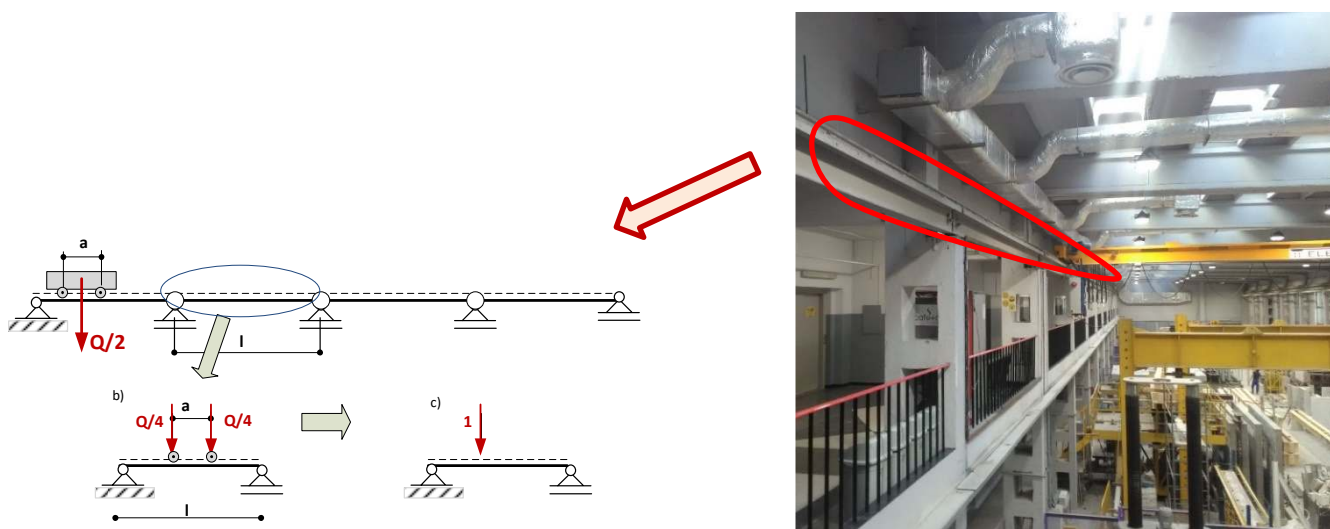


Wyznaczanie linii wpływu w ustrojach statycznie wyznaczalnych. Obwiednia obciążeń ruchomych Materiały pomocnicze dla studentów Wydziału Budownictwa

1. Wprowadzenie

Szczególnym przypadkiem w projektowaniu układów konstrukcyjnych są ustroje z obciążeniem ruchomym. Zwykle obciążenia ruchome kojarzymy z typowymi obciążeniami konstrukcji mostowych, w postaci obciążenia taborem komunikacyjnym; jednak obciążenia zmieniające swoje położenie występują również w innych konstrukcjach. Przykładowo w budownictwie przemysłowym, obciążenie wynikające z poruszającej się suwnicy lub wyciągarki, stanowi obciążenie ruchome przekazywane przez jej pomost na belkę podsuwnicową, a następnie na słup konstrukcji hali. Nie jest to prosty przypadek obciążenia do uwzględnienia w projekcie, zwłaszcza gdy w obiekcie funkcjonuje więcej niż jedna suwnica jednocześnie. Często projektuje się belki podsuwnicowe jako żelbetowe, wieloprzęsłowe, statycznie wyznaczalne ustroje prętowe, oparte na słupach hali, czyli o schemacie jak na rys. 1. Zatem do prawidłowego zaprojektowania przekroju belek niezbędne jest sporządzenie obwiedni obciążeń ruchomych pojedynczej belki swobodnie podpartej. Natomiast do wykonania tego wykresu niezbędne jest wcześniejsze wyznaczenie linii wpływu (linii wpływowych).

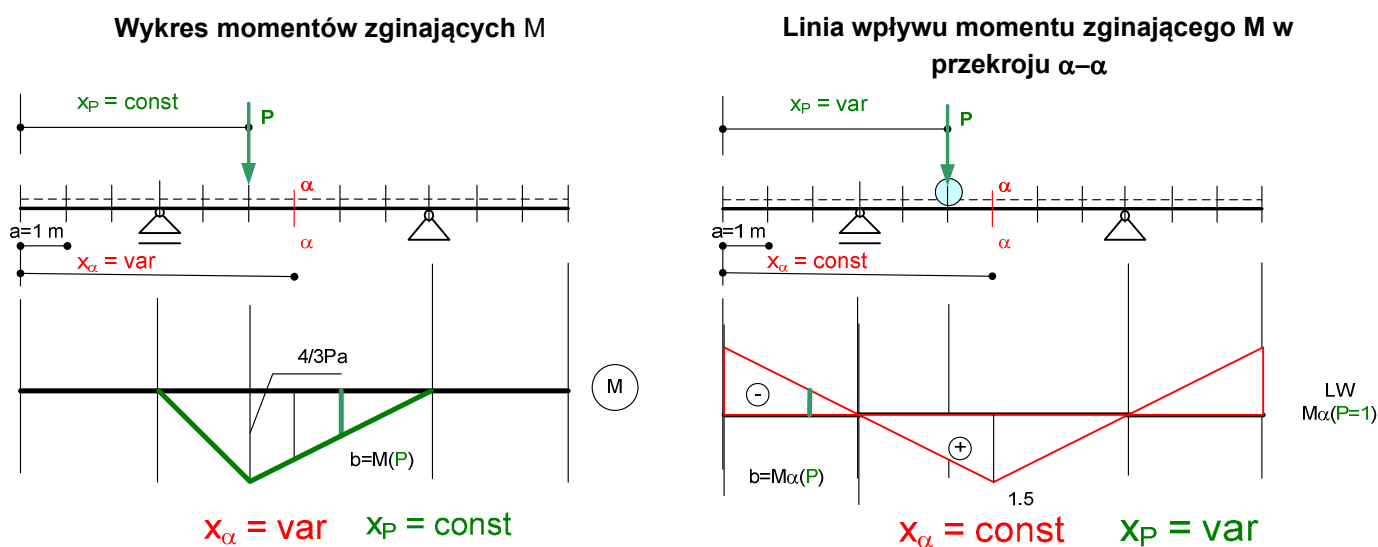


Rys.. 1. Po prawej: hala laboratorium Wydziału Budownictwa z widoczną belką podsuwnicową wyciągarki, po lewej: schemat statyczny tej belki podsuwnicowej jako układ belek swobodnie podpartych na słupach hali (Q -całkowity ciężar suwnicy wraz z dopuszczalnym jej udźwigiem), zdjęcie własne

2. Pojęcie linii wpływu oraz sposoby jej wyznaczania

Linia wpływu (ozn. LW) - przedstawia wykres zmiany zadanej wielkości geometrycznej (np. ugięcie) lub wielkości statycznej (reakcja, moment zginający, siła poprzeczna lub osiowa w przyjętym przekroju) w zależności od położenia na ustroju obciążenia ruchomego w postaci pojedynczej, jednostkowej, pionowej siły skupionej $P=1$.

Istotne jest aby rozróżnić wykres przedstawiający linie wpływu od wykresu sił przekrojowych, które studenci wyznaczają w trakcie studiów na Wydz. Budownictwa od pierwszego semestru zajęć z mechaniki. Poniżej na rys.2 przedstawiono różnicę pomiędzy wykresem momentów zginających (po lewej) oraz linią wpływu momentu zginającego, w pojedynczym wybranym przekroju $\alpha-\alpha$. Różnicę przedstawia interpretacja rzędnych wykresu. Rzędna wykresu momentów zginających o wartości „b” (pokazana na rys. 2) wyraża wartość momentu zginającego w przekroju belki, w miejscu odłożenia tej rzędnej. Natomiast rzędną „b” wykresu linii wpływu (rys.2) należy interpretować jako wartość momentu zginającego w obranym, niezmiennym przekroju $\alpha-\alpha$, dla położenia obciążenia ruchomego w miejscu odłożenia tej rzędnej (inaczej „nad rzędną”). W tym przypadku położenie obranego przekroju $\alpha-\alpha$ jest niezmienne, zmienia się natomiast położenie obciążenia jednostkowego. Natomiast w przypadku wykresu momentów zginających jest przeciwnie: obciążenie ma niezmienne położenie, zaś wykres wykonujemy dla kolejnych, zmiennych co do położenia przekrojów belki.



Rys. 2. Interpretacja rzędnej wykresu momentów zginających i rzędnej linii wpływu momentu w przekroju $\alpha-\alpha$

Istnieją następujące sposoby wyznaczania wykresów linii wpływu:

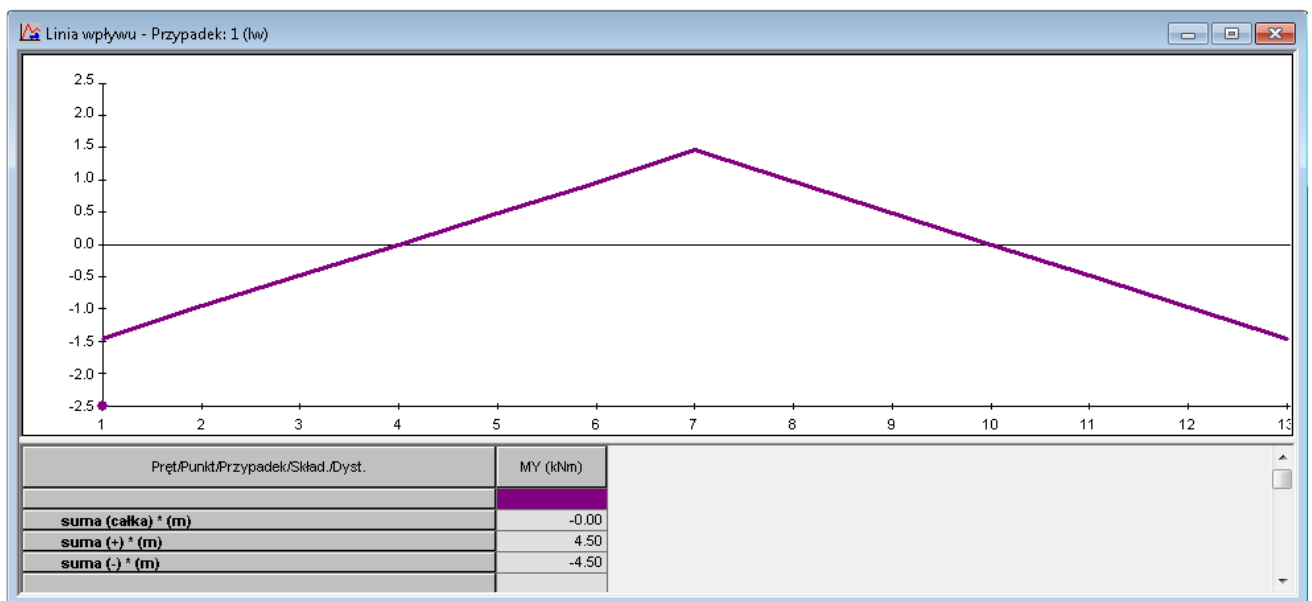
- sposób statyczny** (na podstawie równań równowagi dla uzmiennionego położenia siły ruchomej)
- sposób kinematyczny** (zwykle stosowany dla kontroli kształtu LW),
- sposób stosowany w programach komputerowych**, w których LW sporządzana jest na podstawie serii rozwiązań statycznych, dla obciążenia ruchomego zatrzymanego w kolejnych, dyskretnie obranych położeniach na ustroju.

W ramach projektu z mechaniki budowli należy stosować pierwszy wymienionych sposobów, przy czym zwykle nie określa się za każdym razem równań równowagi, potrzebnych do wyznaczenia kształtu LW, lecz korzysta się z wyznaczonych elementarnych rozwiązań LW dla ustrojów prostych. Przedstawiono to w dalszej części artykułu.

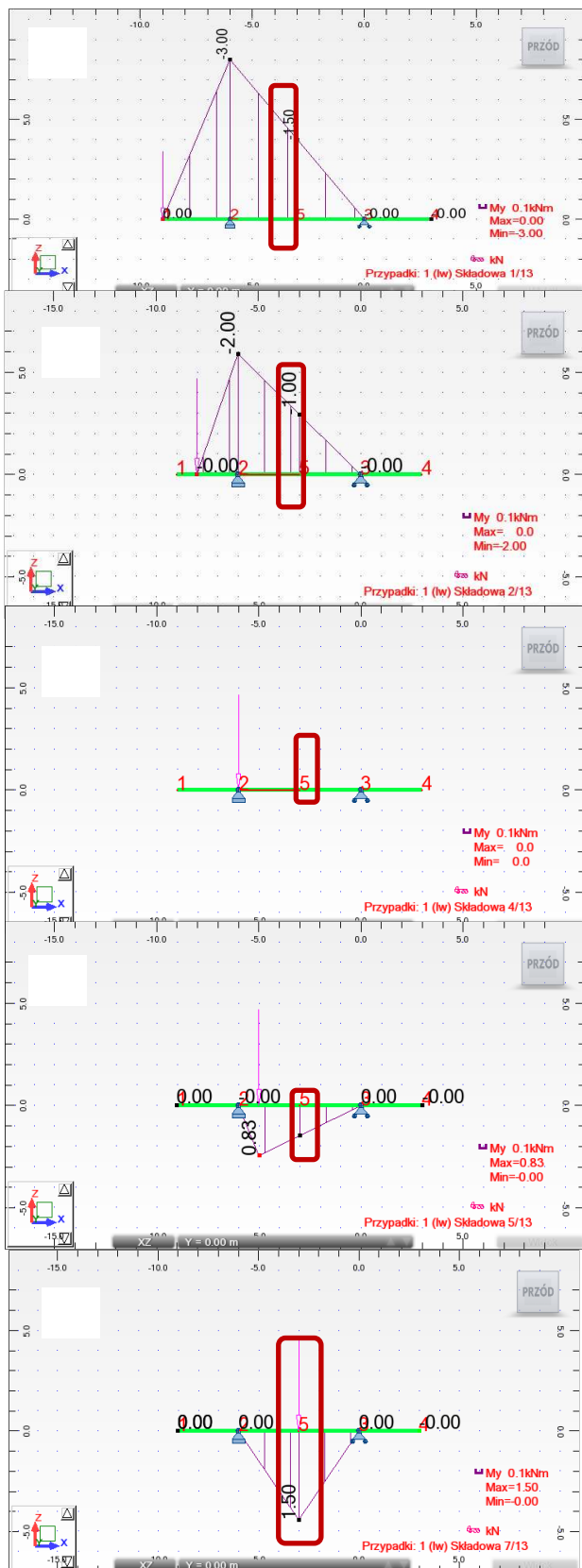
Dla lepszego zrozumienia pojęcia LW na rys.3b przedstawiono sposób wyznaczania Lw dla belki swobodnie podpartej ze wspornikami (rys. 2) w programie *Robot Structural Analysis*, bazujący na rozwiązaniu szeregu zadań pomocniczych. Każde z nich wykonywane jest dla obciążenia w postaci pojedynczej, jednostkowej siły skupionej, zatrzymanej w obranym, dyskretnym miejscu na ustroju. W programie użytkownik definiuje liczbę takich rozwiązań składowych, podając co ile metrów ma być zatrzymywane obciążenie ruchome do wyznaczenia rozwiązania. W przykładzie na rys. 3b poszukujemy Lw momentu zginającego $M_{\alpha-\alpha}$ w przekroju w osi symetrii belki, przyjmując dyskretyzację położenia obciążenia ruchomego co 1 m. Dla każdego z rozwiązań składowych odczytujemy wartość momentu zginającego w przyjętym przekroju $\alpha-\alpha$ i zestawiamy ją w tabeli na rys. 3b. Wartości te stanowią rzędne wykresu Lw M_{α} , odpowiednio odkładane w miejscach zatrzymania obciążenia ruchomego. Na rys. 3b przedstawiono jedynie pięć składowych rozwiązań oznaczonych numerami 1, 2, 4, 5, 7, natomiast wyznaczoną w programie linię wpływu pokazano na rys. 3a

Jak można zauważyć, zaprezentowana na rys. 3b linia wpływu składa się z dwóch gałęzi, z których każda określona jest funkcją liniową. Nie jest to przypadek. Istotnie, jak można wykazać, linie wpływu wielkości statycznych dla ustrojów statycznie wyznaczalnych, zbudowane są w pewnych przedziałach z funkcji co najwyżej liniowo-zmiennymi. Linia wpływu dla układów statycznie wyznaczalnych jest bowiem liniową funkcją położenia siły jednostkowej, dla danej tarczy kinematycznej, reprezentującej całość lub część ustroju przeciętą przekrojem.

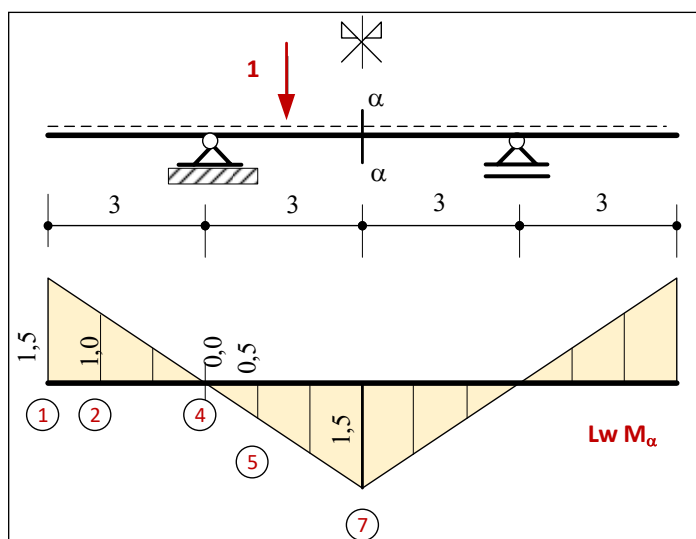
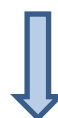
Sporządzenie Lw dla ustrojów statycznie niewyznaczalnych jest trudniejsze, bowiem Lw określone są funkcjami nieliniowymi zależnymi od linii wpływu ugięcia ustroju.



Rys. 3a Wyznaczona linia wpływu M_{α} w programie Robot dla belki z rys. 3b, przy dyskretyzacji położenia obciążenia ruchomego co 1 m



l_p	x m	M_α kNm
1	0	-1.50
2	1	-1.00
3	2	-0.50
4	3	0.00
5	4	0.50
6	5	1.00
7	6	1.50
8	7	1.00
9	8	0.50
10	9	0.00
11	10	-0.50
12	11	-1.00
13	12	-1.50



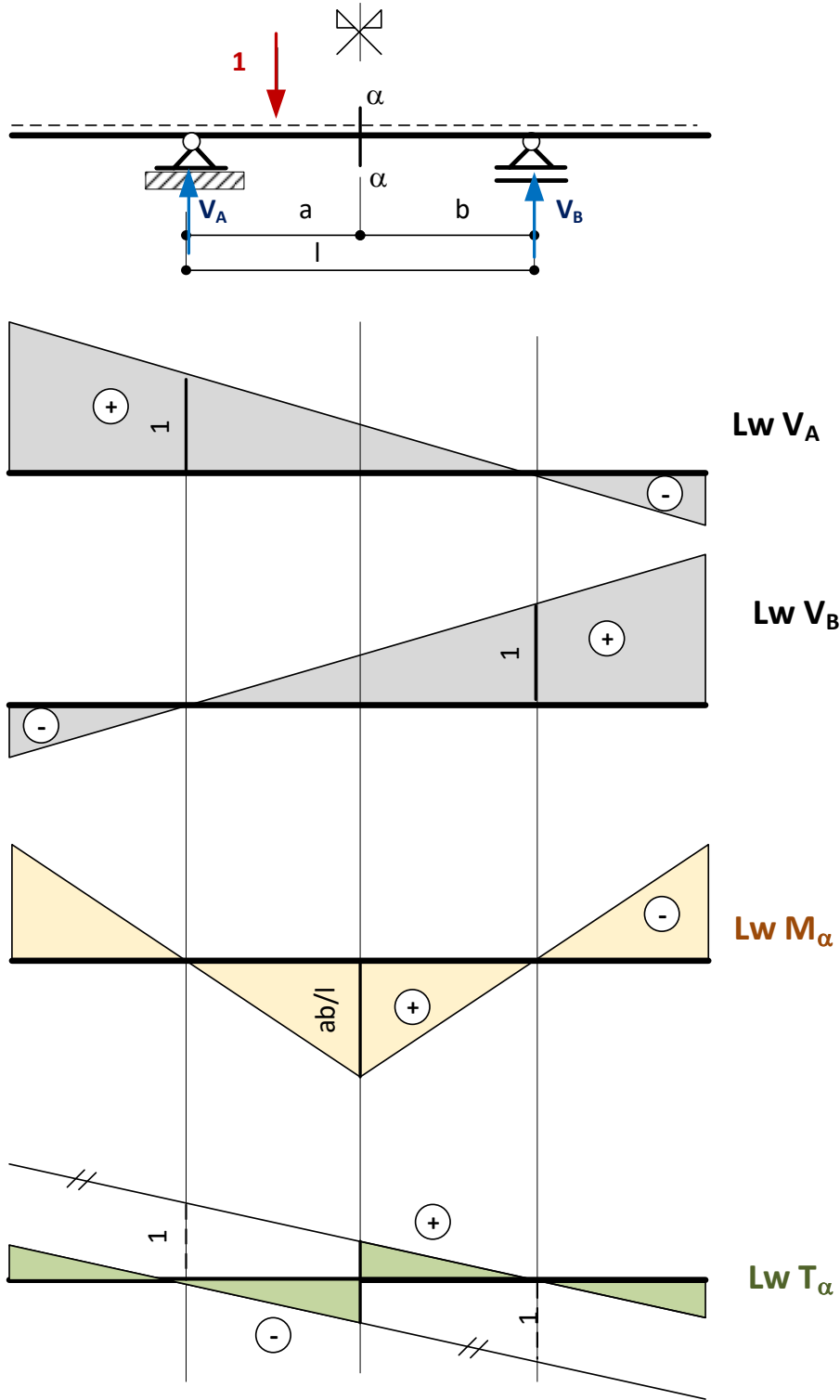
Rys. 3b. Wyznaczanie linii wpływu M_α w programie Robot na podstawie elementarnych rozwiązań statycznych, dla obciążenia ruchomego zatrzymanego w dyskretnych położeniach na ustroju. Na rys. podano jedynie pięć rozwiązań składowych (oznaczonych: 1, 2, 4, 5, 7)

3. Linie wpływu dla belek prostych

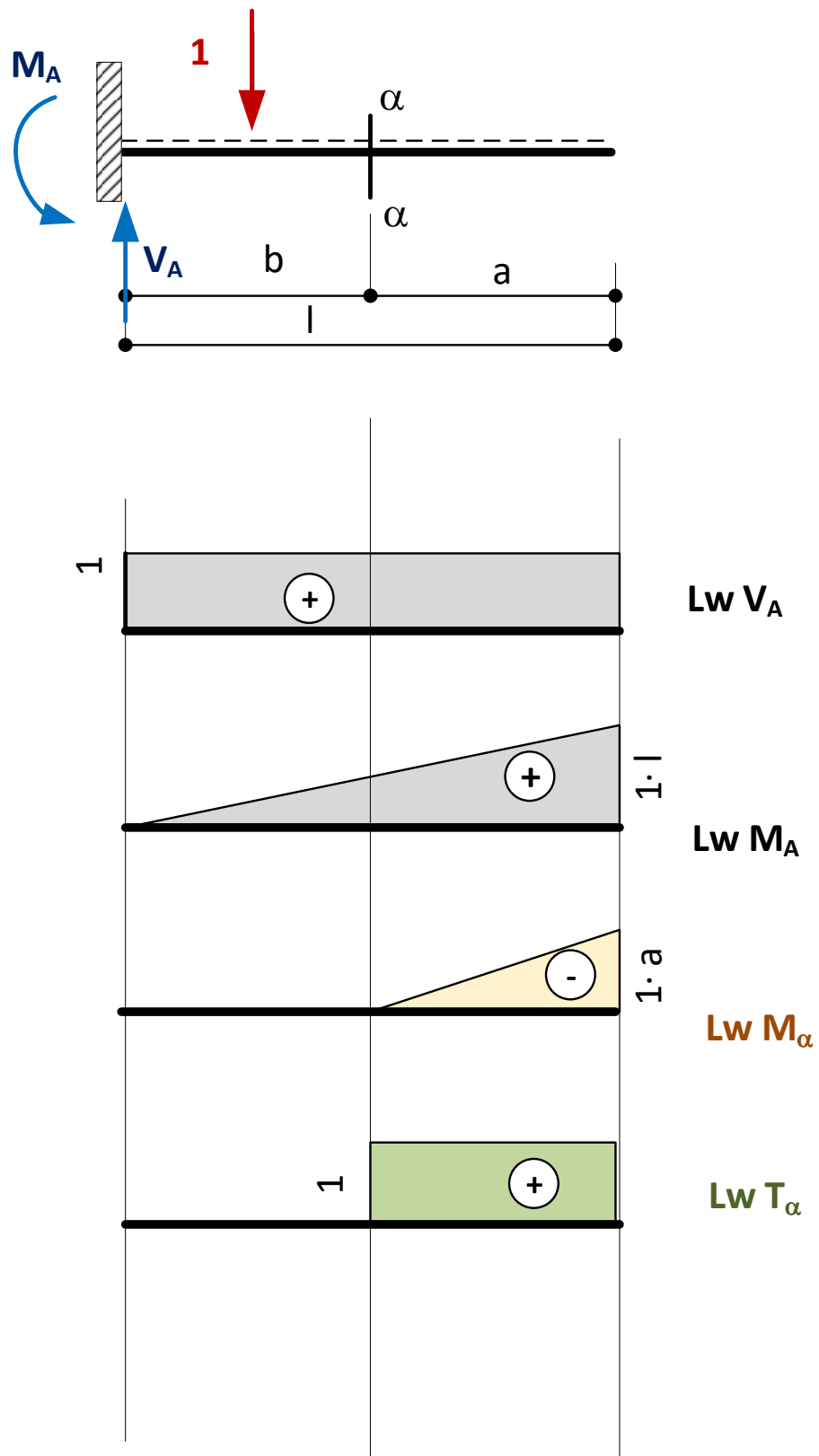
Jak wcześniej wspomniano, w ramach zajęć mechaniki budowli studenci wykonują linie wpływu ustrojów prętowych statycznie wyznaczalnych metodą statyczną, w sposób uproszczony, bez każdorazowego określania równań równowagi. W tym przypadku niezbędna jest znajomość Lw belek prostych oraz umiejętność rozkładu ustroju złożonego na ustroje proste, zgodnie z jego budową kinematyczną.

Na rys. 4 przedstawione (bez wyprowadzenia) Lw dla belki statycznie wyznaczalnej ze wspornikami, natomiast na rys. 4 Lw dla belki wspornikowej. Oprócz Lw reakcji podano także wykresy linii wpływu momentu zginającego i siły przekrojowej w zadanych przekrojach. Wykresy Lw momentu zginającego znakuje podobnie jak wykres momentu zginającego, przyjmując włókna wyróżnione w części dolnej pręta, których rozciąganie określa znak plus. Zaleca się także odkładanie rzędnych po stronie włókien rozciąganych (choć nie jest to regułą). Podobnie znakuje się Lw sił tnących, tak jak znakuje się siły tnące w mechanice (prawoskrętna siła tnąca jest dodatnia). Znak dodatni na wykresie Lw reakcji oznacza, że zwrot reakcji jest taki, jak zaznaczono na schemacie statycznym.

Jak można zauważyć, w przypadku ustroju belkowego, w miejscu występowania podpór w wykresie Lw występuje rzędna zerowa Lw, co w przypadku Lw sporządzanej metodą kinematyczną, odpowiada w planie przemieszczeń występowaniu tzw. bieguna głównego. Z kolei w miejscu zadanego przekroju Lw (np. przekroju $\alpha-\alpha$), gdzie zlokalizowany jest w planie przemieszczeń tzw. biegun względny, w wykresie Lw odpowiada to załamowi (patrz - Lw M_α) lub uskokowi (patrz - Lw T_α). Natomiast Lw reakcji są jednogąteźiowe, z rzędną równą jeden w miejscu podpory wyznaczanej Lw reakcji oraz rzędną zerową na podporze sąsiedniej (rys.4) .



Rys. 4. Linie wpływu dla belki swobodnie podpartej ze wspornikami



Rys. 5. Linie wpływu dla belki wspornikowej

4. Linie wpływu dla belek złożonych

Linie wpływu ustrojów złożonych można sporządzić dokonując odpowiedniego ich rozkładu na ustroje proste, a następnie wykorzystując rozwiązanie Lw dla belek prostych podane w poprzednim rozdziale. Niezmiernie istotne jest właściwe rozdzielenie budowy ustroju, tj. wyróżnienie części podstawowej i wszystkich części podrzędnych w odpowiedniej kolejności hierarchicznej. Przykładowo pokazany na rys. 6 ustrój ma część podstawową w postaci belki swobodnie podpartej ABC oraz część drugorzędną CDE, na której dodatkowo opiera się część trzeciorzędna EF (Rys. 6a). Linie wpływu sporządzamy rozpoczynając od tej belki prostej, z którą związana jest poszukiwana Lw (nazwiemy ją częścią rozpatrywaną w pierwszej kolejności), uwzględniając jazdę po tej części ustroju złożonego (rys. 6b). W konstrukcji Lw pomocne są rozwiązania dla belek prostych pokazane na rys. 4 i 5.

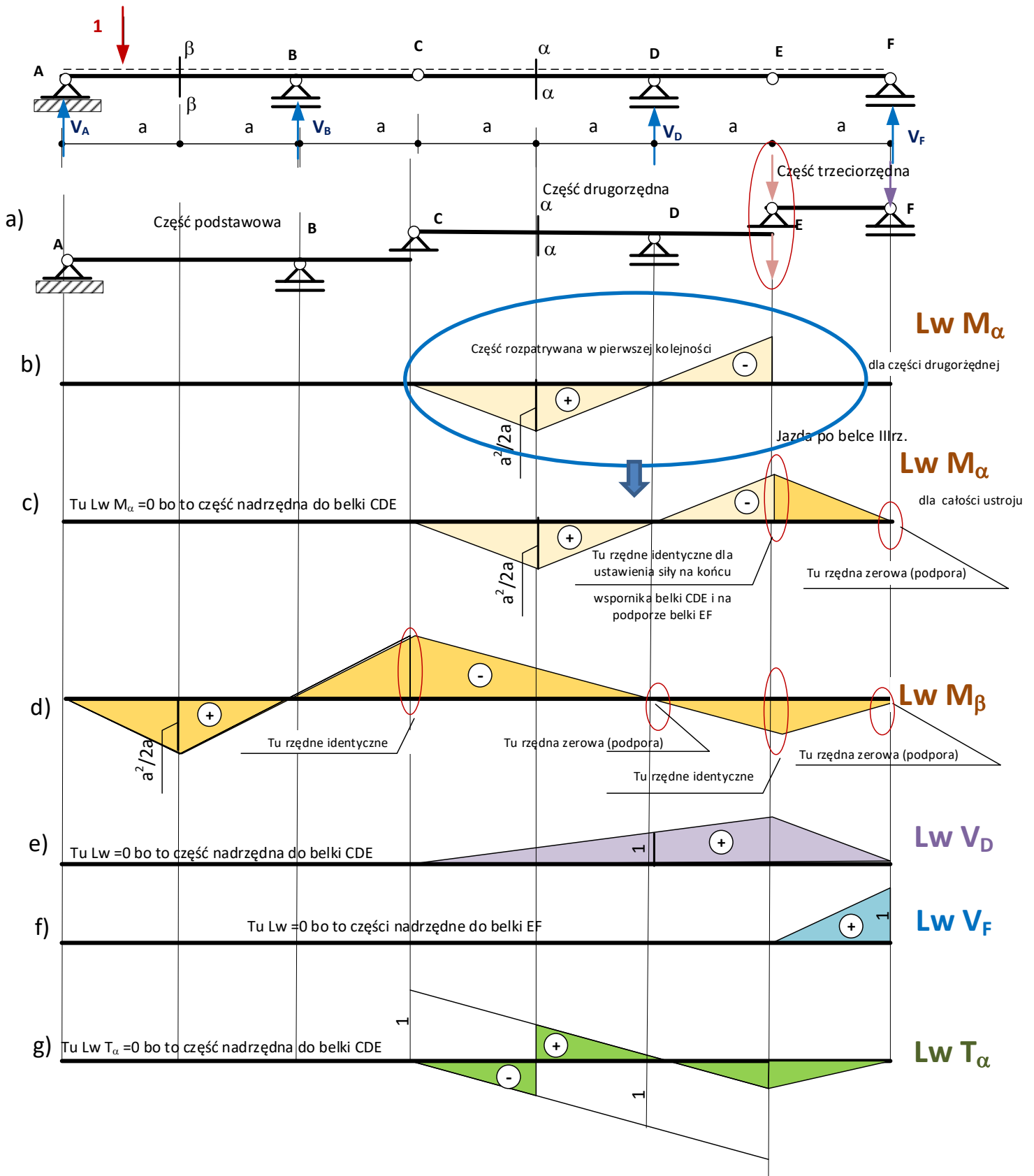
W dalszej kolejności uzupełniamy sporządzoną jw. Lw, uwzględniając jazdę po pozostałych częściach składowych ustroju złożonego. Pamiętajmy, że jazda po belce nadrzędnej w stosunku do belki rozpatrywanej, nie powoduje przekazania na nią oddziaływań, tzn. Lw na tym odcinku jest zerowa. Niezerowy przebieg Lw możemy otrzymać tylko dla przypadku jazdy po częściach podrzędnych, w stosunku do części rozpatrywanej. Wówczas konstrukcję tej Lw opieramy na podstawie dwóch charakterystycznych rzędnych:

- a) rzędnej na styku części rozpatrywanej i części podrzędnej, która jest identyczna dla obu części oraz
- b) rzędnej zerowej w miejscu występowania podpory w części podrzędnej.

Rzędne te łączymy odcinkiem prostym, otrzymując przebieg wykresu LW dla jazdy po belce podrzędnej. Pokazano to na rys. 6c.

Z kolei linie wpływu momentu zginającego w przekroju $\beta-\beta$ oraz analogiczna Lw siły tnącej (rys. 6d, g) dotyczą części podstawowej ustroju złożonego. Po wykonaniu Lw dla tej części (części rozpatrywanej), w sposób analogiczny do konstrukcji opisanej powyżej, przedłużamy linię wpływu na obie części podrzędne w stosunku do belki podstawowej.

Mając na względzie przedstawiony sposób budowy linii wpływu czytelnik nie powinien mieć problemu z budową Lw reakcji V_D i V_F . Pierwsza z nich dotyczy części drugorzędnej ustroju złożonego CDE (rys. 6f), zatem niezerowa linia wpływu obejmuje, oprócz tej części, także część trzeciorzędną EF. Druga natomiast Lw V_F dotyczy reakcji w części trzeciorzędnej, zatem niezerowa linia wpływu obejmuje tylko tę część (rys. 6g), wobec braku innych części podrzędnych belki EF.



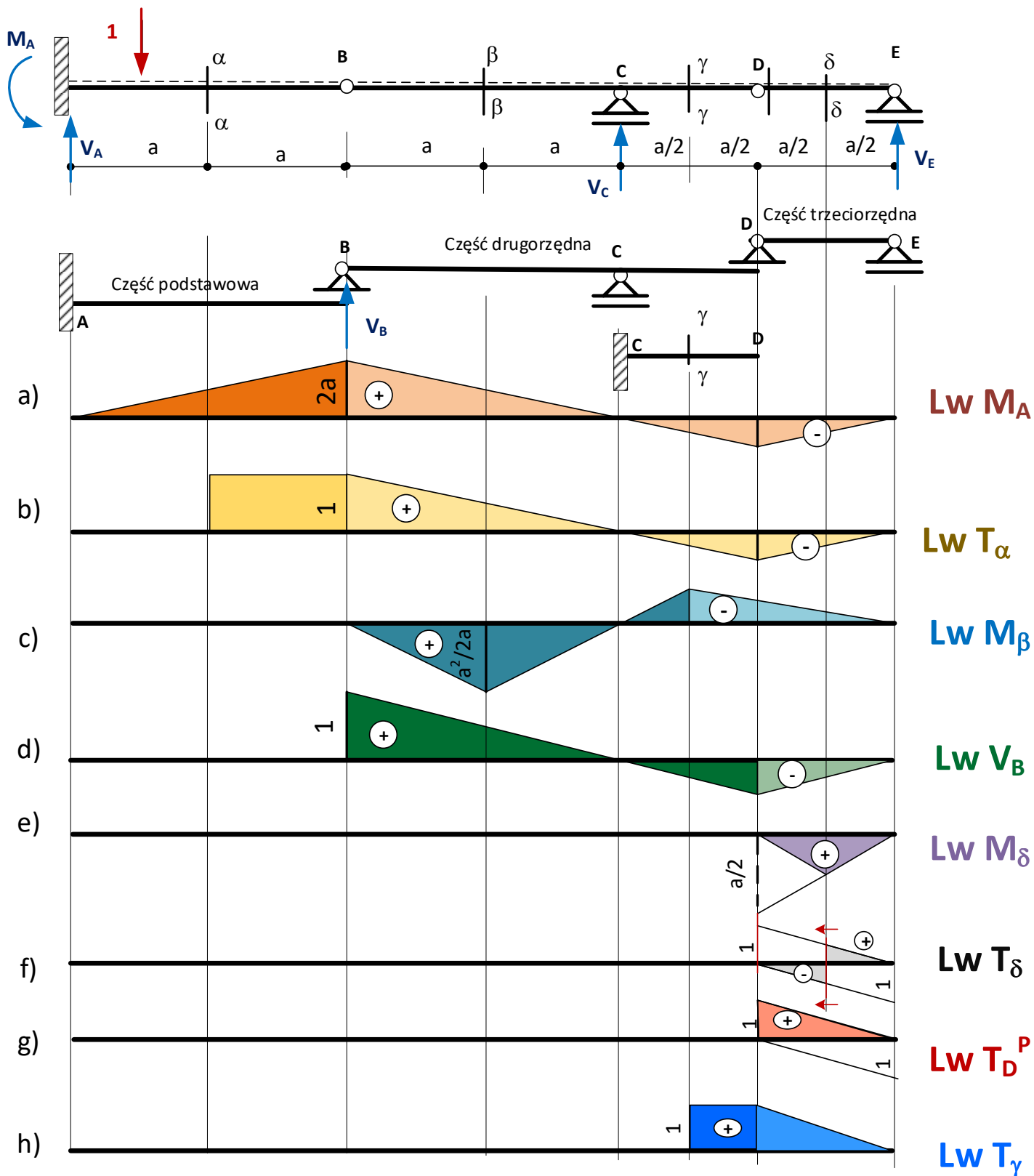
Rys. 6. Sposób sporządzania linii wpływu M_α dla belki złożonej: a) rozdział na belki proste, b) sporządzenie zadanej Lw dla belki związanej z zadaniem przekrojem $\alpha-\alpha$, c) uwzględnienie jazdy po części nadrzędnej i części podrzędnej rozpatrywanej części belki b), d) do g) pozostałe linie wpływu

Kolejny ustrój złożony (rys. 7) składa się z części podstawowej w postaci wspornika AB, części drugorzędnej BCD i części trzeciorzędnej DF- w postaci belek swobodnie podpartych. Wykonując linie wpływu wielkości należącej do części podstawowej korzystamy z przedstawionych na rys. 5 Lw dla belki wspornikowej, przedłużając ją w sposób podany powyżej na części podrzędne. Natomiast sporządzając Lw dla części drugorzędnej posługujemy się wyprowadzonymi Lw dla belki swobodnie podpartej (rys. 4), przedłużając Lw na część trzeciorzędną. Z kolei Lw wielkości statycznej dla belki trzeciorzędnej, sporządzana tak jak dla belki swobodnie podpartej, jest niezerowa tylko w tej części. Nie ma bowiem części podrzędnych ustroju w stosunku do części trzeciorzędnej, a jazda po części drugorzędnej BCD i podstawowej AB, jako relatywnie nadrzędnych nie obciąża belki EF.

Uważny czytelnik z pewnością zauważy podobieństwo przebiegu linii wpływu dotyczących tej samej belki prostej, w jej częściach podrzędnych (np. rys. 7a i 7b - w części BCDE, 7c i 7d – w części DE), zależną jedynie od budowy części podrzędnych.

Dodatkowego komentarza wymaga linia wpływu przedstawiona na rys. 7g, czyli linia wpływu siły tnącej po lewej stronie przegubu D. Ponieważ linia wpływu siły tnącej w miejscu przekroju jest nieciągła (skok o wartość 1), poszukiwaną linie wpływu sporządzimy na podstawie Lw siły tnącej w przekroju $\delta-\delta$, dokonując tzw przejścia granicznego z podanego przekroju, do przekroju po stronie prawej podpory D (zaznaczone czerwonymi strzałkami na rys. 6f). Otrzymujemy w ten sposób poszukiwaną linie wpływu pokazaną na kolejnym rys. 7g.

Należy także zwrócić uwagę na Lw pokazaną na rys.7h przedstawiającą linie wpływu siły tnącej w przekroju $\gamma-\gamma$. Przekrój ten znajduje się na wsporniku belki podrzędnej BCD, dlatego przy jej wykonaniu należy wzorować się na linii wpływu siły tnącej belki wspornikowej pokazanej na rys. 5.



Rys. 7. Linie wpływu dla ustroju złożonego, którego część podstawowa jest belką wspornikową (opis w tekście)

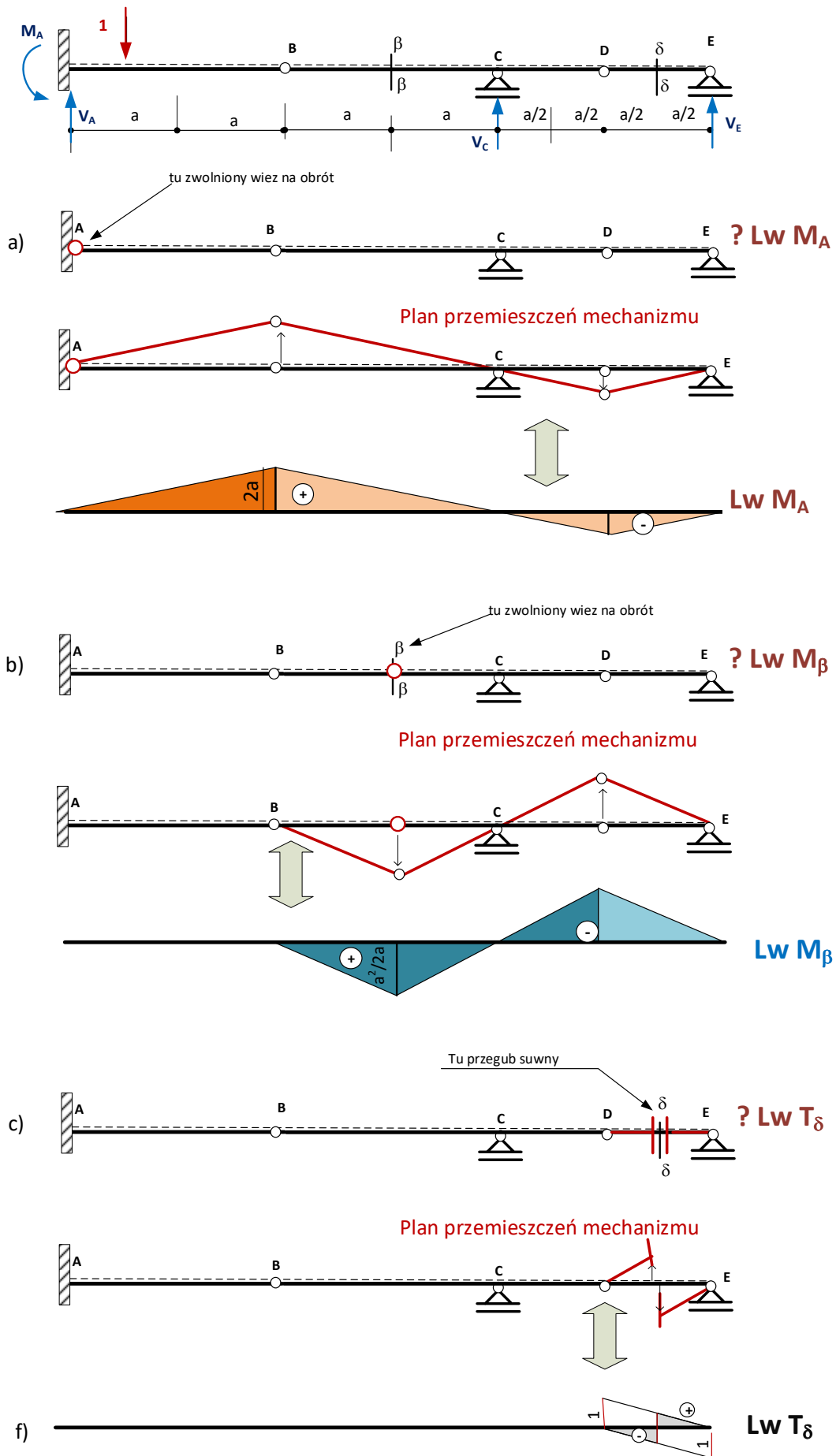
5. Kontrola kształtu linii wpływu na podstawie metody kinematycznej

Drugim wymienionym sposobem sporządzania Lw jest sposób kinematyczny. Pozwala on w prosty sposób określić kształt linii wpływu. Nieco trudniej wyznacza się rzędne linii wpływu, bowiem wymaga skorzystania z metod energetycznych wykorzystując zasadę wzajemności reakcji i przemieszczeń (Rayleigha) oraz zasadę wzajemności przemieszczeń (Maxwella). Metoda kinematyczna jednak doskonale sprawdza się dla celu kontroli poprawności kształtu Lw sporządzonej metodą statyczną.

Tok postępowania przy wyznaczaniu kształtu Lw metodą kinematyczną jest prosty:

- 1) przekształcamy zadany ustrój w mechanizm o jednym stopniu swobody. Zwalniamy więc kinematyczny odpowiadający poszukiwanej wielkości Lw (tj. w przypadku poszukiwania Lw reakcji, zwalniamy więc jej odpowiadający, dla LW momentu zginającego w zadanym przekroju – wprowadzamy w tym miejscu przegub obrotowy, analogicznie poszukując lw siły tnącej - wprowadzamy przegub suwny zwalniający przemieszczenie prostopadłe do osi pręta etc.),
- 2) udzielamy wirtualnego przemieszczenia utworzonemu mechanizmowi, zgodnie z pozostałymi więzami, stosownie do jego budowy kinematycznej (dla bardziej skomplikowanych ustrojów niezbędne jest zbudowanie tzw. planu biegunów),
- 3) składowe przemieszczenia pionowego tego mechanizmu odpowiadają rzędnym poszukiwanej lw w pewnej skali, co z kolei powinno być zgodne z kształtem lw sporządzanej metodą statyczną.

Ilustracją w/w algorytmu jest rys.8, na którym zamieszczono konstrukcję trzech linii wpływu wykonane metodą kinematyczną: reakcji M_A w miejscu utwierdzenia belki podstawowej, momentu zginającego w przekroju β - β belki drugorzędnej, oraz siły tnącej w przekroju δ - δ belki trzeciorzędnej (odpowiednio rys. 8a, 8b i 8c). Pokazano jak należy przekształcić ustrój w stosowny mechanizm (zwalniane więzy wyróżniono w kolorze czerwonym), oraz przedstawiono plan przemieszczeń tego mechanizmu. Uzyskany kształt Lw metodą kinematyczną pokrywa się z przebiegiem Lw uzyskanym metodą statyczną, co potwierdza poprawność jej konstrukcji.

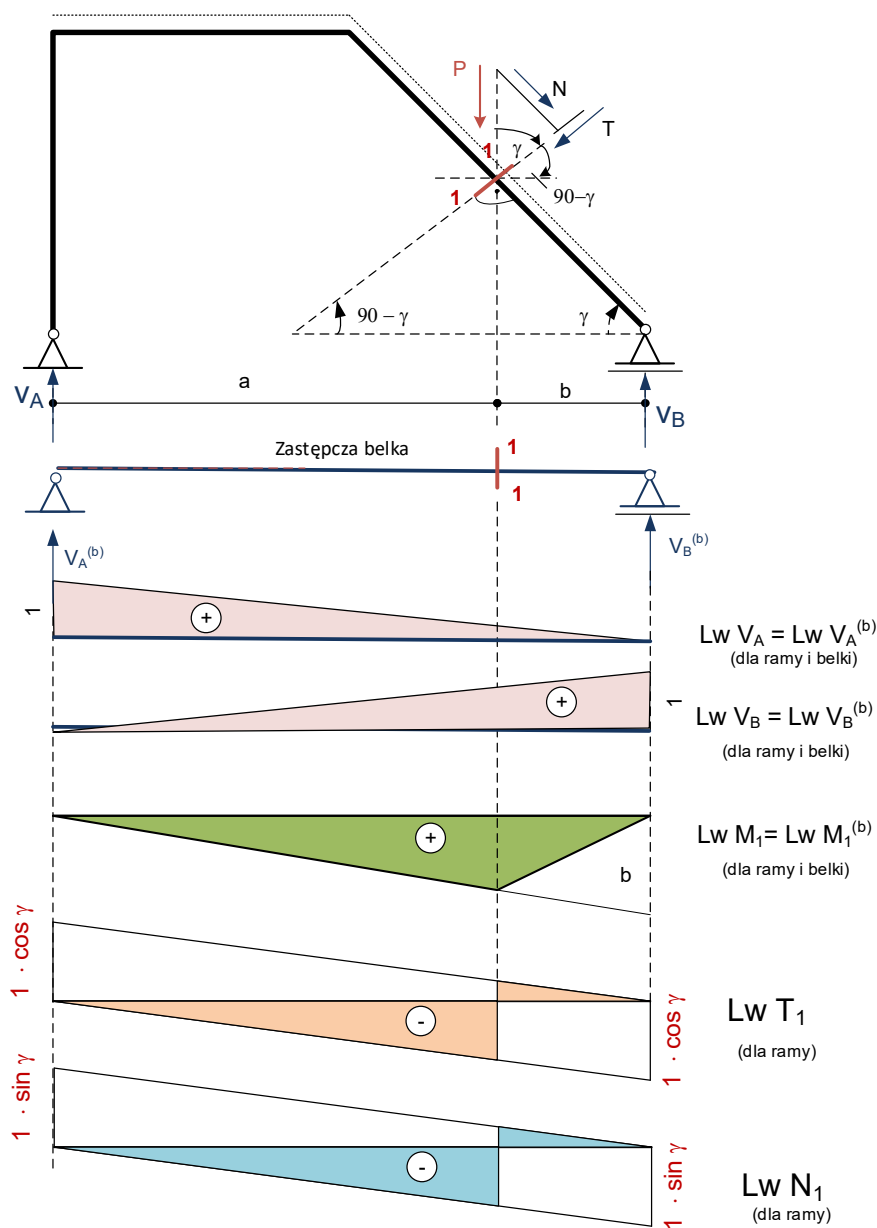


Rys. 8. Kontrola kształtu wybranych linii wpływu z rys. 7 za pomocą metody kinematycznej

6. Linie wpływu dla ustroju ramowego

W przypadku ustroju ramowego z prętami ukośnymi linie wpływu są inne w porównaniu z w/w Lw dla ustrojów belkowych. Nie dotyczy to jednak linii wpływu reakcji oraz linii wpływu momentu zginającego w przekroju, nawet jeżeli obrany przekrój dotyczy pręta ukośnego ramy (rys.9). W wymienionych przypadkach linie wpływu dla ramy i dla zastępczej belki, powstałej poprzez jej zrzutowanie na płaszczyznę poziomą, są identyczne.

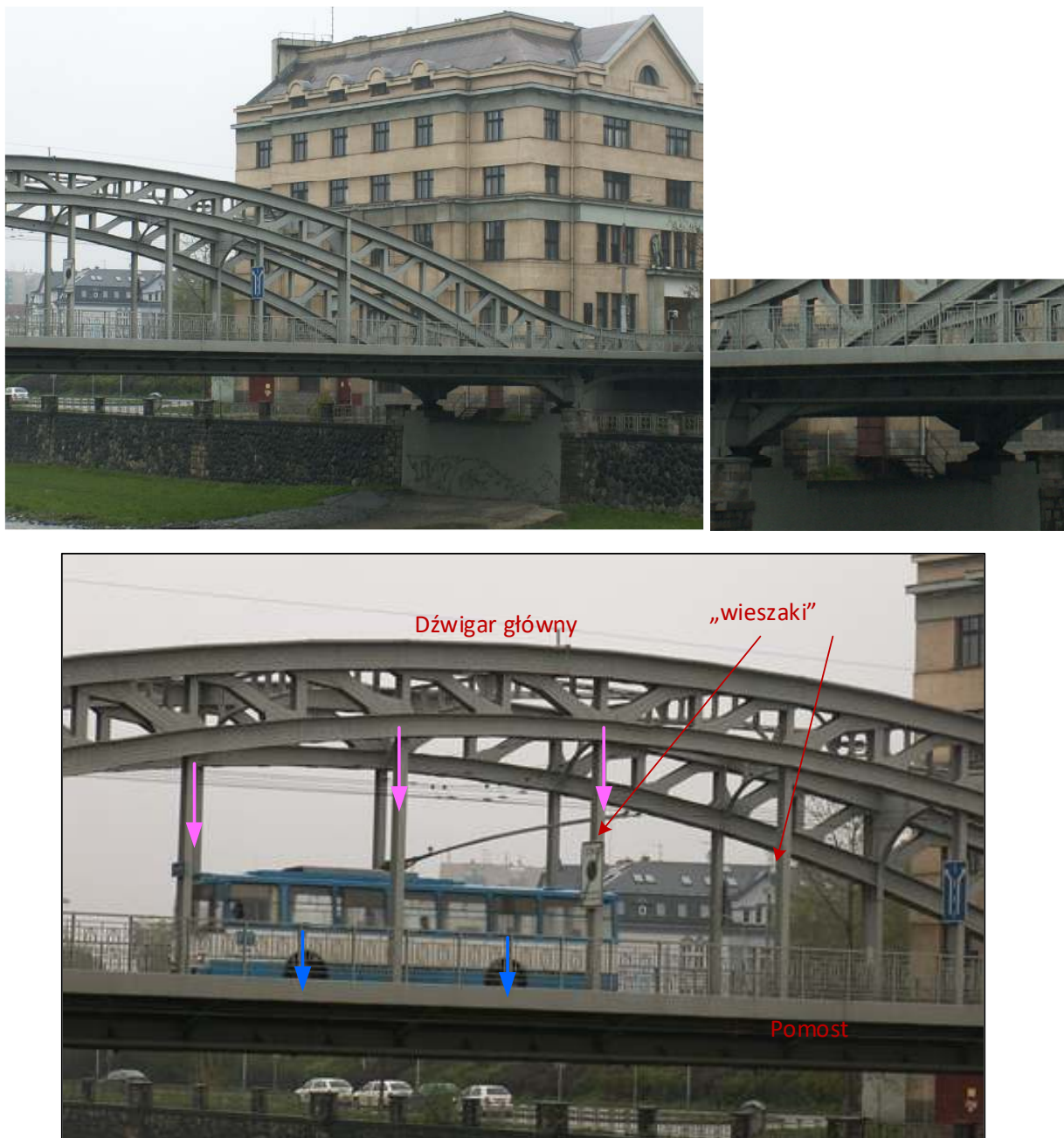
Linia wpływu siły tnącej w przekroju ukośnego pręta ramy ma kształt analogiczny do analogicznej linii wpływu dla zastępczej belki, zmieniają się jedynie rzędne, które należy przemnożyć poprzez cosinus kąta nachylenia pręta (rys.9). Dodatkowo w wymienionym przypadku istnieje niezerowa linia wpływu siły osiowej, o przebiegu jak Lw siły tnącej dla belki zastępczej, której rzędne należy przemnożyć przez sinus kąta nachylenia pręta (rys.9). Wynika z elementarnych równań równowagi oraz definicji sił przekrojowych, co pozostawia się czytelnikowi do sprawdzenia.



Rys. 9. Linie wpływu dla ustroju ramowego oraz zastępczej belki – porównanie

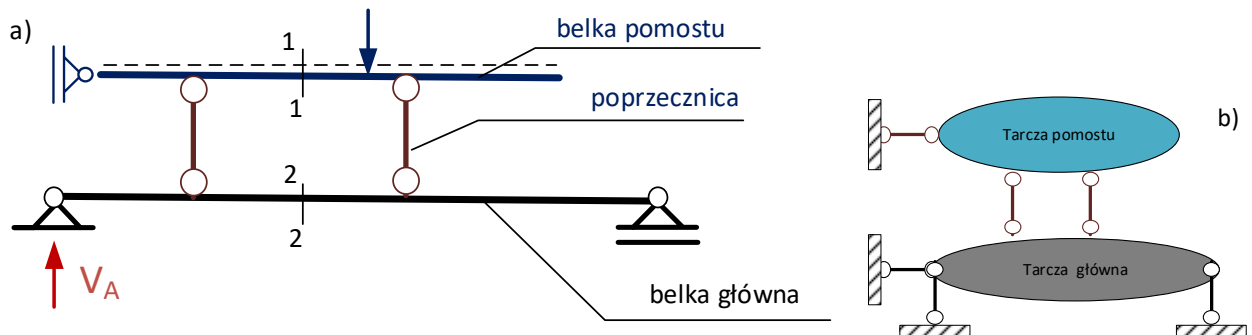
7. Linie wpływu dla ustrojów obciążonych pośrednio lub węzłowo

W budownictwie, zwłaszcza budownictwie mostowym, często mamy przypadek obciążenia pośredniego i/lub obciążenia węzłowego. Przykładowo na zdjęciu (rys. 10) przedstawiono most o konstrukcji nośnej w postaci łuku kratowego, do którego w części dolnej podwieszony jest pomost, po którym odbywa się ruch taboru (przypadek jazdy dołem). Obciążenie użytkowe z pomostu przekazywane jest za pomocą prętów pionowych - wieszaków (w schematach statycznych L_w takie „wieszaki” określane są jako „poprzecznice” – na wzór stalowego mostu otwartego) na węzły łukowego dźwigara kratowego w górnej części mostu. Most na mapach Google można odnaleźć tutaj: <https://goo.gl/maps/JiTIN9c7xj7CWWhvP6>



Rys. 10. Przykład obciążenia pośredniego i węzłowego. Most nad Ostrawicą w śląskiej Ostrawie z pomostem dolnym podwieszonym do kratowego dźwigara łukowego (zdjęcia własne)

Na kolejnym rysunku (rys.11) przedstawiono uproszczony schemat statyczny ustroju obciążonego pośrednio, dla przypadku, gdy główny ustrój nośny znajduje się w części dolnej, a pomost podparty jest dwoma poprzecznicami, co odpowiada typowej konstrukcji stalowego mostu kolejowego otwartego – np. opisanego w artykule technicznym pt.: „*Rewitalizacja mostów kolejowych*”¹



Rys. 11 Schemat ustroju z obciążeniem pośrednim na pomoście (a) i jego budowa kinematyczna (b)

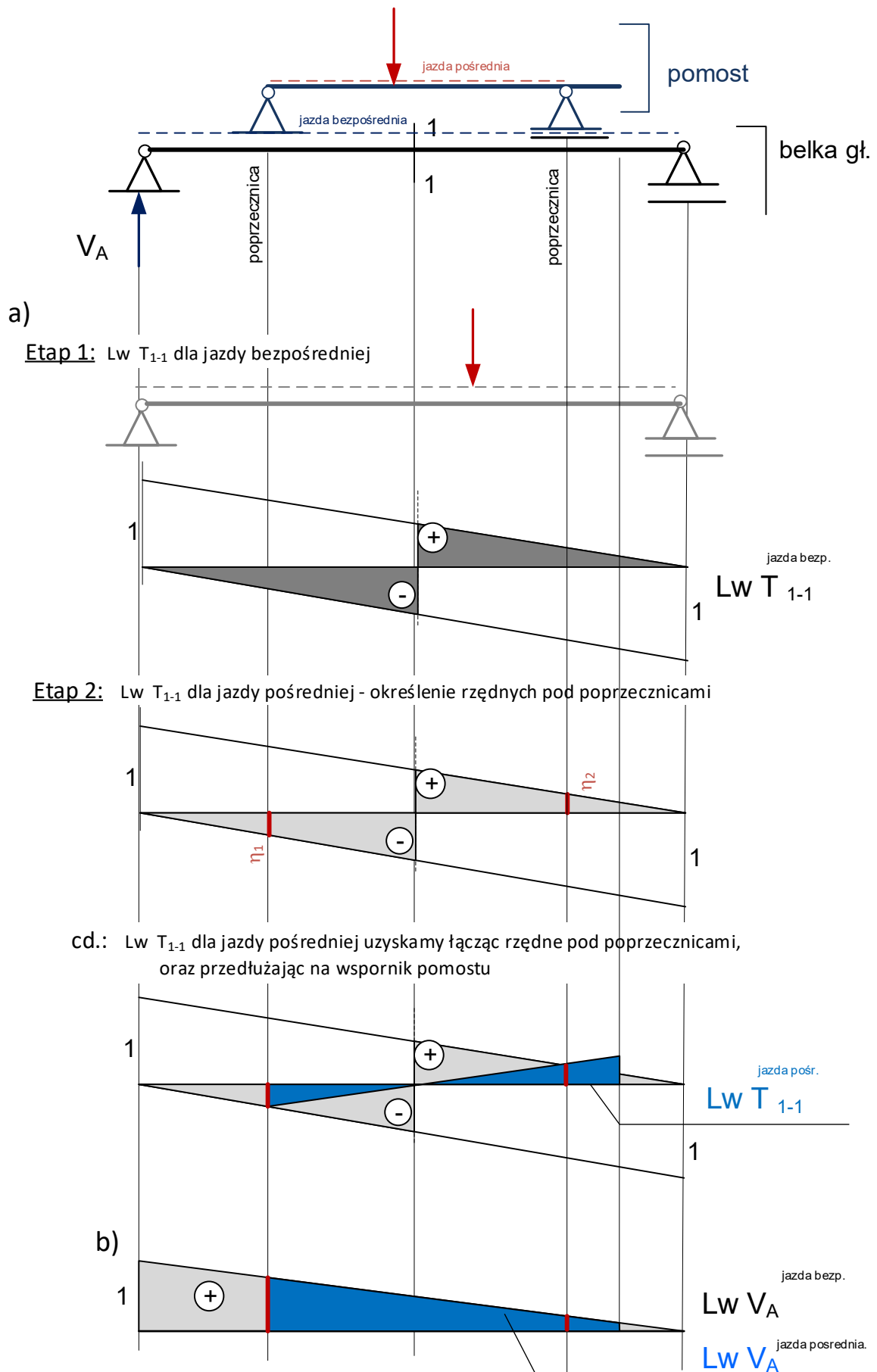
Dla ustroju obciążonego pośrednio, wyznaczanie L_w przebiega dwuetapowo: w pierwszej kolejności przyjmując tzw. jazdę bezpośrednią, a następnie zadaną jazdę pośrednią. Należy przy tym zaznaczyć, że przypadek jazdy pośredniej występuje jeżeli poszukiwana wielkość L_w dotyczy tej części ustroju, po którym bezpośrednio nie porusza się obciążenie ruchome. Dla ustroju na rys.6 byłyby to np. linie wpływu V_A, M_2, T_2 . Natomiast linie wpływu sił wewnętrznych w przekroju 1-1 sporządza się wyłącznie dla jazdy bezpośredniej, czyli w sposób pokazany w poprzednich rozdziałach.

Algorytm wyznaczania linii wpływu dla przypadku pośredniego obciążenia jest następujący:

- a) sporządzamy L_w dla przypadku jazdy bezpośredniej, „myślowo” odrzucając pomost i przenosząc obciążenie ruchome z pomostu na część główną,
- b) przenosimy obciążenie na pomost i dokonujemy modyfikacji wyznaczonej L_w korzystając z własności:
 - i. rzędne L_w w miejscu zrzutowania poprzecznicy, są identyczne dla przypadku jazdy bezpośredniej i pośredniej, bowiem skutek przyłożenia obc. na pomoście, w miejscu poprzeczniczy jest taki sam, jak przyłożenie tego obc. bezpośrednio na belce głównej w miejscu tej poprzeczniczy,
 - ii. rzędne L_w dla jazdy pośredniej na pomoście pomiędzy poprzecznicami, określone są funkcją liniową opartą na w/w dwóch rzędnych pod poprzecznicami,
- c) L_w dla jazdy pośredniej uzyskujemy odpowiednio łącząc odcinkami prostymi rzędne pod poprzecznicami, zgodnie z budową kinematyczną pomostu (możemy połączyć ze sobą tylko te rzędne pod poprzecznicami, które należą do tej samej tarczy kinematycznej - belki pomostu)

Algorytm ten zilustrowano na rys. 12, na przykładzie linii wpływu siły tnącej w przekroju 1-1 oraz reakcji V_A . W tym drugim przypadku linia wpływu dla jazdy pośredniej nie różni się kształtem do L_w dla jazdy bezpośredniej.

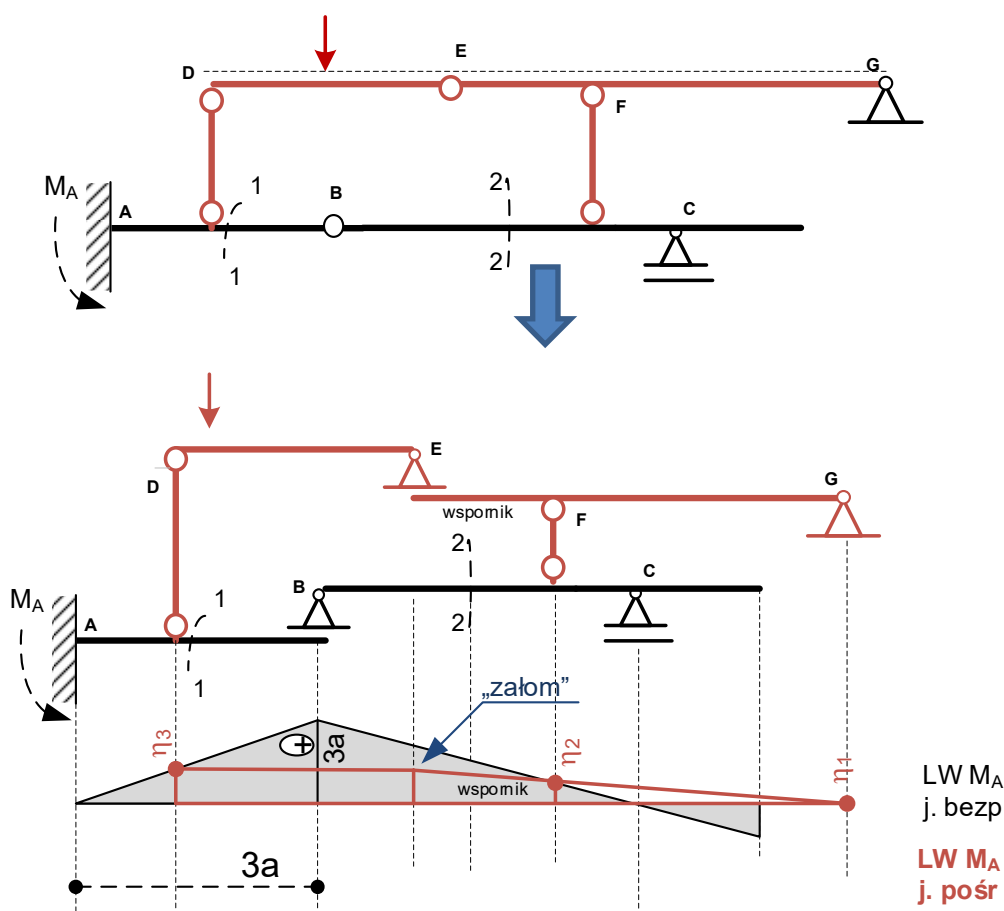
¹ – link: <http://inzynierbudownictwa.pl/rewitalizacja-mostow-kolejowych/>



Rys. 12. Ilustracja sposobu wyznaczania linii wpływu dla ustrojów obciążonych pośrednio

W przypadku ustroju złożonego, sporządzając wykresy linii wpływu należy dokonać rozkładu ustroju na części proste, tak jak powyżej pokazano w artykule. Dotyczy to także sytuacji, gdy pomost jest ustrojem złożonym. W tym przypadku przy konstruowaniu lw dla jazdy pośredniej, dokonując łączenia rzędnych pod poprzecznkami odcinkami prostymi należy kierować się hierarchią belek pomostu. Zaczynamy konstrukcję linii wpływu od jej gałęzi odpowiadającej belce podstawowej pomostu, dalej określamy gałąź Lw dla belki drugorzędnej, następnie trzeciorzędnej, etc. W miejscu przegubowego połączenia belek pomostu ze sobą, w linii wpływu może wystąpić załom, co uzasadniono na przykładzie kinematycznego sposobu wyznaczania linii wpływu w rozdz. 5.

Przykłady konstrukcji linii wpływu dla ustroju z pomostem złożonym i obciążeniem pośrednim pokazano na rys. 13. Ustrój ten składa się z części głównej, będącej ustrojem złożonym: z części podstawowej w postaci wspornika AB oraz drugorzędnej w postaci belki swobodnie podpartej BC. Z kolei pomost składa się z dwóch belek swobodnie podpartych, z których belka EFG (po stronie prawej) jest podstawową belką pomostu, natomiast belka DE jest częścią drugorzędną pomostu. Wyznaczono linie wpływu momentu utwierdzenia na podporze A (rys.13), siły tnącej w przekroju 1-1 (rys.14), oraz momentu zginającego w przekroju 2-2 (rys.15).

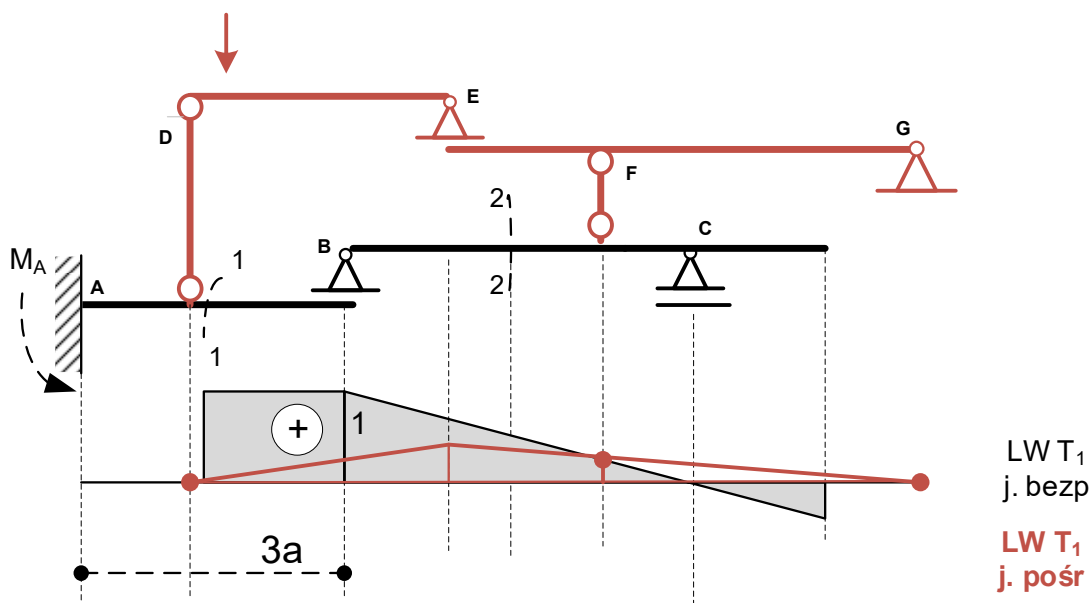


Rys. 13 Rozkład ustroju złożonego na proste oraz konstrukcja linii wpływu reakcji dla obciążenia pośredniego

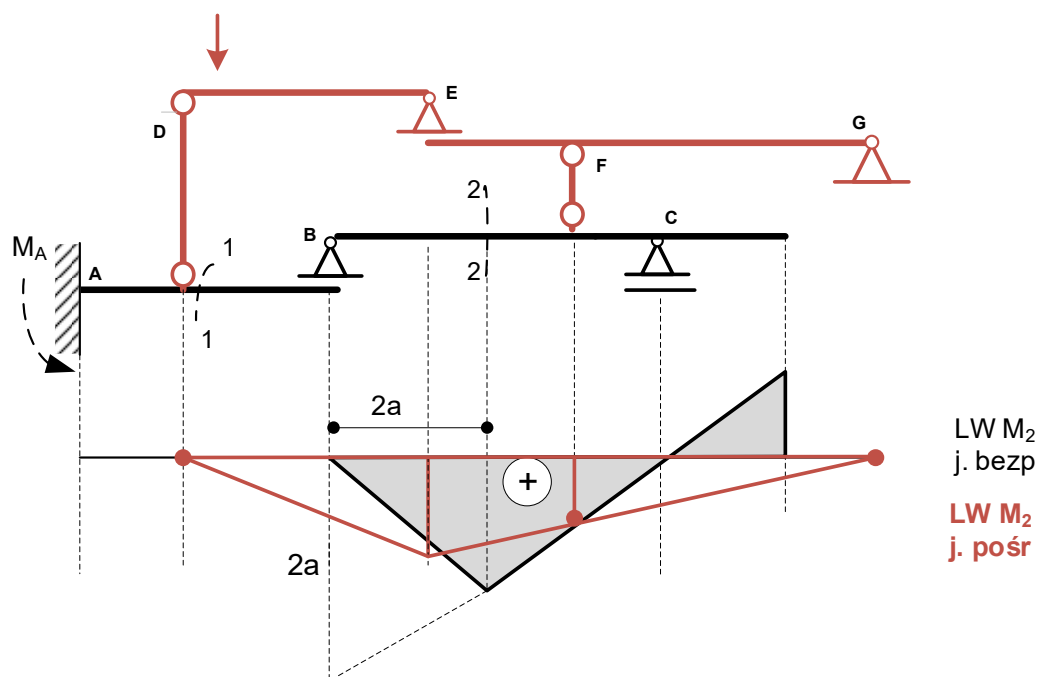
Dokonując modyfikacji linii wpływu momentu M_A dla jazdy bezpośredniej (rys. 13), posługujemy się trzema rzędnymi, z których rzędna η_2 i η_3 to rzędne pod poprzecznkami identyczne jak dla jazdy pośredniej, natomiast rzędna η_1 jest rzędną zerową, wynikającą z bezpośredniego podparcia pomostu o „podłoże” (obciążenie ruchome zatrzymane w tym miejscu wywoła jedynie reakcję na podporze G, nie obciążając ustroju). Konstruując linie wpływu dla jazdy pośredniej rozpoczynamy od części podstawowej pomostu łącząc rzędna η_2 i η_1 i przedłużając na wspornik tej belki, tj do punktu E. Następnie łączymy wspólną rzędną na styku belki podstawowej i

drugorzędnej pomostu z rzędną pod poprzecznicą η_3 (patrz zasada konstruowania lw dla belek złożonych – rozdz.3). Uzyskana lw dla jazdy pośredniej (rys. 13) posiada „załom” w miejscu przegubu E , oraz dwie gałęzie odpowiadające dwóm tarczom kinematycznym (belkom prostym pomostu) DE i EDG.

Na kolejnym rys. 14 przedstawiono konstrukcję linii wpływu siły tnącej w przekroju 1-1. Natomiast na rys. 15 konstrukcję lw momentu zginającego w przekroju 2-2 dla jazdy bezpośredniej i pośredniej. Sposób konstrukcji lw dla jazdy pośredniej jest analogiczny jak w przypadku lw z rys. 13, bowiem zależny jest jedynie od budowy ustroju, w tym hierarchii belek pomostu.



Rys. 14. Konstrukcja linii wpływu siły tnącej w przekroju 1-1 dla obciążenia pośredniego



Rys. 15. Konstrukcja linii wpływu momentu zginającego w przekroju 2-2 dla obciążenia pośredniego

8. Zastosowanie linii wpływu

Linia wpływu pozwala nie tylko na określenie wykresu zależności zadanej wielkości statycznej lub geometrycznej od położenia obciążenia jednostkowego na układzie, ale także może być wykorzystana do wyznaczenia szeregu ważnych wielkości. Na podstawie LW można bowiem:

- wyznaczyć wielkość statyczną (reakcję, MTN w przekroju) dla obciążenia jednostkowego siłą skupioną, zatrzymaną w dowolnym miejscu na ustroju
- podobnie jw. ale dla obciążenia dowolnego: grupą sił, obciążeniem rozłożonym, momentem skupionym, etc.
- wyznaczyć ekstremalne wartości statyczne określone w podpunkcie a) i b), tj. wartości odpowiadające najniekorzystniejszemu położeniu obciążenia ruchomego na ustroju; położenie to można wskazać,
- wyznaczyć obwiednię obciążeń ruchomych, która jest podstawą projektowania ustrojów z obciążeniem ruchomym.

Wyznaczanie wielkości statycznych z LW dla obciążenia grupą sił skupionych

Na rys 16 przedstawiono sposób wyznaczenia reakcji w miejscu utwierdzenia M_A części podstawowej belki złożonej, od wpływu nacisku kół pojazdu, wyrażoną w postaci dwóch sił skupionych P_1 i P_2 o rozstawie $a = 1\text{m}$. Wielkość statyczną dla obciążenia w postaci grupy sił z LW wyznaczamy wg wzoru (1) za pomocą sumy iloczynów wartości obciążenia przez odpowiednie rzędne w miejscach ustawienia sił skupionych.

$$\text{Poszukiwana_wielkość_statyczna} = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + \dots + P_n \cdot \eta_n = \sum_1^n P_i \cdot \eta_i \quad (1)$$

Rozważamy przejazd tego obciążenia po zadanym ustroju złożonym. Wyróżnimy charakterystyczne ustawienia pojazdu dające dodatni (zgodny z założonym zwrotem) moment utwierdzenia M_A oraz przeciwnie skierowany (dające moment utwierdzenia o wartości ujemnej). Zwykle poszukujemy także wartości ekstremalnych, odpowiadających najbardziej niekorzystnemu ustawieniu obciążenia na ustroju. Na rys. 16a przedstawiono położenie obciążenia ruchomego gdy siła P_1 znajduje się nad załomem LW (największą jej rzędną dodatnią), Wyznaczona zgodnie ze wzorem (1) wartość momentu utwierdzenia M_A wynosi:

$$M_A = P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot 2,25a = 20 \cdot 3a + 40 \cdot 2,25a = 150a \text{ [kNm]} \quad (2)$$

Z kolei dla ustawienia jak na rys. 16b, w którym siły P_1 i P_2 są symetrycznie ustawione względem największej rzędnej dodatniej LW M_A , daje wartość momentu utwierdzenia większą:

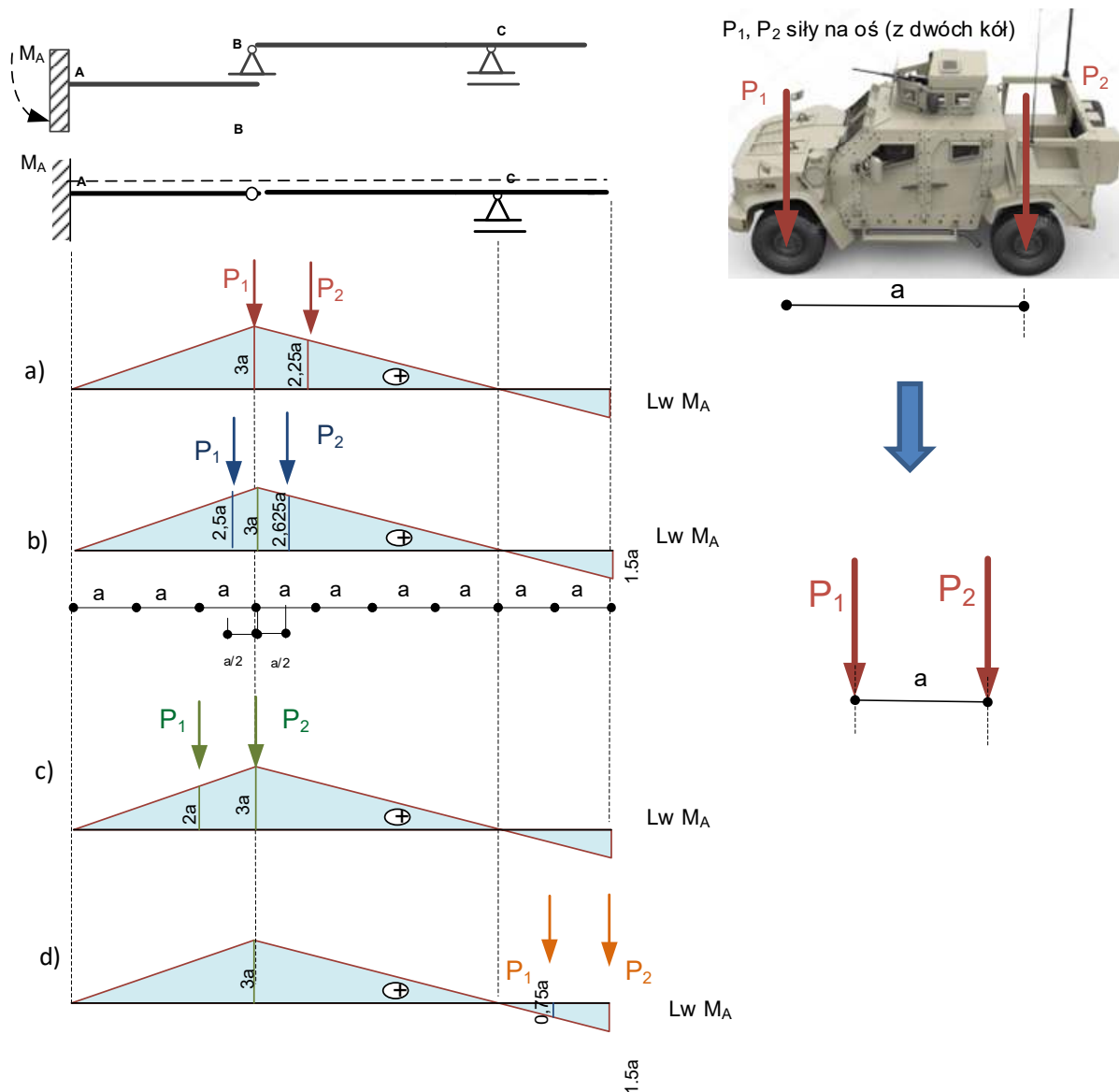
$$M_A = P_1 \cdot 2,5a + P_2 \cdot 2,625a = 20 \cdot 2,5a + 40 \cdot 2,625a = 155a \text{ [kNm]} \quad (3)$$

W końcu gdy zatrzymamy obciążenie ruchome w położeniu pokazanym na rys. 16c, tj. gdy większa z sił $P_2=40$ znajdzie się na największą dodatnią rzędną LW w miejscu jej załomu, moment utwierdzenia będzie jeszcze większy:

$$M_A = P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot 3a = 20 \cdot 2a + 40 \cdot 3a = 160a \text{ [kNm]} \quad (4)$$

Jak można zauważyć dla ustawienia trzeciego w kolejności, tak jak na rys. 16c otrzymaliśmy wartość największą M_A . Możemy oczywiście sprawdzać jeszcze inne możliwe ustawienia obciążenia ruchomego, dające dodatnią wartość momentu utwierdzenia, nie jest to jednak potrzebne. Bowiem zgodnie ze stosownym twierdzeniem, które można wykazać, największą wartość poszukiwanej wielkości statycznej możemy uzyskać jedynie dla ustawienia obciążenia ruchomego, gdy jedna z sił skupionych znajdzie nad załomem linii wpływu (nad lokalnym

ekstremum Lw). W zadaniu mamy dwa takie ustawienia (rys. 16a i c), których większą wartość momentu utwierdzenia uzyskujemy dla ustawienia obciążenia jak na rys. 16c. Jest to najbardziej niekorzystne ustawienie zadanego obciążenia na ustroju, mając na względzie dodatnią wartość M_A .



Rys. 16

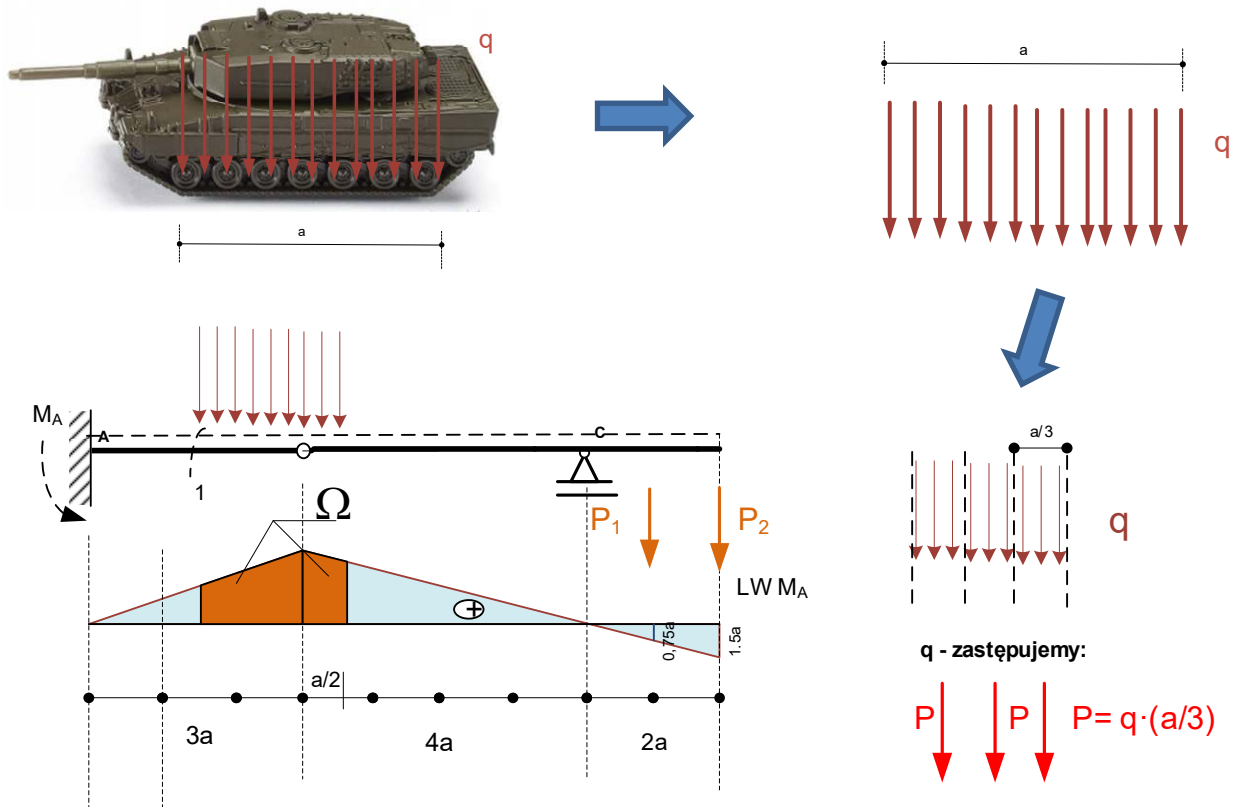
Analogicznie wyznaczmy ekstremalną ujemną wartość momentu utwierdzenia co odpowiada położeniu obciążenia tak jak na rys. 16d, dla którego wyznaczamy wartość M_A następująco:

$$M_A = -(P_1 \cdot 0.75a + P_2 \cdot 1.5a) = -75a \text{ [kNm]} \quad (5)$$

W tym przypadku, zakładając że obciążenie ruchome nie może zjechać z ustroju, nie ma innego położenia dającego ewentualną większą wartość bezwzględną M_A . Otrzymaliśmy zatem dwa najbardziej niekorzystne ustawienia obciążenia ruchomego na ustroju pokazane na rys. 16c i d, odpowiednio stanowiące ekstremalne wartości momentu utwierdzenia M_A (maksymalną wartość dodatnią i ujemną).

W przypadku konieczności uwzględnienia obciążenia ruchomego w postaci obciążenia rozłożonego jak na rys. 17, poszukiwaną wielkość statyczną uzyskamy mnożąc intensywność obciążenia równomiernie rozłożonego przez pole wykresu lw w miejscu zatrzymania tego obciążenia (6). Możemy także zastąpić obciążenie rozłożone grupą wypadkowych sił skupionych (6) co ułatwi nam poszukiwanie najniekorzystniejszego położenia tego obciążenia na ustroju, w sposób podany powyżej. Wartość ekstremalna odpowiadająca najniekorzystniejszemu położeniu obciążenia rozłożonego na ustroju odpowiadać będzie ustawieniu, gdy obciążenie rozłożone znajdzie się na załomie Lw. Takich położzeń jest jednak wiele. Wybór właściwego wymaga to zbudowania odpowiedniej zależności analitycznej (tzw. nierówności Winklera), lub badania metodą prób. W tym drugim przypadku obciążenie rozłożone dzielimy na kilka części i zastępujemy każda z nich wypadkową (rys. 17). Daje nam to zastępcze obciążenie grupą sił skupionych, wobec tego ustawiamy każdą z tych sił nad załomem Lw, odnajdując w sposób przybliżony położenie najbardziej niekorzystne.

$$\text{poszukiwana_wlk} = q \cdot \Omega = \sum_1^n P \cdot \eta_i \quad (6)$$



Rys. 17. Uwzględnienie ruchomego obciążenia rozłożonego

9. Obwiednia obciążeń ruchomych

Linia wpływu wielkości przekrojowych (np. momentu zginającego, siły tnącej) sporządzana jest dla jednego zadanego przekroju ustroju, oraz dla obciążenia pojedynczą siłą jednostkową. Nie pozwala to na bezpośrednie wykorzystanie tego wykresu do celów projektowych. Niezbędne jest bowiem określenie wielkości wewnętrznych (np. momentu zginającego, siły poprzecznej) w każdym z przekrojów ustrojów, dla obciążenia ruchomego w postaci pojazdu (grupy sił), poruszających się po określonej drodze. Istotne znaczenie dla tego wykresu mają jedynie położenia najbardziej niekorzystne pojazdu, tj dające ekstremalne wielkości rzędnych w danym przekroju ustroju. Takim wykresem jest wykres nazywany w mechanice obwiednią obciążeń ruchomych. Wyznaczenie analityczne tej obwiedni jest bardzo trudne, dlatego określamy ją w sposób dyskretny, ograniczając liczbę przekrojów w ustroju, dla których wyznaczamy rzędne obwiedni.

Obwiednia obciążeń ruchomych jest to wykres ekstremalnych wielkości statycznych (np. M , T) określany w obranych, dyskretnych przekrojach ustroju, dla najbardziej niekorzystnego położenia obciążenia ruchomego w postaci grupy sił.

Wyróżniamy następujące sposoby sporządzania obwiedni:

- na podstawie serii rozwiązań statycznych, dla obciążenia ruchomego zatrzymywanego w kolejnych przyjętych przekrojach ustroju (np. co 1m) - postępowanie wykorzystywane w programach komputerowych
- na podstawie linii wpływu sporządzanych w wybranych, dyskretnych przekrojach ustroju (np. co 1 m); dla każdej LW określa się najniekorzystniejsze położenie obc. ruchomego, co pozwala wyznaczyć rzędne obwiedni.

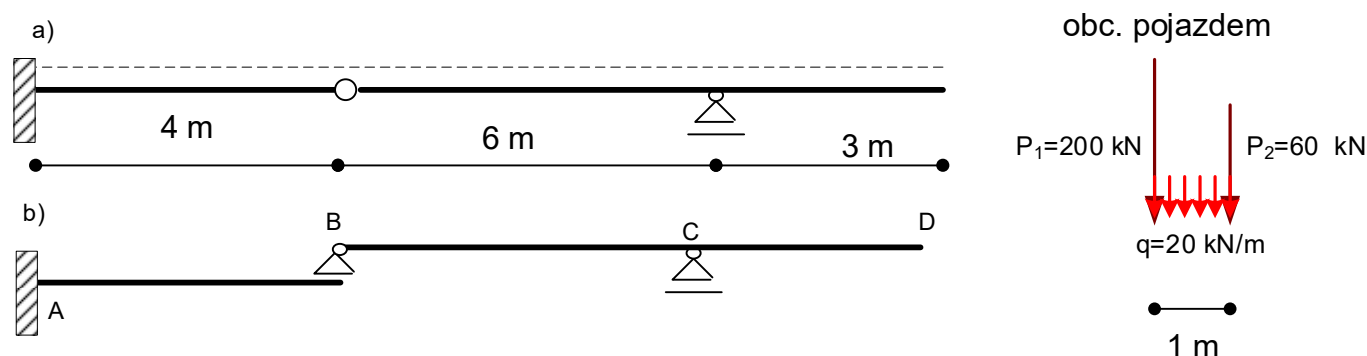
Ten drugi z wymienionych sposób stosowany jest na zajęciach z mechaniki budowli. Tok postępowania jest wówczas następujący:

- wydzielamy skończoną liczbę dyskretnych przekrojów ustroju, które numerujemy,
- dla każdego przekroju sporządzamy LW szukanej wielkości wew. (np. LW momentu zginającego M_i , gdzie i – nr przekroju),
- na każdej linii wpływu ustawiamy zadane obciążenie ruchome pojazdem w położeniach najbardziej niekorzystnych (są to dwa takie położenia dające wartości \max i \min),
- wyznaczamy te wartości ekstremalne ($M_{i\max}$, $M_{i\min}$), które są rzędnymi obwiedni w przekroju „ i ” ustroju.

Powtarzamy te czynności dla pozostałych przekrojów, otrzymując zbiór rzędnych, które łączymy ze sobą, uzyskując w sposób przybliżony wykres obwiedni. Obwiednia składa się z dwóch gałęzi określających wartości maksymalne i minimalne. Rzędne obwiedni momentu zginającego podobnie jak rzędne wykresu momentów dla obciążeń nieruchomych należy odłożyć po stronie włókien rozciąganych.

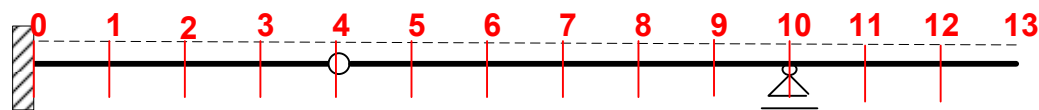
Przykład obliczeniowy

W zadaniu poszukiwana jest obwiednia obciążeń ruchomych momentu zginającego (bez uwzględnienia ciężaru własnego belki) dla ustroju złożonego, zbudowanego z części podstawowej w postaci wspornika oraz drugorzędnej belki BCD - rys. 18.



Rys.18. Temat zadania

Ze względu na rozpiętość 1m obciążenia ruchomego, w postaci dwóch sił skupionych, obwiednia będzie wyznaczona na podstawie rzędnych w przekrojach rozmieszczonych co 1 m. Jest to wystarczająca gęstość dyskretyzacji.



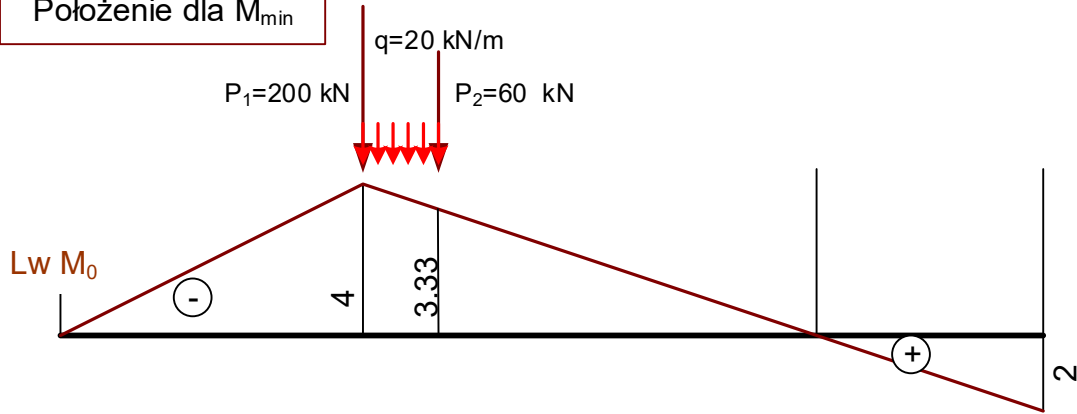
Rys.19 Przyjęcie przekrojów do wyznaczenia rzędnych obwiedni M

Dla każdego przekroju oznaczonego cyframi od 0 do 13 sporządzono LW momentu zginającego M_i (od $P=1$), a następnie metodą prób odnaleziono obc. pojazdem, w położeniach najniekorzystniejszych, wyznaczając dwie rzędne obwiedni w przekroju: M_{\max} i M_{\min} . Przedstawiono to poniżej na kolejnych rysunkach.

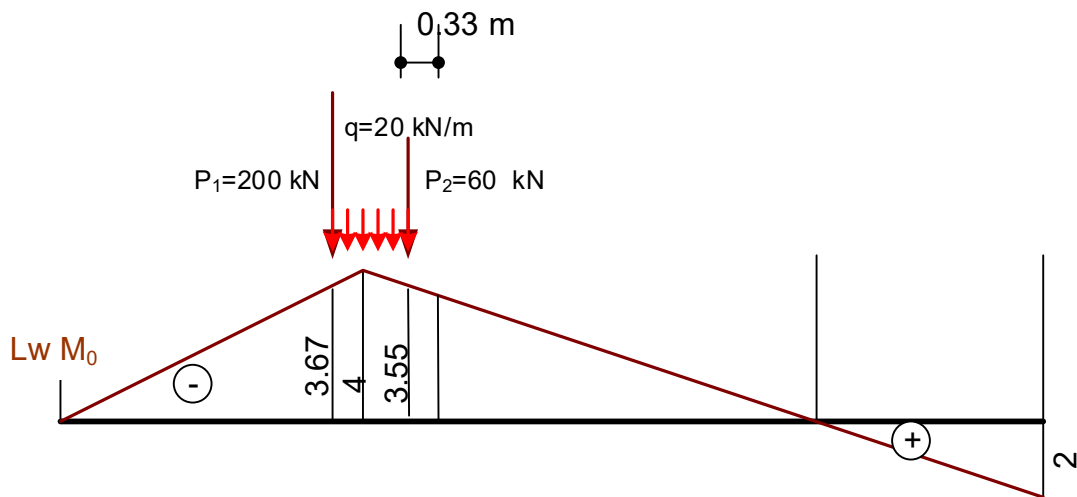
Dla przekroju 0: $-M_0$ [kNm]

Położenie najniekorzystniejsze obciążenia ruchomego wyznaczono na podstawie dwóch ustawień, pokazanych poniżej. Najniekorzystniejszym było położenie dla którego większa z sił skupionych znalazła się nad załosem Lw. Położenie najniekorzystniejsze dla rzędnej dodatniej obwiedni jest tylko jedno, jeżeli przyjmie się że obciążenie ruchome nie może „zjechać” z ustroju.

Położenie dla M_{\min}

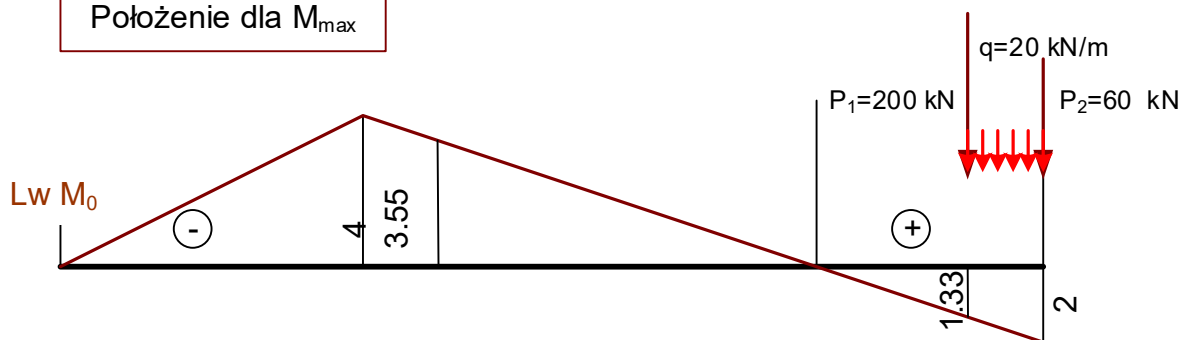


$$M_0^{\min} = -200 \cdot 4 - 60 \cdot 3.33 - 20 \left(\frac{4 + 3.33}{2} \cdot 1 \right) = -1073.11$$



$$M_0^{\min} = -200 \cdot 3.67 - 60 \cdot 3.55 - 20 \left(\frac{4 + 3.67}{2} \cdot 0.33 \right) - 20 \left(\frac{4 + 3.55}{2} \cdot 0.67 \right) = -1022.9$$

Położenie dla M_{\max}

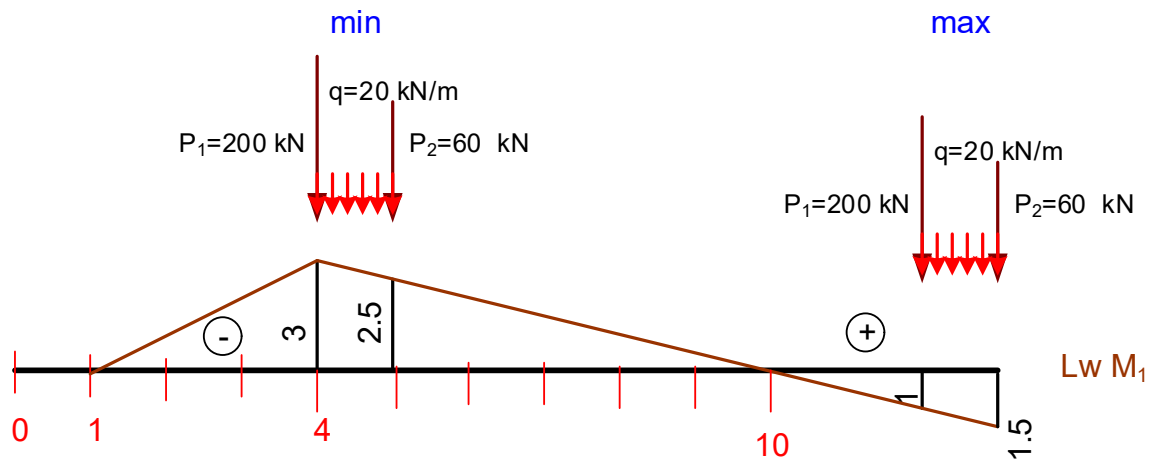


$$M_0^{\max} = 200 \cdot 1.33 + 60 \cdot 2 + 20 \left(\frac{2 + 1.33}{2} \cdot 1 \right) = 419.3$$

Wyznaczyliśmy zatem dwie rzędne obwiedni momentów zginających w miejscu przekroju 0 o wartości -1073,1 kNm oraz 419,3 kNm, odpowiednio dla gałęzi ujemnej i dodatniej tego wykresu.

Dla przekroju 1: M_1 [kNm]

Linia wpływu ma w tym przekroju bardzo podobny kształt – tak jak w przypadku Lw dla przekroju 0, zatem najniekorzystniejsze położenia obciążenia ruchomego będą analogiczne do poprzednio wyznaczonych.



$$M1_{min} := -200 \cdot 3 - 60 \cdot 2.5 - 20 \cdot \frac{3 + 2.5}{2} \cdot 1 = -805$$

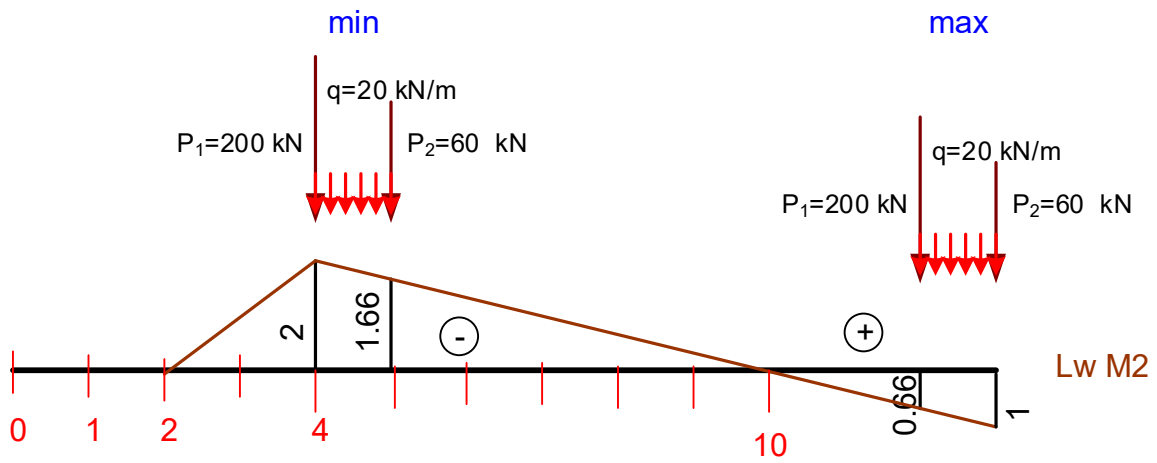
$$M1_{max} := 200 \cdot 1 + 60 \cdot 1.5 + 20 \cdot \frac{1 + 1.5}{2} \cdot 1 = 315$$

Podobnie postępujemy w przypadku Lw w kolejnych przekrojach.

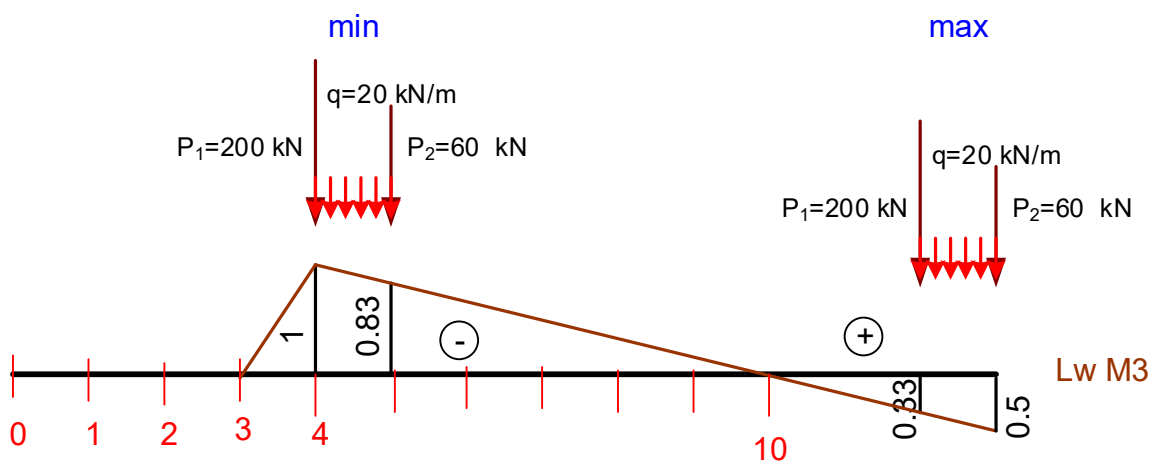
Dla przekroju 2: M_2 [kNm]

$$M2_{min} := -200 \cdot 2 - 60 \cdot 1.66 - 20 \cdot \frac{2 + 1.66}{2} \cdot 1 = -536.2$$

$$M2_{max} := 200 \cdot 0.66 + 60 \cdot 1.0 + 20 \cdot \frac{1 + 0.66}{2} \cdot 1 = 208.6$$



Dla przekroju 3: M3 [kNm]



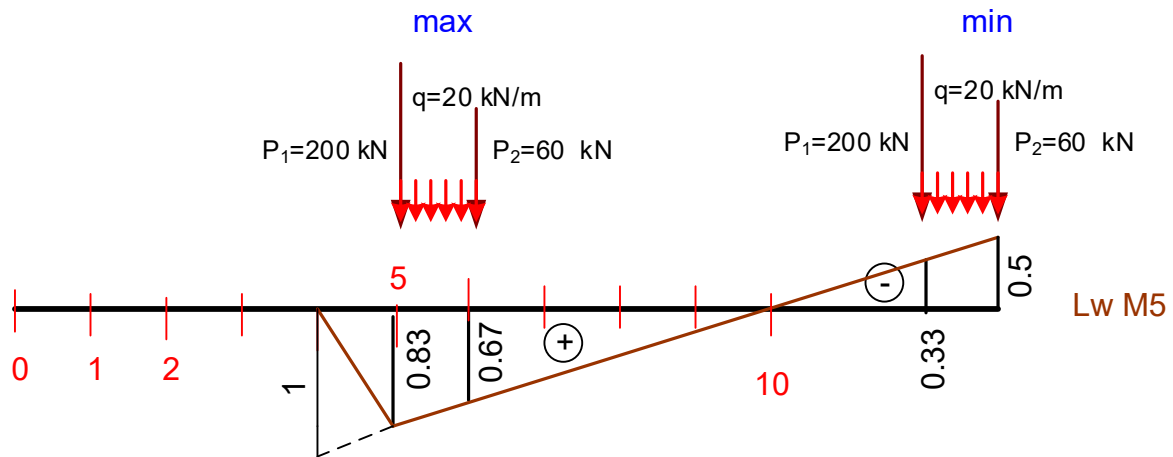
$$M3_{min} := -200 \cdot 1 - 60 \cdot 0.83 - 20 \cdot \frac{1 + 0.83}{2} \cdot 1 = -268.1$$

$$M3_{max} := 200 \cdot 0.33 + 60 \cdot 0.5 + 20 \cdot \frac{0.33 + 0.5}{2} \cdot 1 = 104.3$$

Dla przekroju 4: M4 [kNm]

$M_4=0$ – bo to przegub obrotowy

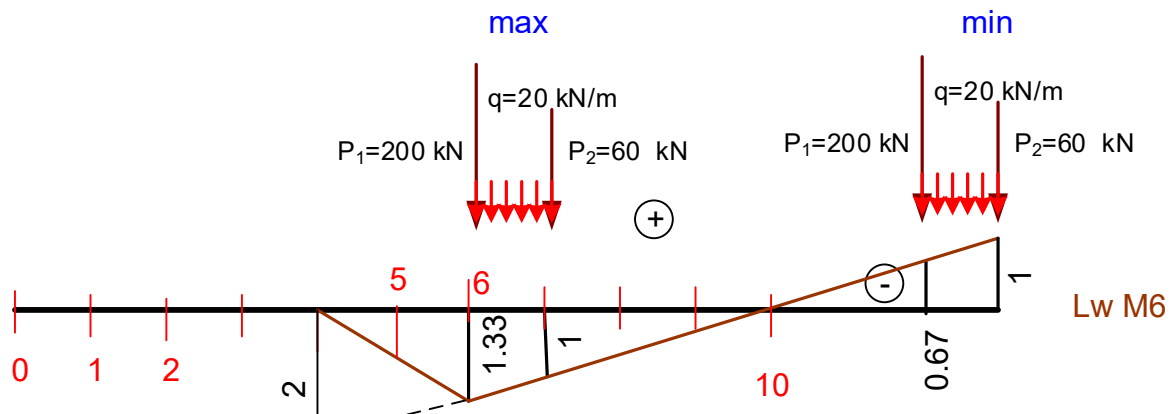
Dla przekroju 5: M5 [kNm]



$$M5_{min} := -200 \cdot 0.33 - 60 \cdot 0.5 - 20 \cdot \frac{0.5 + 0.33}{2} \cdot 1 = -104.3$$

$$M5_{max} := 200 \cdot 0.83 + 60 \cdot 0.67 + 20 \cdot \frac{0.66 + 0.83}{2} \cdot 1 = 221.1$$

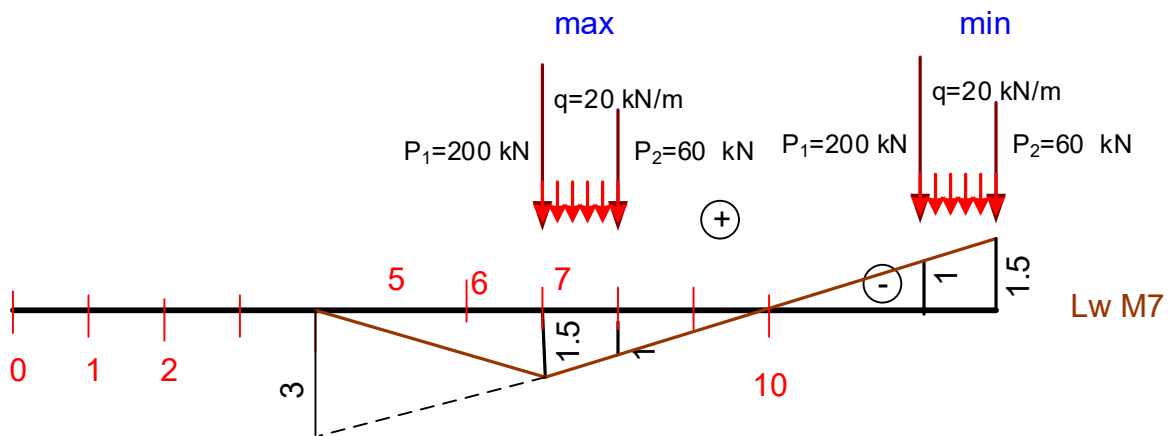
Dla przekroju 6: M6 [kNm]



$$M6_{min} := -200 \cdot 0.67 - 60 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{0.67 + 1}{2} \cdot 1 = -210.7$$

$$M6_{max} := 200 \cdot 1.33 + 60 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1 + 1.33}{2} \cdot 1 = 349.3$$

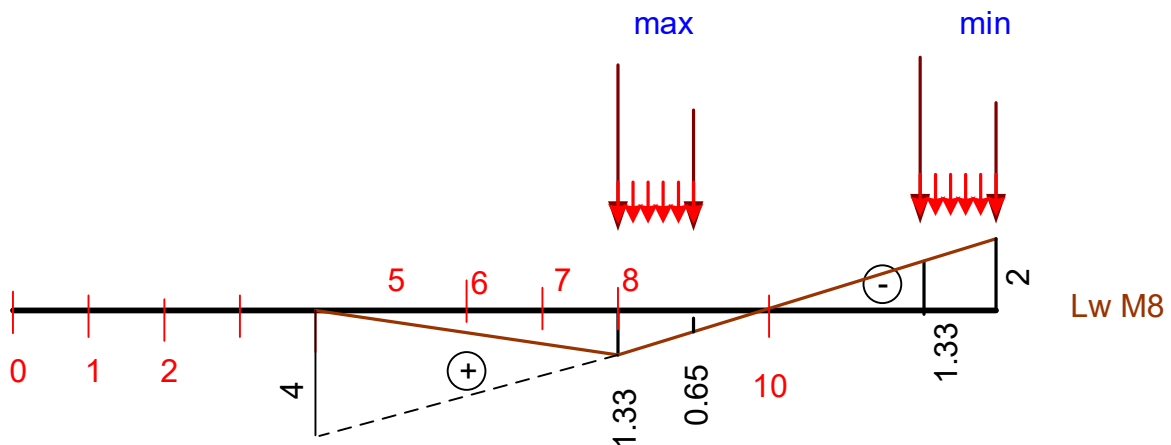
Dla przekroju 7: M7 [kNm]



$$M7_{min} := -200 \cdot 1 - 60 \cdot 1.5 - 20 \cdot \frac{1.5 + 1}{2} \cdot 1 = -315$$

$$M7_{max} := 200 \cdot 1.5 + 60 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1 + 1.5}{2} \cdot 1 = 385$$

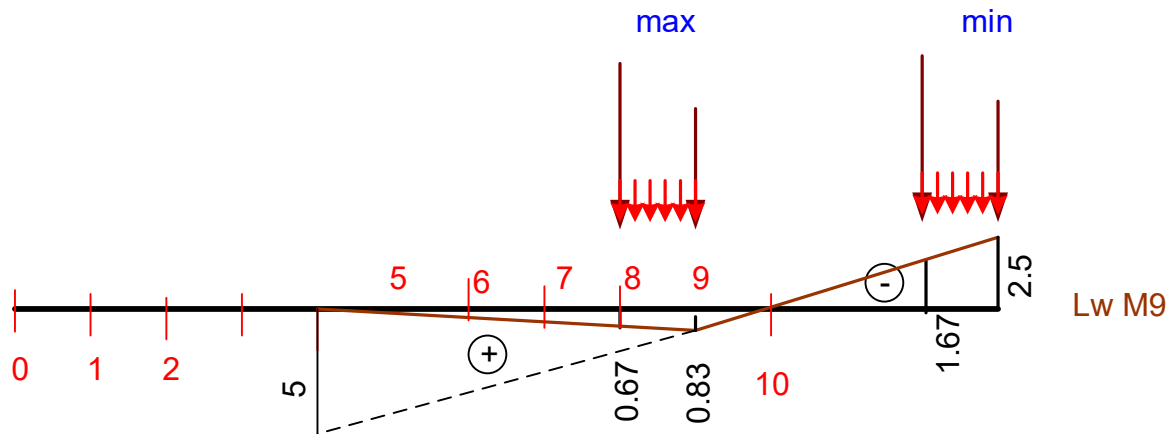
Dla przekroju 8: M8 [kNm]



$$M8_{min} := -200 \cdot 1.33 - 60 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{1.33 + 2}{2} \cdot 1 = -419.3$$

$$M8_{max} := 200 \cdot 1.33 + 60 \cdot 0.65 + 20 \cdot \frac{1.33 + 0.65}{2} \cdot 1 = 324.8$$

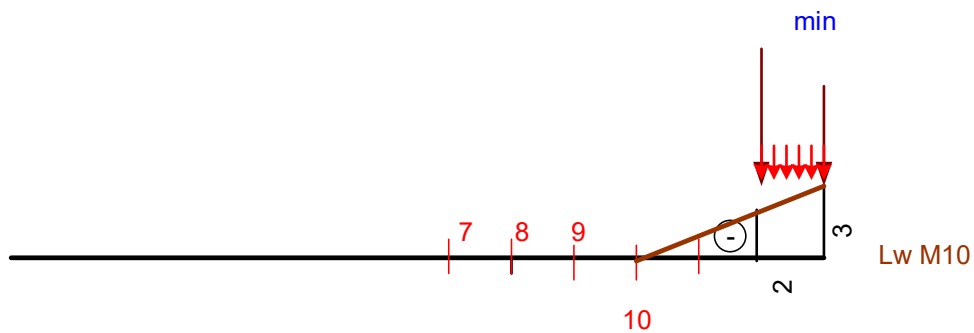
Dla przekroju 9: M_9 [kNm]



$$M_{9min} := -200 \cdot 1.67 - 60 \cdot 2.5 - 20 \cdot \frac{1.67 + 2.5}{2} \cdot 1 = -525.7$$

$$M_{9max} := 200 \cdot 0.67 + 60 \cdot 0.83 + 20 \cdot \frac{0.83 + 0.67}{2} \cdot 1 = 198.8$$

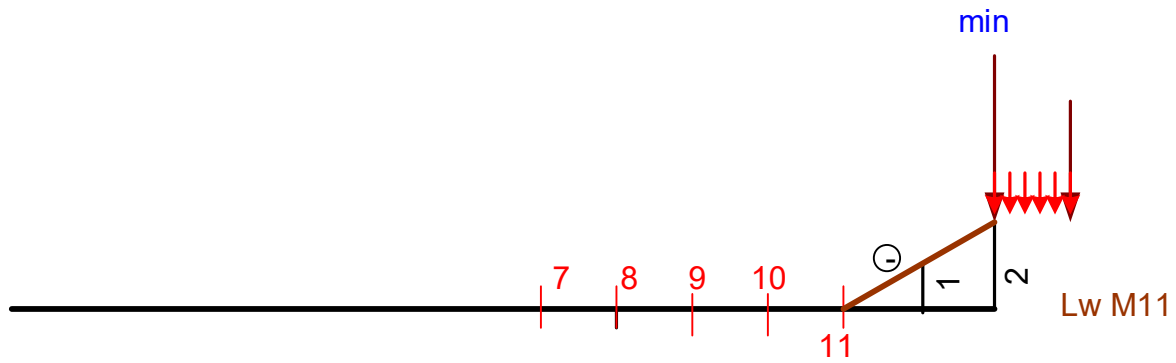
Dla przekroju 10: M_{10} [kNm]



$$M_{10max} := 0 = 0$$

$$M_{10min} := -200 \cdot 2 - 60 \cdot 3 - 20 \cdot \frac{2 + 3}{2} \cdot 1 = -630$$

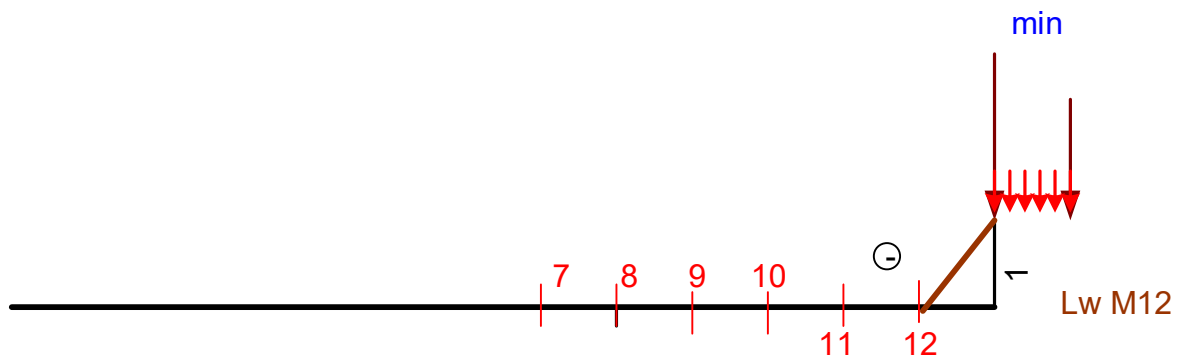
Dla przekroju 11: M_{11} [kNm]



$$M_{11max} := 0 = 0$$

$$M_{11min} := -200 \cdot 2 = -400$$

Dla przekroju 12: M_{12} [kNm]



$$M_{12max} := 0 = 0$$

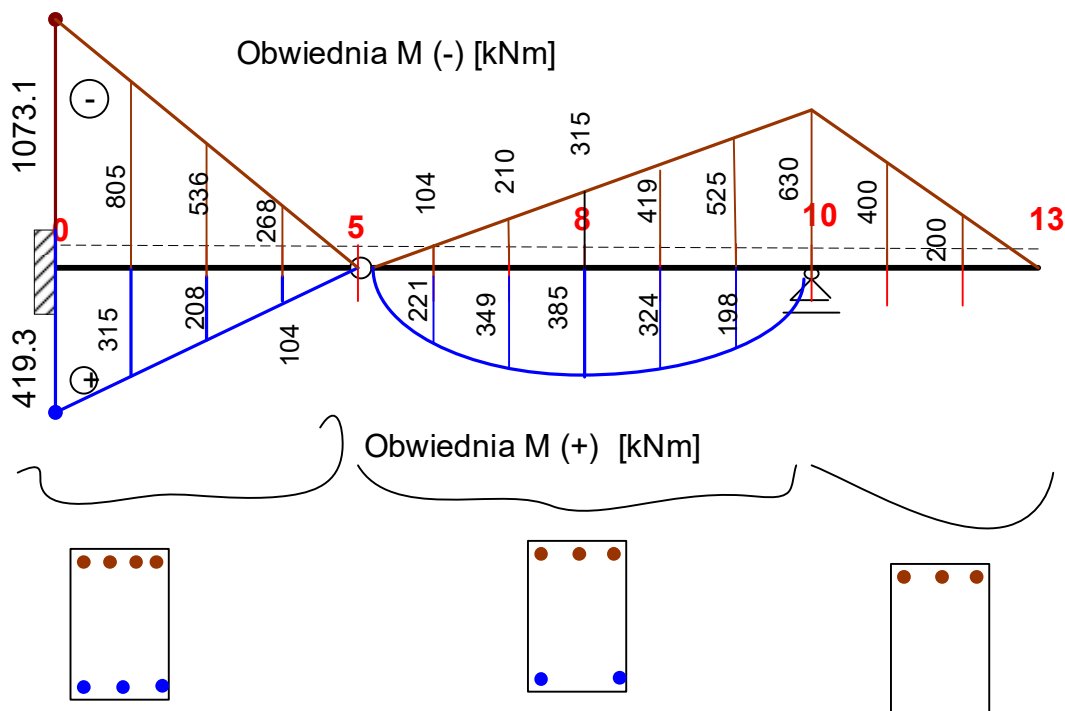
$$M_{12min} := -200 \cdot 1 = -200$$

Dla przekroju 13: M_{13} [kNm]

$$\underline{M_{13}=0}$$

Wyznaczoną obwiednie momentów zginających dla zadanego obciążenia pojazdem (bez uwzględnienia ciężaru własnego ustroju), na podstawie wyznaczonych powyżej jej rzędnych, podano na rys. 20. Obwiednia ta składa się z dwóch gałęzi: dodatniej i ujemnej (poza wspornikiem CD). Zatem projektując zbrojenie niezbędne jest na odcinku AB (przekroje 0 do 5) oraz odcinku BC (przekroje 5 do 10) wyznaczenie zbrojenia dolnego na momenty dodatnie i zbrojenia górnego na momenty ujemne obwiedni.

Zgodnie z interpretacją obwiedni obciążeń ruchomych, każdy sporządzony wykres momentów zginających dla obciążenia ruchomego zatrzymanego w dowolnym położeniu na ustroju, powinien „mieścić się” w obrębie tej obwiedni, o ile jest ona poprawnie sporządzona.



Rys. 20 Wyznaczona obwiednia momentów zginających oraz jej interpretacja w przypadku projektowania zbrojenia

Andrzej Cińcio, listopad 2021 r