na zajęciach. Uwzględniamy obciążenia działające na tę część ustroju. W dalszej kolejności rozwiązujemy część podstawową zadanego ustroju, od obciążeń przypadających na tę część oraz od oddziaływania przekazanego z części drugorzędnej (czyli sił przeciwnie skierowanych do zwrotów wyznaczonych reakcji  $V_d$  i  $H_d$  w części drugorzędnej).

#### A. Rozwiązanie części drugorzędnej ustroju:

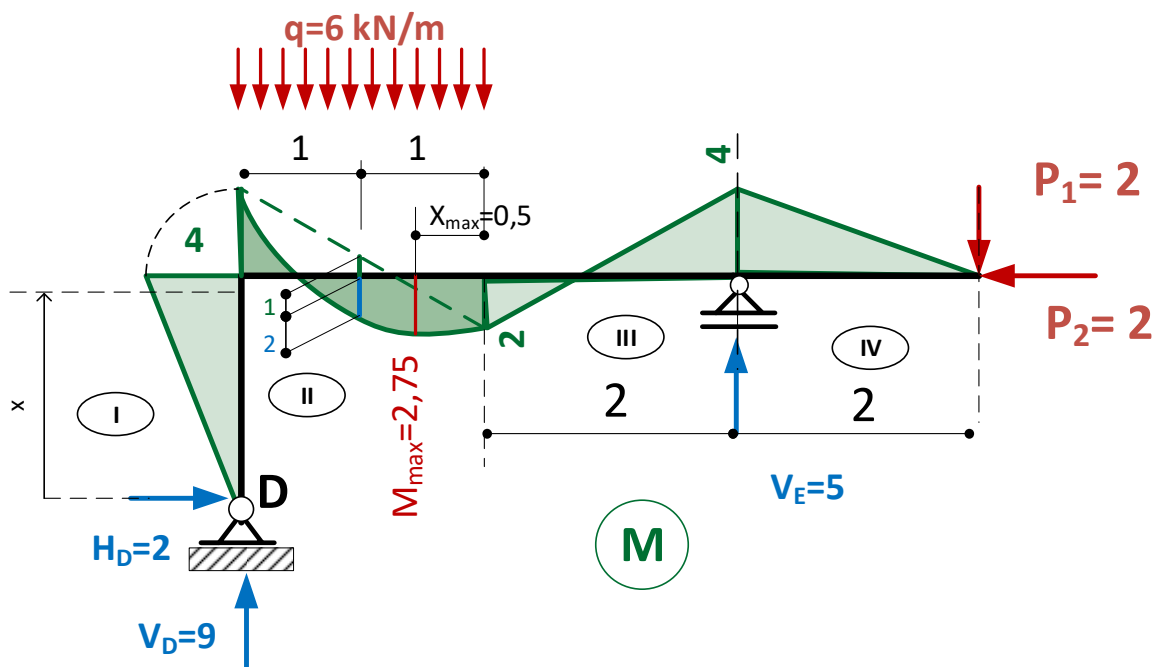
Na kolejnych rysunkach przedstawiono rozwiązanie w postaci  $M(x)$  w kolejnych przedziałach obciążenia, zaczynając od przedziałów skrajnych (I, IV i III), dla których wyznaczamy rzędne na końcach przedziałów obciążenia (rys. 12,13). Funkcja momentów na początku i końcu przedziału II obciążenia przyjmuje wartości takie same jak funkcja momentów odpowiednio na końcu I przedziału oraz końcu III przedziału (brak jest obciążenia momentem skupionym dającym nieciągłość w wykresie  $M(x)$ ). Nieliniowy przebieg funkcji momentów zginających przedziale II (rys. 14) wyznaczmy na podstawie superpozycji liniowego wykresu momentów zginających, wynikającego z w-ści na końcach przedziału II oraz parabolicznego wykresu momentów od obciążenia rozłożonego – tak jak dla belki swobodnie podpartej (rys. 15). Położenie ekstremum w wykresie  $M(x)$  w tym przedziale wyznaczono na podstawie wykresu sił tnących. Odpowiada ono położeniu zerowej rzędnej w wykresie  $T(x)$  – rys. 16.



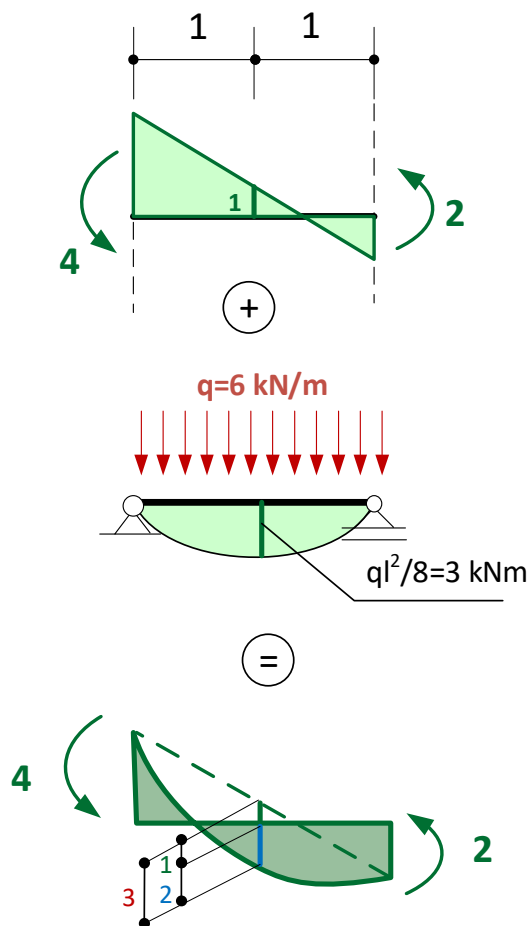
Rys. 12. Przedziały obciążenia oraz sposób wyznaczenia  $M(x)$  w części drugorzędnej



Rys. 13. Sposób wyznaczenia  $M(x)$  w części drugorzędnej – cd.

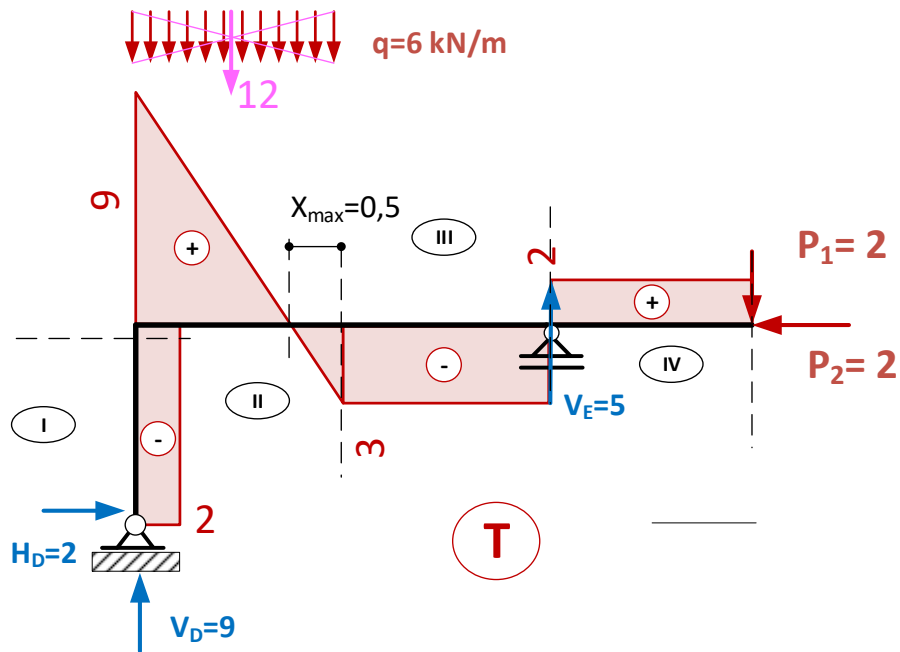


Rys. 14. Wykres  $M(x)$  w części drugorzędnej

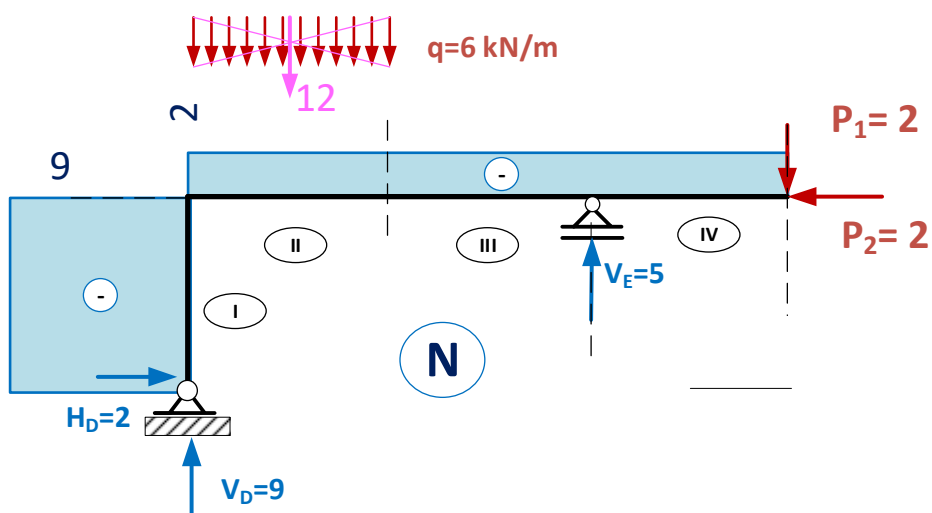


Rys. 15. Sposób wyznaczenia wykresu  $M(x)$  dla pręta z obciążeniem równomiernie rozłożonym w przedziale II obciążenia

W dalszej kolejności, bazując na wykresie momentów zginających sporządzamy wykres sił tnących  $T(x)$  – rys. 16. Z kolei mając na uwadze wykres sił tnących  $T(x)$  łatwo jest sporządzić wykres sił osiowych  $N(x)$ , w kolejnych przedziałach obciążenia (rys. 17).



Rys. 16. Wykres  $T(x)$  w części drugorzędnej

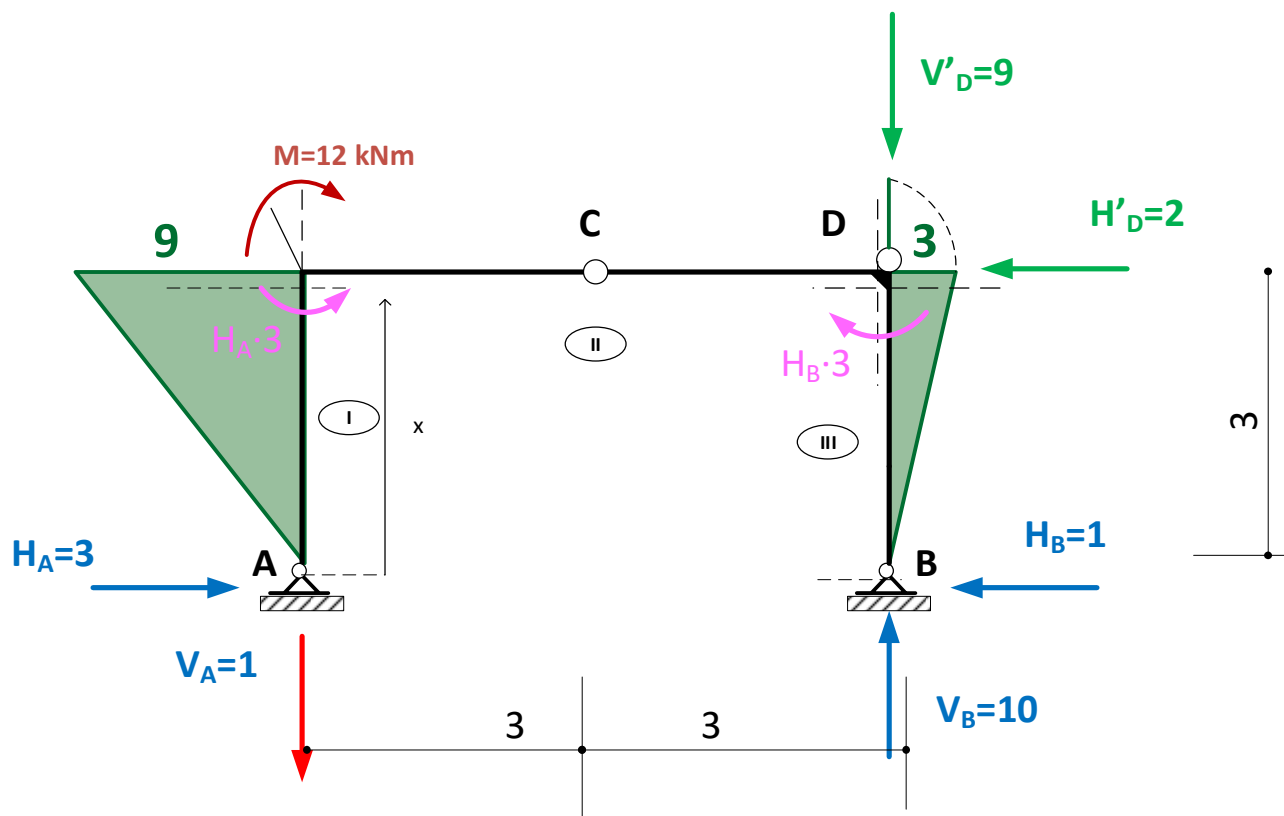


Rys. 17. Wykres  $N(x)$  w części drugorzędnej

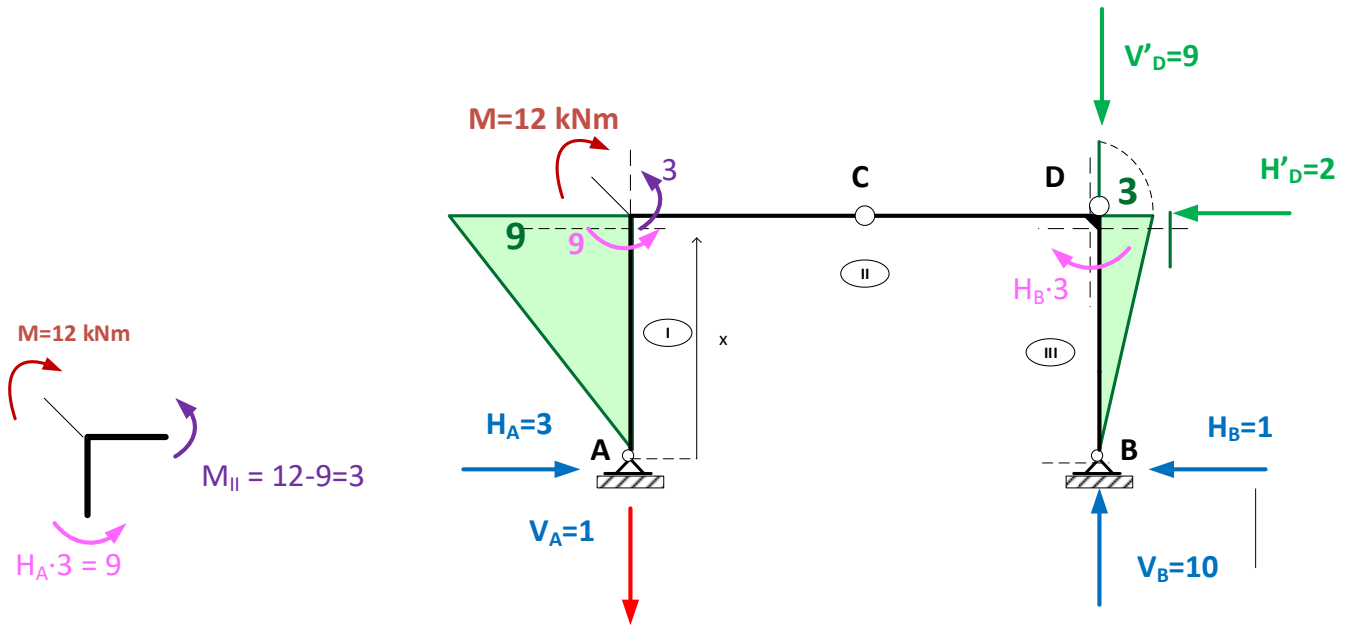


## B. Rozwiązanie części podstawowej ustroju:

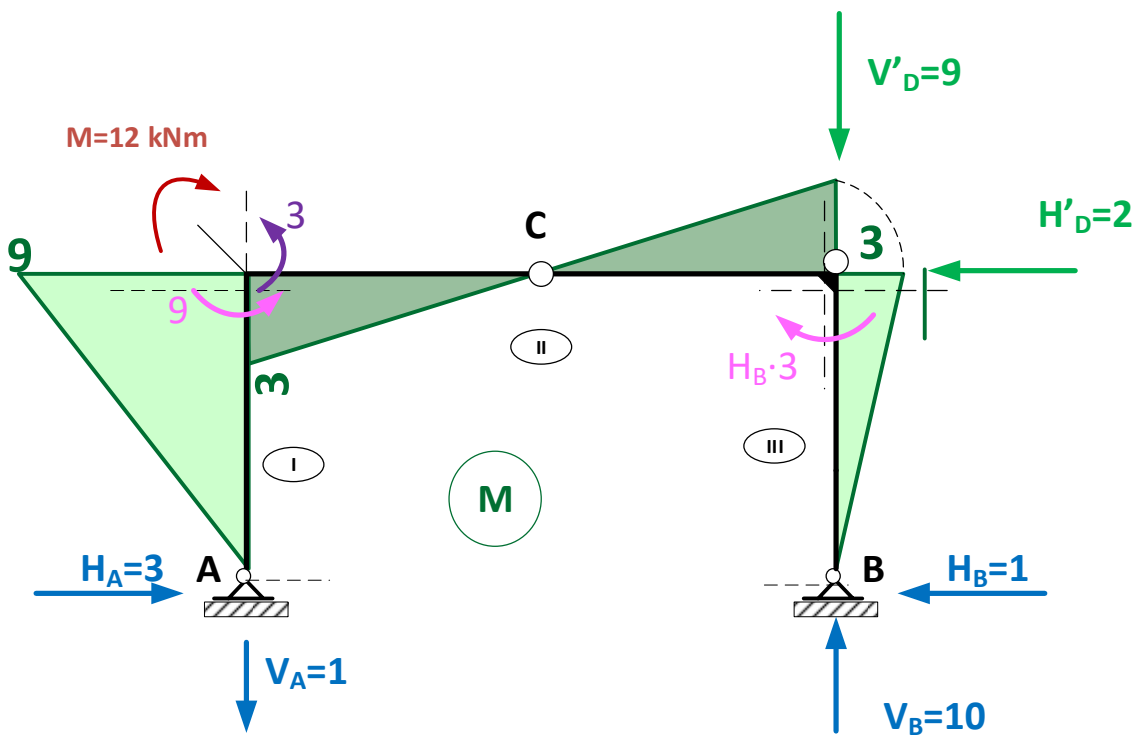
Po rozwiązaniu części drugorzędnej dokonujemy rozwiązania części podstawowej, która jak już wspomniano jest trójprzegubem. Nie możemy zapomnieć o przekazaniu oddziaływania z części drugorzędnej układu na część podstawową, zgodnie z hierarchiczną budową ustroju złożonego. Podobnie jak poprzednio, rysowanie wykresu momentów zginających rozpoczynamy od przedziałów skrajnych obciążenia (I, III), określając rzędne wykresu  $M(x)$  na końcach przedziałów – rys. 17. Linowy przebieg funkcji momentów w przedziale II uzyskujemy łącząc rzędną na początku tego przedziału, wyznaczoną z warunku równowagi węzła lewego (rys. 18), wynikającą z przyłożonego w węzle momentu skupionego, z rzędną na końcu przedziału II. Oczywiście wykres  $M(x)$  w tym przedziale musi posiadać rzędną zerową w miejscu przegubu obrotowego (wykres przechodzi przez przegub) – rys. 19.



Rys. 17. Sporządzenie wykresu  $M(x)$  w części podstawowej

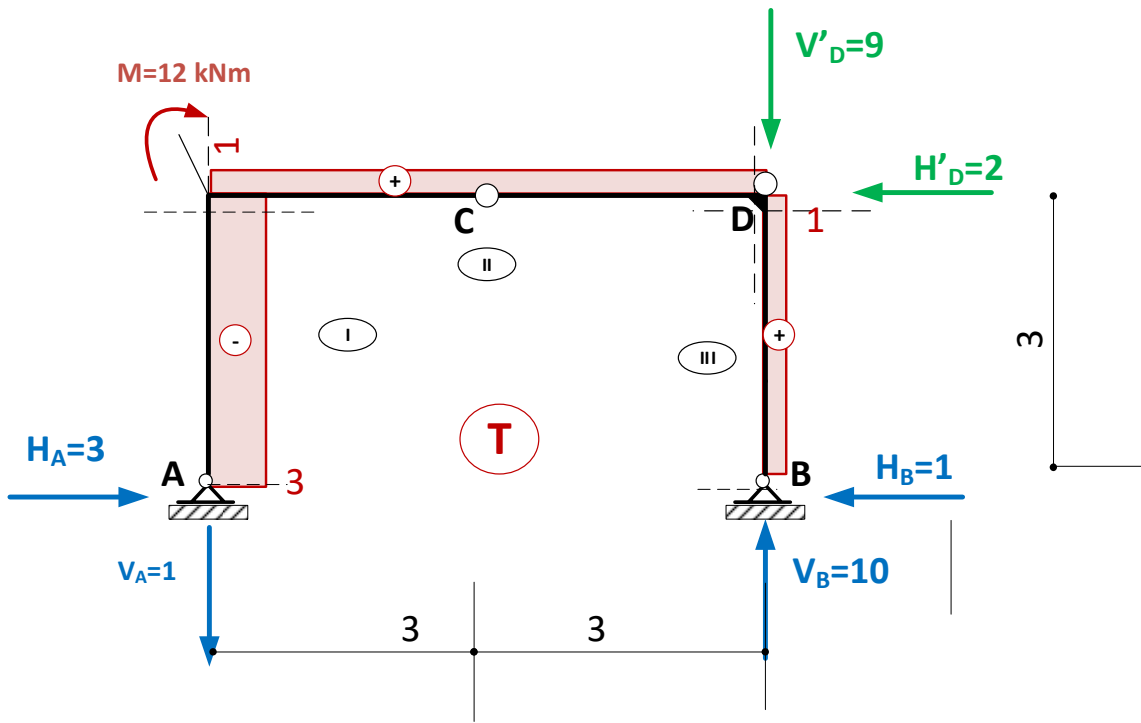


Rys. 18. Sporządzenie wykresu  $M(x)$  w części podstawowej – cd.

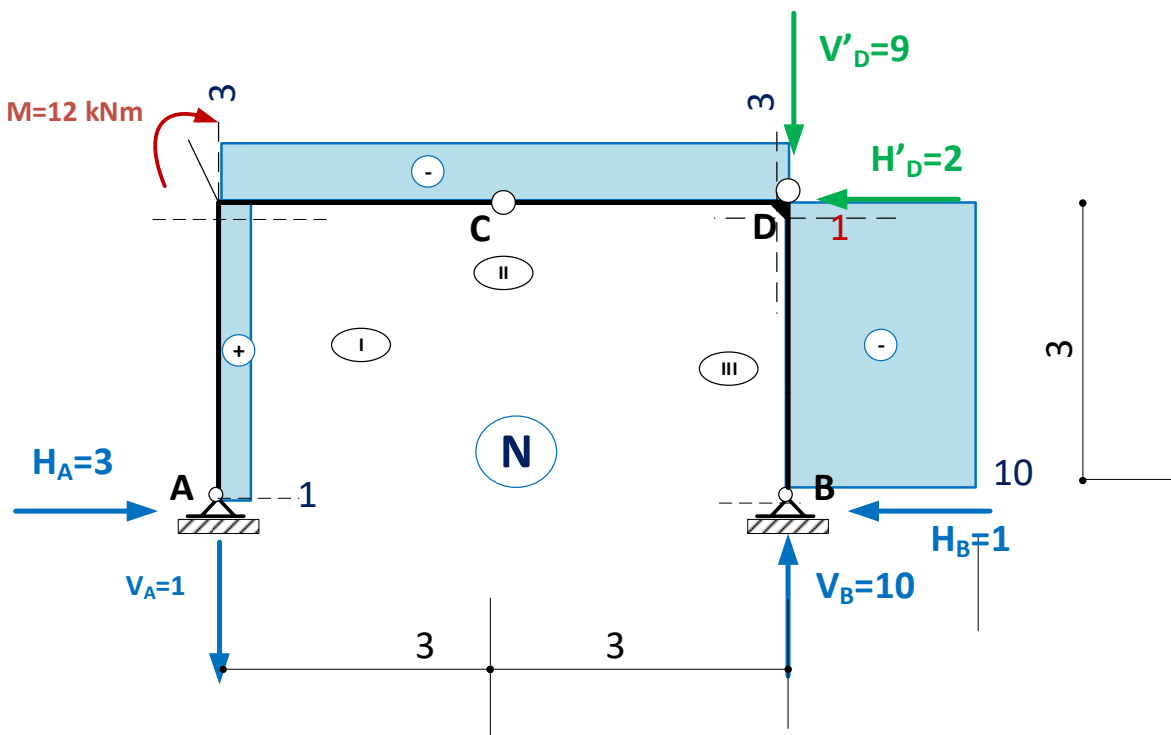


Rys. 19. Wykres  $M(x)$  w części podstawowej

W dalszej kolejności na podstawie definicji oraz korzystając ze sporządzonego wykresu  $M(x)$  sporządzamy wykres sił tnących  $T(x)$  – rys. 20. Ostatnim wykresem do wyznaczenia jest wykres sił osiowych  $N(x)$  – rys. 21.



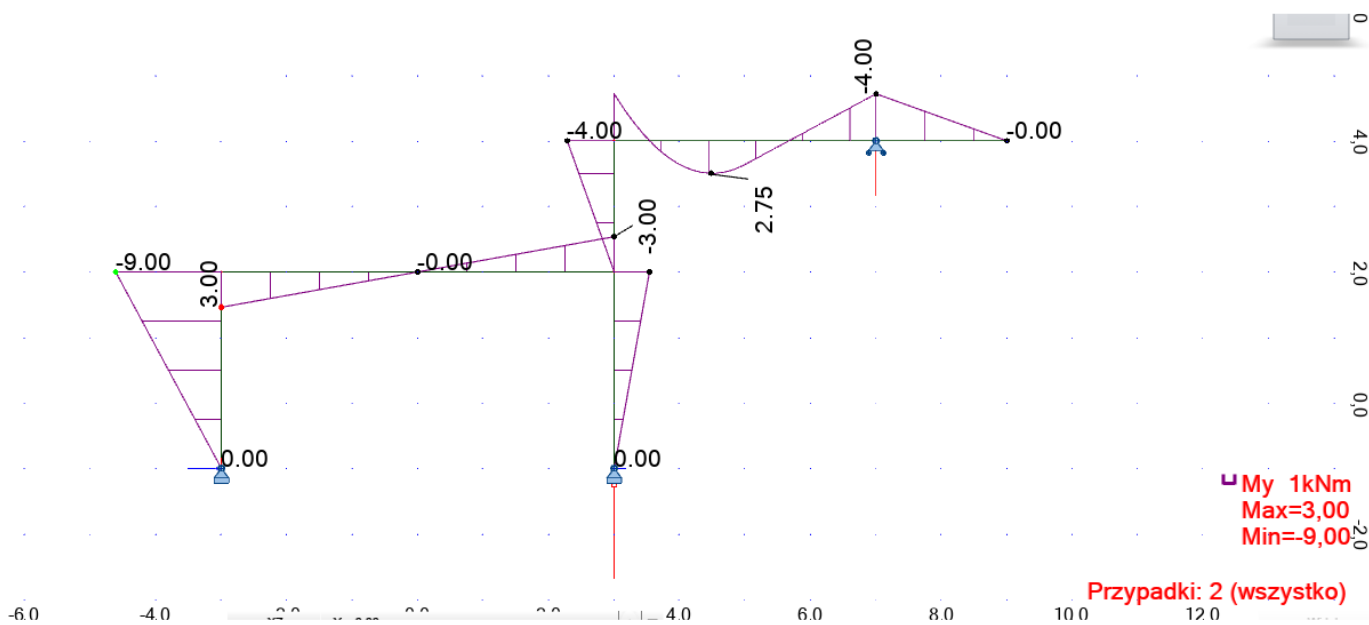
Rys. 20. Wykres  $T(x)$  w części podstawowej



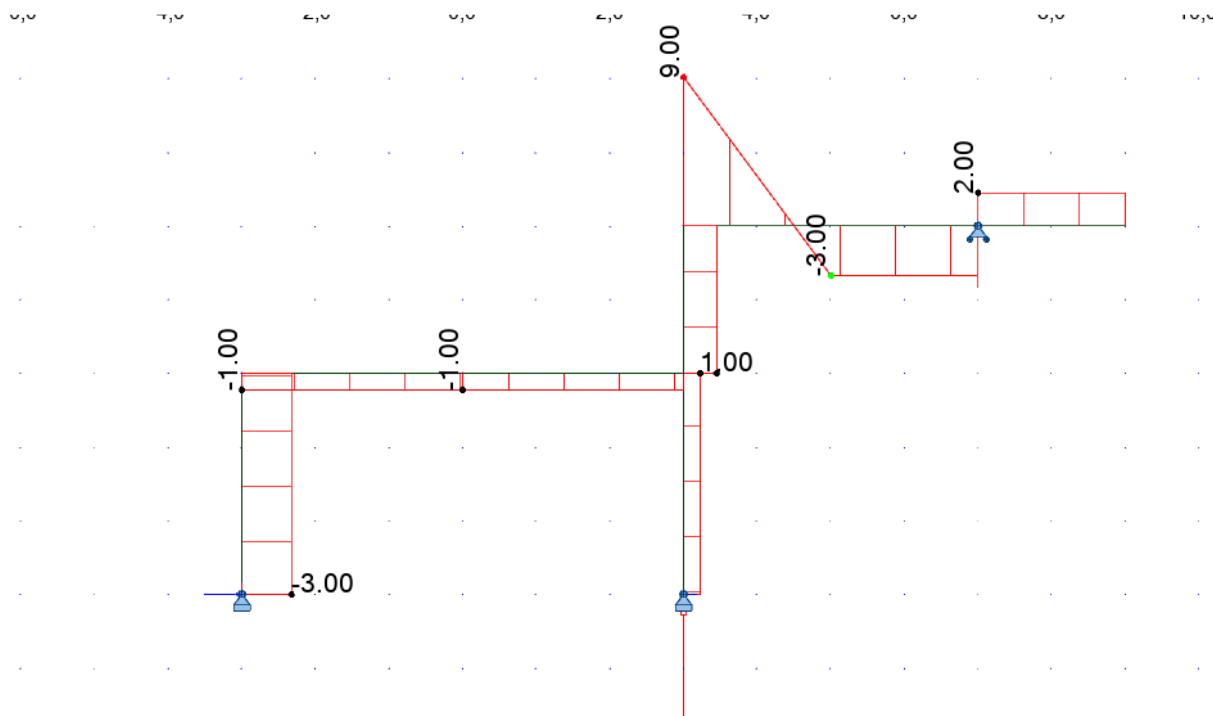
Rys. 21. Wykres  $N(x)$  w części podstawowej

### C. Porównanie z rozwiązaniem za pomocą programu ROBOT

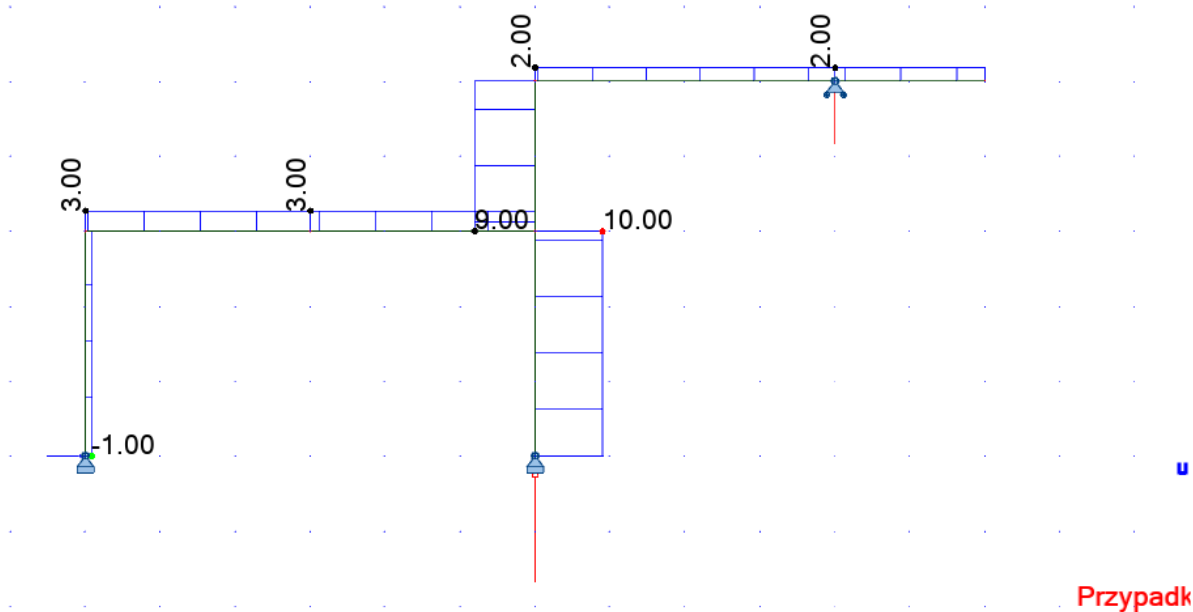
Dla potwierdzenia poprawności rozwiązania przedstawiono wykresy sił przekrojowych uzyskane z rozwiązania zadanego układu w programie Robot. Ponieważ jest to ustrój statycznie wyznaczalny rozwiązanie nie zależy od sztywności prętów. Można zatem przyjąć w modelu dowolne przekroje, uzyskując rozwiązanie podane na rys.22 – wykres  $M(x)$ , rys. 23 – wykres  $T(x)$  oraz rys. 24 – wykres  $N(x)$ .



Rys. 22. Wykres  $M(x)$  w programie Robot



Rys. 23. Wykres  $T(x)$  w programie Robot



Rys. 24. Wykres  $N(x)$  w programie Robot

Należy pamiętać, że program Robot inaczej znakuje wykresy sił przekrojowych, aniżeli znakowanie w obowiązującej mechanice, przyjmując konwencje znakowania w oparciu o układy lokalne prętów. Szczegóły znakowania w programie Robot podano w ramach laboratorium komputerowego. Więcej informacji można odnaleźć w publikacji autora dotyczącej programu Robot <sup>1</sup>

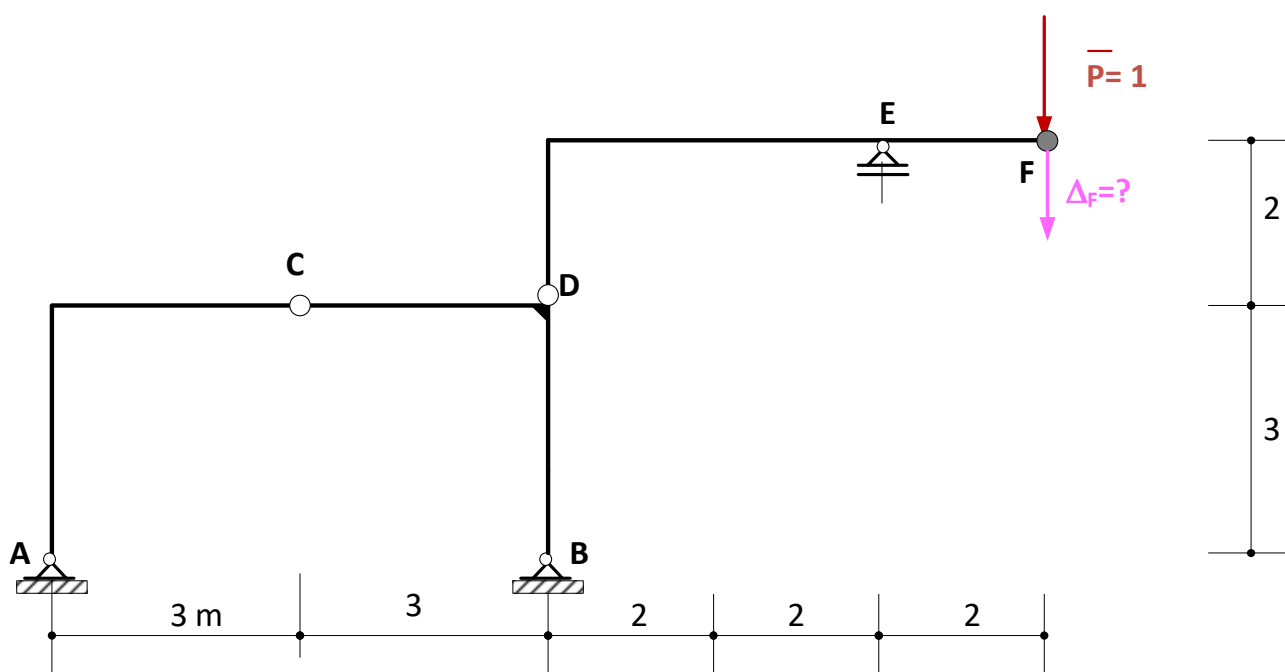
<sup>1</sup> Link: <https://repolis.bg.polsl.pl/dlibra/publication/78206/edition/69132>

#### Ad4. Wyznaczenie zadanego przemieszczenia z pomocą zasady prac wirtualnych

W zadaniach klasycznej mechaniki budowli rozwiązujemy układy sprężyste Clapeyron'a. W takich układach, wobec braku rozpraszania energii mamy równość pracy wykonanej przez siły zewnętrzne z pracą wykonaną przez siły wewnętrzne, co wynika z zasady zachowania energii. Zgodnie z algorytmem wyznaczania przemieszczeń wg zasady prac przygotowanych (wirtualnych), niezbędne jest zbudowanie układu pomocniczego, w którym, zamiast zadanego obciążenia, w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia przykładamy jednostkową siłę wirtualną. Układ ten rozwiązujemy wyznaczając wykres momentów wirtualnych (ozn.  $M$  z nakreśleniem). Pozwala to, korzystając ze wzoru całkowego Maxwella-Mohra (1), wyznaczyć poszukiwane przemieszczenie, którego zwrot zakładamy zgodnie z przyjętym zwrotem jednostkowej siły uogólnionej. W układach ramowych, pracujących głównie na zginanie, wystarczy uwzględnić jedynie wpływ momentów zginających na przemieszczenie, czyli pierwszy składnik we wzorze (1).

$$\delta_i = \sum_{i=1}^n \int_{x=0}^l \frac{M(x) \cdot \overline{M(x)}}{EJ} dx + \sum_{i=1}^n \kappa \int_{x=0}^l \frac{T(x) \cdot \overline{T(x)}}{GA} dx + \sum_{i=1}^n \int_{x=0}^l \frac{N(x) \cdot \overline{N(x)}}{EA} dx \quad (1)$$

Wartość poszukiwanego przemieszczenia możemy wyznaczyć układając funkcje momentów zginających w układzie zadanym oraz układzie wirtualnym, a następnie podstawić do wzoru (1), przemnożyć i scałkować dla kolejnych przedziałów obciążenia. Można jednak – przy pewnych warunkach, które należy spełnić, wykonać całkowanie w sposób graficzny, metodą Wereszczagina. Sposób ten jest znacząco prostszy i zalecany do stosowania w obliczeniach inżynierskich. W naszym przykładzie układ wirtualny do wyznaczenia przemieszczenia pionowego węzła F ma postać pokazaną na rys. 25

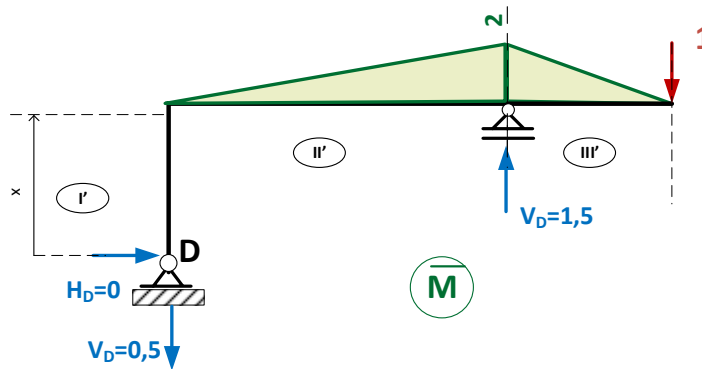


Rys. 25. Układ wirtualny do wyznaczenia przemieszczenia

Rozwiązanie przeprowadzamy tak jak poprzednio, posługując się podziałem ustroju złożonego na części proste. Jest to pokazane na kolejnych rysunkach (rys. 26 i 27)

### A. Rozwiązanie części drugorzędnej

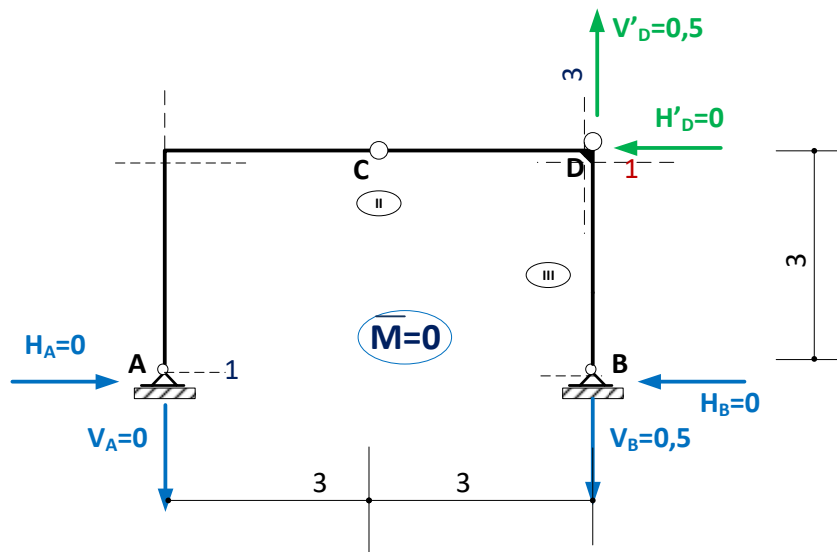
Rozwiązując część drugorzędną układu wirtualnego otrzymujemy wykres  $M(x)$  jak na rys. 26.



Rys. 26. Rozwiązanie części drugorzędnej układu wirtualnego

### B. Rozwiązanie części podstawowej

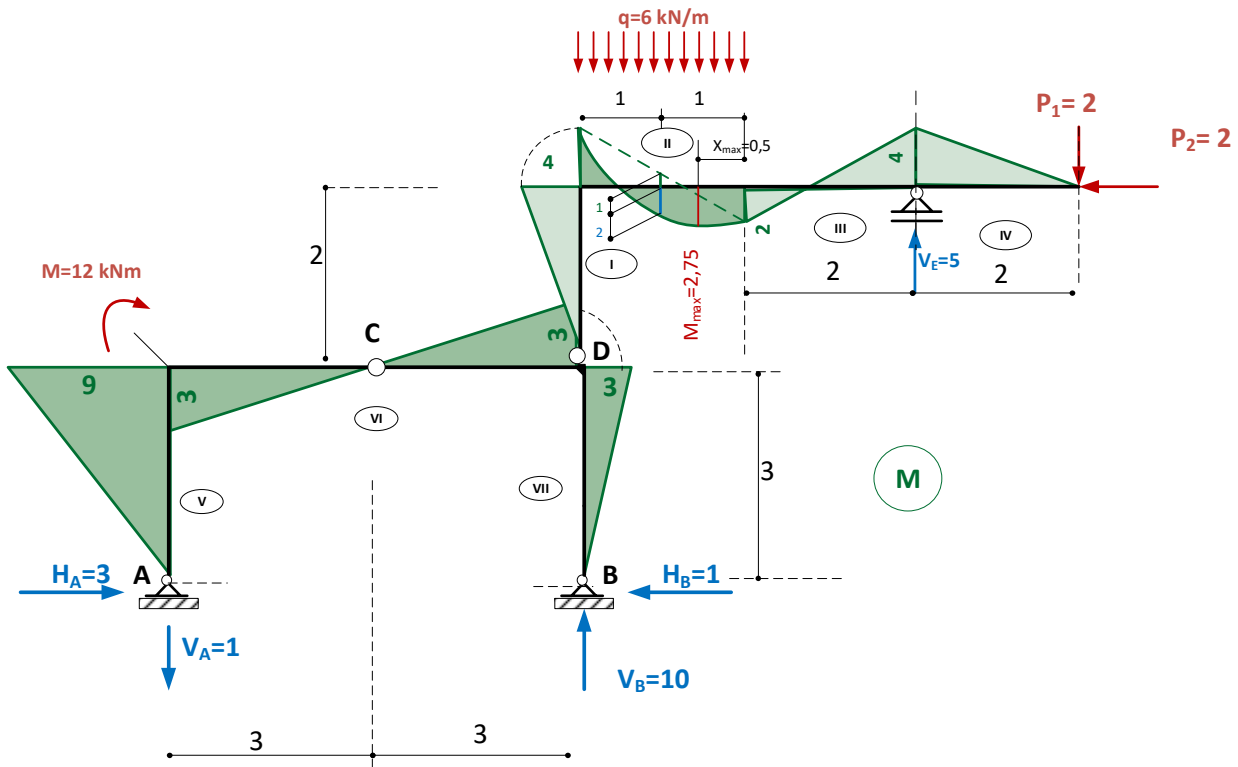
Rozwiązanie części podstawowej daje nam zerowy wykres momentów zginających – rys.27, ze względu na lokalizację podpory B. Oddziaływanie z części drugorzędnej (składowa pionowa) jest przenoszona przez reakcję pionową na tej podporze i nie obciąża reszty ustroju.



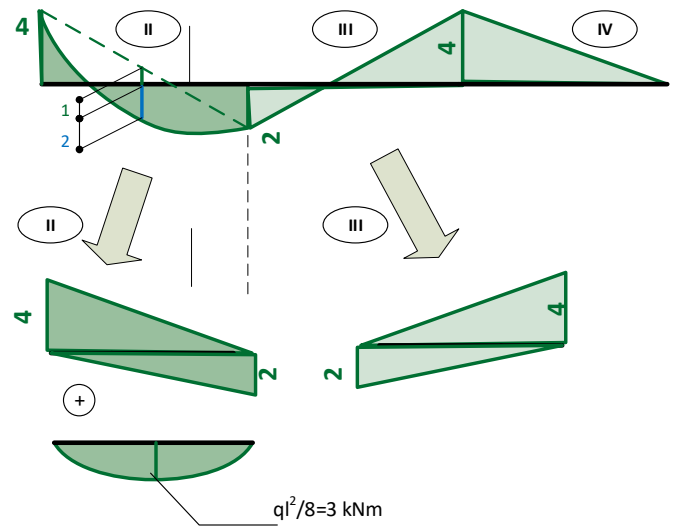
Rys. 27. Rozwiązanie części podstawowej układu wirtualnego

Dokonując mnożenia wykresów zgodnie ze wzorem całkowym Mohra należy wykres momentów zginających w układzie zadanym (rys. 29) oraz wykres w układzie wirtualnym jak na rys. 30.

Układ zadany:



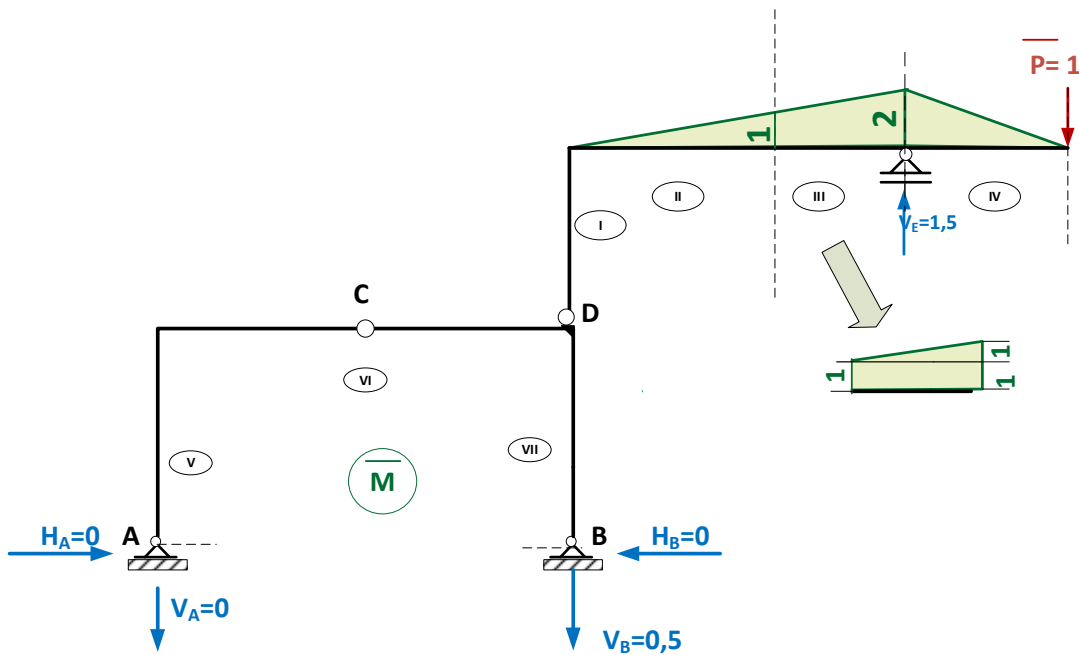
Rys. 28



Rys. 29. Wykres  $M(x)$  w układzie zadany wraz z rozkładem wykresów złożonych na proste



## Układ wirtualny do wyznaczenia przemieszczenia



Rys. 30. Wykres  $M(x)$  w układzie wirtualnym wraz z rozkładem wykresu złożonego na proste

## Wyznaczenie przemieszczenia

Wyznaczenie przemieszczenia wg wzoru całkowego Maxwella-Mohra, sposobem graficznym (całkowanie graficzne wykresów sposobem *Wereszczagina*) wymaga uzgodnienia przedziałów obciążenia w układzie zadanym i wirtualnym, bowiem mnożenie wykresów można wykonać jedynie w obrębie poszczególnych przedziałów. Jak wynika z porównania wykresów na rys. 29 i 30, niezerowy wynik mnożenia wykresów  $M(x)$  dotyczy jedynie dla przedziałów obciążenia: II, III i IV w części drugorzędnej ustroju. Mnożenie w pozostałych przedziałach, w tym w części podstawowej daje zerowe składniki obliczanego przemieszczenia.

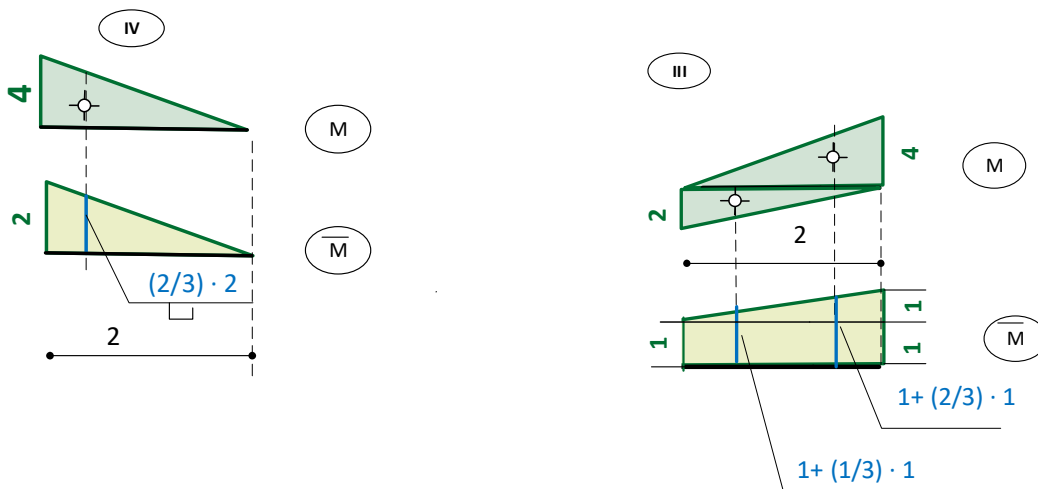
W celu łatwiejszego przeprowadzenia graficznego całkowania wykresów  $M(x)$ , złożone wykresy momentów należy rozłożyć na proste, np. w sposób pokazany na rys. 29 - dla układu zadanego (dot. przedziału II i III) oraz na rys. 30 - dla układu wirtualnego (dot. przedziału III).

Kolejność uwzględnienia poszczególnych przedziałów obciążenia jest oczywiście dowolny; w zadaniu ustalono odpowiednio: przedział IV, III, II. W przypadku tego ostatniego przedziału, w odróżnieniu od pozostałych mnożenie nie jest przemienne, tzn. musimy uwzględnić pole wykresu  $M(x)$  z układu zadanego razy rzędna pod środkiem ciężkości tego wykresu, odczytana z wykresu w układzie wirtualnym (nie odwrotnie!). Wynika to z faktu, że wykres  $M(x)$  w tym przedziale, w układzie zadanym, jest nieliniowy.

Poniżej pokazano sposób wyznaczenia wartości całek Maxwella-Mohra, poprzez odpowiednie przemnożenie wykresów w kolejnych przedziałach obciążenia, zaznaczając poniżej, które wykresy są mnożone.

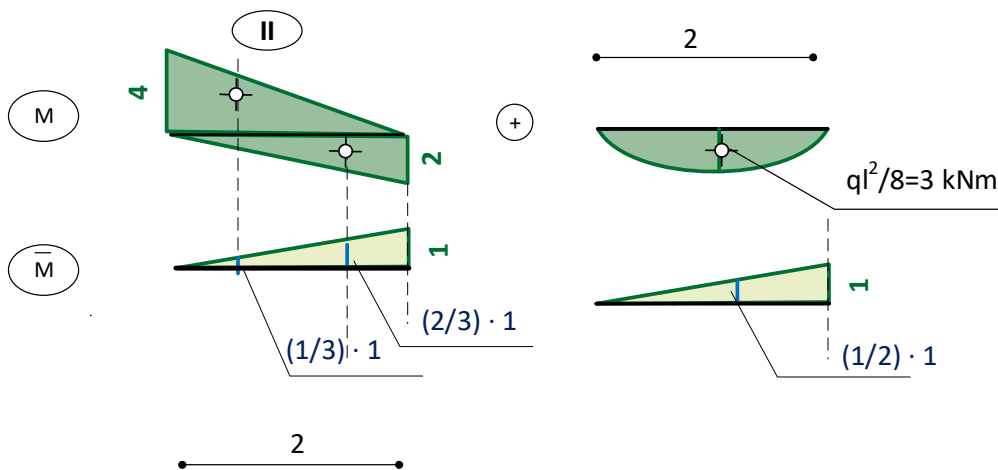
$$\Delta_F = \sum_{i=1}^{n=3} \int_{x=0}^l \frac{M(x) \cdot \overline{M}(x)}{EJ} dx \quad (2)$$

$$\Delta_F = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right] + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] +$$



cd.:

$$+ \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right]$$

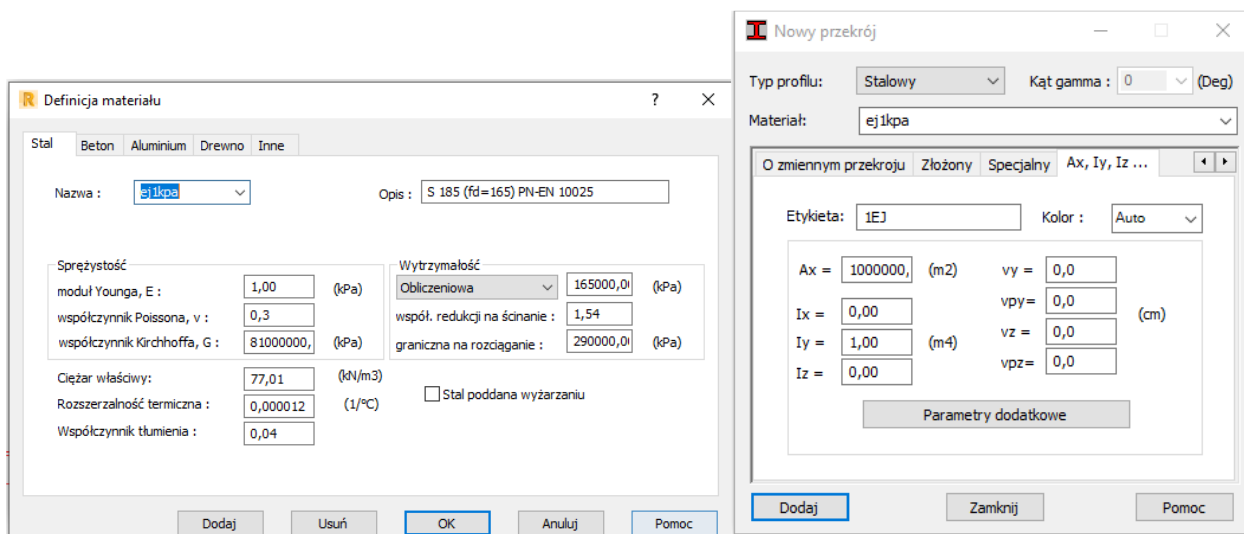


$$\Delta_F = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{16}{3} + \frac{20}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - 2 \right] = \frac{22}{3EJ} = 7,33 \frac{1}{EJ} \quad (3)$$

## Wyznaczenie przemieszczenia za pomocą programu Robot

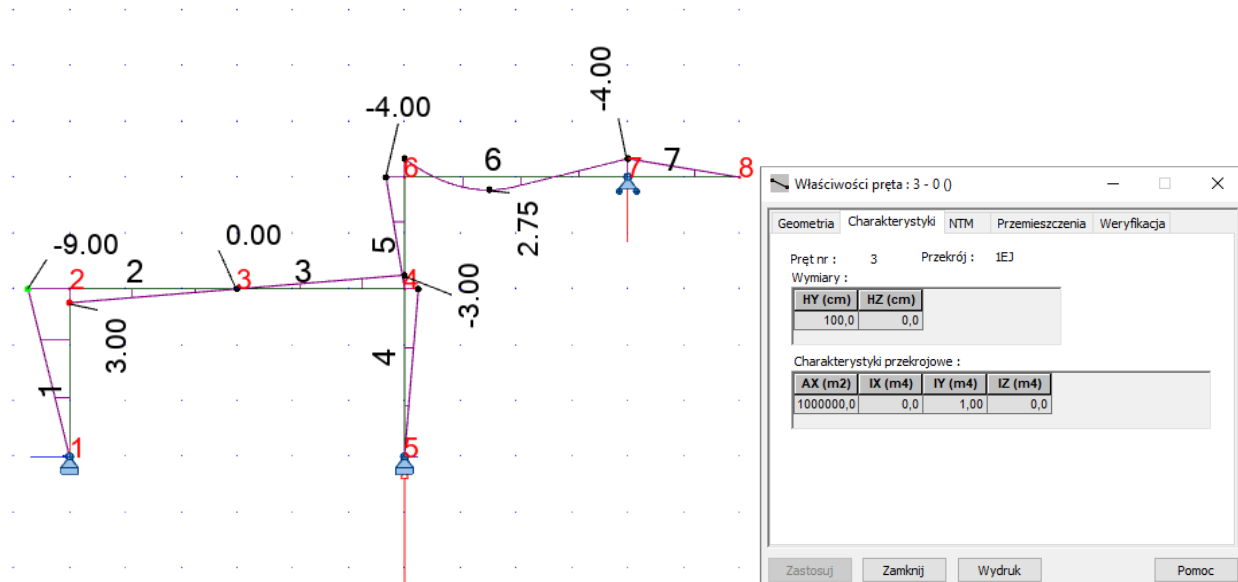
Dla weryfikacji obliczeń odręжных, zbudowano w programie Robot model układu i wyznaczono przemieszczenie węzła F (jest to węzeł nr 8 w modelu). Ponieważ wartość przemieszczenia zależy od sztywności prętów (wyrażona jest poprzez odwrotność EJ), w programie komputerowym przyjęto fikcyjną, jednostkową sztywność  $EJ=1 \text{ kNm}^2$ . Przyjęto wartość modułu sprężystości materiału równą  $E=1 \text{ kPa}$  oraz momentu bezwładności przekroju równą  $J=1 \text{ m}^4$ . Jednocześnie przyjęto wartość sztywności osiowej EA określoną dużą liczbą (równą  $1e^6$ ), co pozwoli pominąć w programie Robot wpływ sił osiowych na wyznaczane przemieszczenie.

Sposób definicji fikcyjnych sztywności w programie Robot oraz ich weryfikację pokazano na rys. 31.



Rys. 31. Definicja sztywności jednostkowej prętów ustroju w programie Robot

Wyznaczone przez program przemieszczenie pionowe węzła 8 (końca wspornika) wynosi 733,33 cm (patrz tabelka poniżej- na rys. 32) czyli jest to 7.33 m, dla przyjętej fikcyjnej jednostkowej sztywności prętów ustroju  $EJ=1 \text{ kNm}^2$ . Zatem wyznaczone z zasady prac przygotowanych przemieszczenie  $7,33 \frac{1}{EJ} \text{ [m]}$  odpowiada przemieszczeniu wyliczonemu przez program Robot równemu 733,33 cm, co potwierdza poprawność obliczeń odręжных. Znak minus przemieszczenia w programie Robot oznacza, że przemieszczenie to jest skierowane przeciwnie do osi globalnej Z czyli pionowo w dół.



Przemieszczenia - Przypadek: 2 (wszystko)

| Węzeł/Przypadek | UX (cm)  | UZ (cm)   | RY (Rad) |
|-----------------|----------|-----------|----------|
| 1/ 2            | 0,0      | 0,0       | -4,500   |
| 2/ 2            | 0,003    | 0,000     | 9,000    |
| 3/ 2            | 0,002    | -1800,002 | 4,500    |
| 4/ 2            | 0,001    | -0,003    | -3,000   |
| 5/ 2            | 0,0      | 0,0       | 1,500    |
| 6/ 2            | -333,335 | -0,005    | 1,000    |
| 7/ 2            | -333,336 | 0,0       | 1,000    |
| 8/ 2            | -333,336 | -733,331  | 5,000    |

Rys. 32. Wyznaczone przemieszczenie węzła F (węzła nr 8) w programie Robot oraz wykres momentów zginających dla zadanego układu

Andrzej Cińcio, grudzień 2021