

dr inż. Andrzej Cińcio

Katedra Mechaniki i Mostów, Politechniki Śląskiej

andrzej.cincio@polsl.pl

identyfikator ORCID: 0000-0002-7937-3859

Rozwiązywanie układów prętowych metodą przemieszczeń w wersji klasycznej.

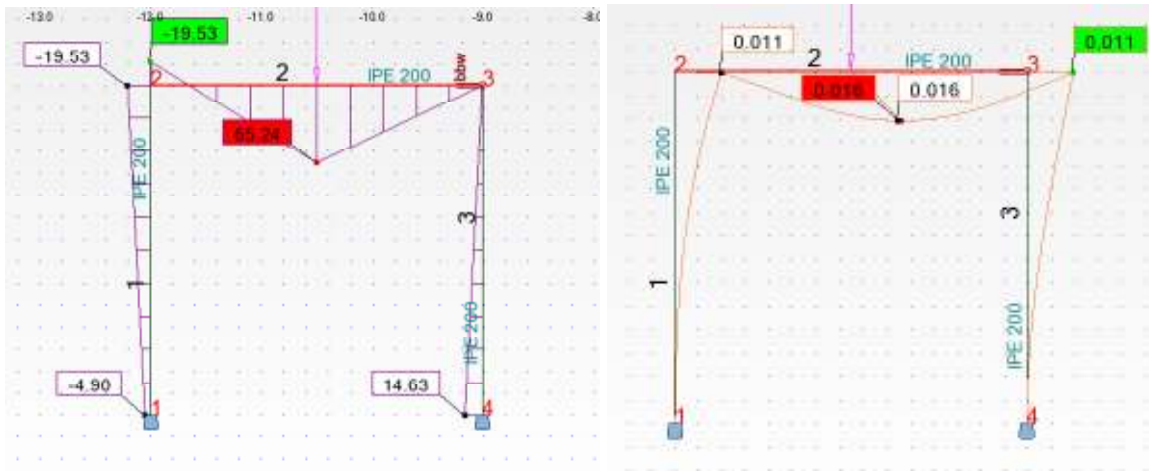
Materiały dydaktyczne dla studentów Wydz. Budownictwa

1. Wprowadzenie do metody przemieszczeń

Metoda przemieszczeń (MP), obok metody sił jest podstawową metodą rozwiązywania układów prętowych. W wielu przypadkach pozwala na uzyskanie prostszego rozwiązania, opartego na mniejszej liczbie niewiadomych, w porównaniu z metodą sił. Pozwala również rozwiązać układy statycznie wyznaczalne. Posiada także zwarty i prosty algorytm rozwiązania, dlatego metoda przemieszczeń w wersji macierzowej jest zaimplementowana w większości programów komputerowych do rozwiązywania układów prętowych. Co prawda metoda ta ograniczona jest do rozwiązywania jedynie ustrojów liniowo-sprężystych, to jednak dzięki zastosowaniu przyrostowo-iteracyjnego sposobu rozwiązywania układu równań nieliniowych, stosowana może być także do rozwiązywania zagadań nieliniowych. Istnieją **dwa podstawowe warianty metody przemieszczeń: wersja klasyczna** (omawiany w artykule) dedykowany do obliczeń odręcznych oraz wykorzystywana głównie w programach komputerowych **macierzowa wersja metody**, która daje dokładniejsze wyniki. Różnice pomiędzy obiema wersjami omawia się w kolejnym rozdziale. W dalszej części artykułu został przedstawiony algorytm metody oraz przykład liczbowy - rozwiązanie ramy płaskiej klasyczną wersją MP. Dodatkowo udostępniono link do pliku, zawierającego model tej ramy w programie Robot wraz z rozwiązaniem.

2. Niewiadome metody przemieszczeń, Wersja klasyczna a wersja macierzowa

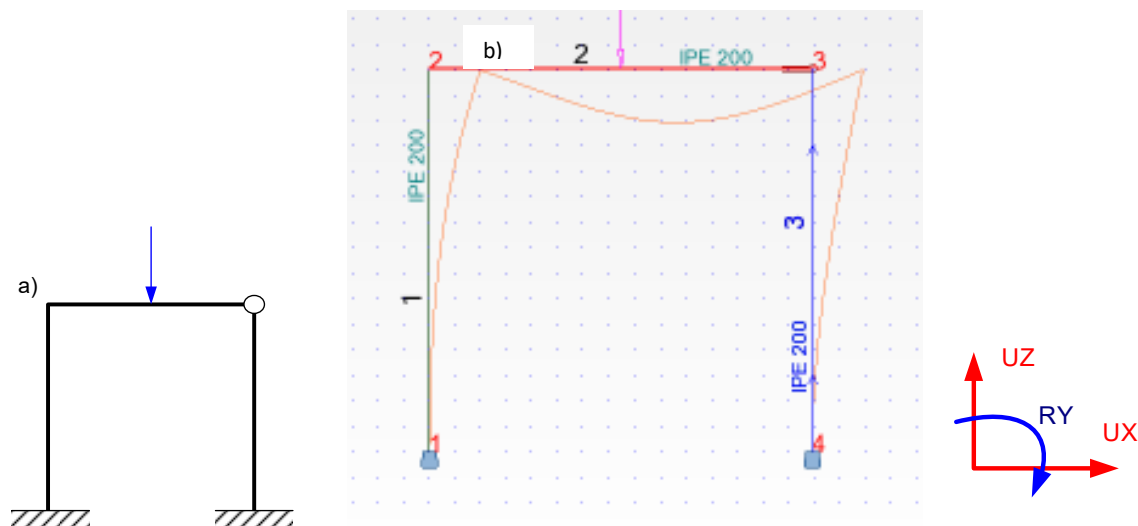
Nazwa metody wskazuje, że **niewiadomymi są przemieszczenia węzłów** ustroju prętowego. Idea metody związana jest z oczywistym faktem, iż każdy odkształcalny ustrój konstrukcyjny doznaje deformacji. W jej wyniku węzły ustroju doznają przemieszczeń liniowych i obrotów kątowych. Przemieszczenia węzłów ustrojów można jednoznacznie powiązać z siłami przekrojowymi działającymi na końcach prętów, wydzielonych z ustroju. Związki te określają tzw. **sztynności prętów** zależne m.in. od sposobu podparcia pręta na jego końcach. Formalnie związki takie zapisuje się w postaci macierzy sztywności prętów. Na podstawie wyznaczonych przemieszczeń węzłów ustroju (rozwiązania w przemieszczeniach) można określić przemieszczenia końców poszczególnych prętów. Następnie na podstawie macierzy sztywności prętów oraz zadanych obciążeń można wyznaczyć siły przekrojowe (wykresy M, T, N) dla każdego pręta ustroju (jest to rozwiązanie w siłach). Na rys. 1 przedstawiono rozwiązanie przykładowego ustroju w siłach oraz odpowiadające mu rozwiązanie w przemieszczeniach uzyskane w programie Robot.



Rys. 1 Rozwiązanie ustroju ramowego w siłach (po lewej) oraz w przemieszczeniach (po prawej) wyznaczone w programie Robot

Jak można zauważyć w MP, w odróżnieniu od metody sił, poszukuje się bezpośrednio rozwiązania ustroju w przemieszczeniach. Dopiero w dalszej kolejności, na podstawie uzyskanego rozwiązania w przemieszczeniach, wyznacza się rozwiązanie ustroju w siłach, wykorzystując w/w macierze sztywności prętów.

Przyjrzyjmy się bliżej rozwiązaniu przykładowej ramy portalowej złożonej z dwóch słupów utwierdzonych na dolnym końcu i jednego rygła, po lewej stronie dołączonego do słupa w sposób sztywny, po prawej stronie dołączonego w sposób przegubowy (schemat statyczny na rys.2a)



Rys.2 Rozwiązanie w przemieszczeniach ramy portalowej o schemacie podanym na rys. 2a

Rama ta ma dwa węzły niepodporowe. Lewy węzeł łączący sztywno dwa pręty ma trzy możliwe przemieszczenia: poziome, pionowe oraz na obrót. Z kolei węzeł prawy – przegubowy ma analogiczne

dwa przemieszczenia liniowe. Natomiast przemieszczenia na obrót są dwa, oddzielnie dla każdego z prętów tworzących węzeł, z racji przegubowego ich połączenia. Jednak obroty te są swobodne i nie są związane z momentami zginającymi na końcach prętów, które muszą mieć wartość zero. Zatem w metodzie przemieszczeń jedynie **pięć składowych przemieszczeń opisuje rozwiązanie w przemieszczeniach**. Są to trzy przemieszczenia węzła lewego o n-rze 2 oraz dwa przemieszczenia węzła prawego o n-rze 3:

$$\{UX_2, UZ_2, RY_2, UX_3, UZ_3\} \quad (1)$$

Wyznaczone wartości tych przemieszczeń w programie Robot dla rzeczywistych, przyjętych sztywności prętów EJ, EA (identycznych dla wszystkich prętów) mają wartości podane w tabeli 1:

Tabela 1

Węzeł/Przypadek	UX (m)	UZ (m)	RY (Rad)
1/ 1	0.0	0.0	0.0
2/ 1	1.11e-002	-2.90e-004	0.009
3/ 1	1.10e-002	-2.23e-004	0.006
4/ 1	0.0	0.0	0.0

Porównując wartości wyznaczonych przemieszczeń (tabela1) mamy:

- przemieszczenia pionowe węzłów UY_2 i UY_3 są ok. 100 razy mniejsze od przemieszczeń poziomych UX_2 i UX_3 i mogą być pominięte
- przemieszczenia poziome węzłów 2 i 3 są praktycznie równe sobie tj. $UX_2=UX_3$.

Można zatem **dokonać redukcji liczby niewiadomych MP** do jedynie dwóch istotnych niewiadomych (2):

- poziomego przesunięcia rygla opisanego praktycznie identycznym przemieszczeniem poziomym UX_2 lub UX_3
- obrotu węzła sztywnego RY_2 .

$$\{UX_2 = UX_3, RY_2\} \quad (2)$$

W ten sposób **zadanie można rozwiązać posługując się dwoma wersjami MP różniącymi się liczbą niewiadomych: wersją macierzową (dokładniejszą), która dla podanego ustroju wymaga przyjęcia minimum 5-ciu niewiadomych, oraz wersją klasyczną (łatwiejszą do rozwiązania, ale mniej dokładną) opartą jedynie na 2 niewiadomych**. Z oczywistych powodów dla obliczeń odręcznych przyjmuje się wersję klasyczną. Należy dodać, że różnice w rozwiązaniu typowego układu ramowego MP w wersji klasycznej i macierzowej nie przekracza kilku procent, co w projektowaniu inżynierskim zwykle nie ma istotnego znaczenia.

3. Założenia upraszczające przyjmowane w wersji klasycznej MP

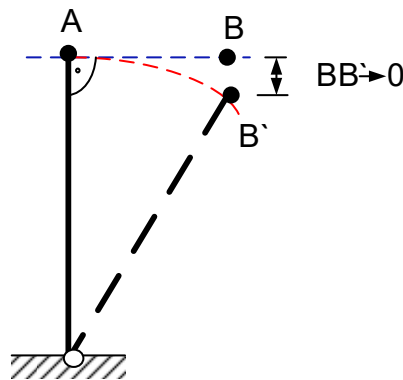
Przedstawiona redukcja liczby niewiadomych w wersji klasycznej w stosunku do liczby niewiadomych w macierzowej wersji metody przemieszczeń opiera się na następującym założeniu:

- i) w wersji klasycznej przyjmujemy, że pręty są nieodkształcalne podłużnie, czyli ich sztywność EA równa jest nieskończoności.

Istotnie, przyjmując to założenie upraszczające dla słupów ustroju na rys. 2, przemieszczenia pionowe węzłów 2 i 3 muszą być równe zero, bowiem inaczej każdy ze słupów musiałby zmienić swoją pierwotną długość. Natomiast brak możliwości zmiany długości rygla prowadzi do równości poziomych składowych przemieszczeń węzłów 2 i 3.

Dodatkowym założeniem upraszczającym w wersji klasycznej MP, które ułatwia zbudowanie tzw. planu przemieszczeń jest przyjęcie obrotu prętów po prostopadłych zamiast po łuku – co pokazano na rys. 3.

Założenie to można przyjąć, bowiem kąty obrotów węzłów i prętów w rzeczywistych, typowych ustrojach konstrukcyjnych są małe.



Rys. 3. Dodatkowe założenie upraszczające w wersji klasycznej MP – przyjęcie obrotu pręta po prostopadłej zamiast po łuku

W klasycznej wersji MP jako niewiadome przyjmujemy zatem: obroty węzłów sztywnych lub częściowo sztywnych ustroju oraz przemieszczenia liniowe rygla ramy.

4. Algorytm klasycznej wersji metody przemieszczeń

Algorytm rozwiązania zadania metodą przemieszczeń nie zależy od typu rozwiązywanego ustroju. Należy nadto zauważyć, że analogiczny algorytm dotyczy wersji macierzowej MP.

Algorytm dla wersji klasycznej można zapisać następująco:

- I. Określenie liczby niewiadomych (tj. stopnia geometrycznej niewyznaczalności ustroju)
- II. Dobór ustroju podstawowego i układu zastępczego MP

- III. Rozwiązanie układów pomocniczych MP od kolejnych, niezależnie zadanych jednostkowych niewiadomych geometrycznych: $Z_1, Z_2 \dots Z_n$, oraz od obciążenia.
- IV. Wyznaczenie w układach pomocniczych wartości wyrazów macierzy sztywności r_{ij} oraz wyrazów wektora wolnego r_{ip} ($i=1 \dots n$, gdzie n – jest liczbą niewiadomych MP)
- V. Zapisanie i rozwiązanie układu równań kanonicznych MP
- VI. Na podstawie wyznaczonych przemieszczeń – niewiadomych MP: $Z_1, Z_2 \dots Z_n$, wyznaczenie rozwiązania w siłach (wykresy M T N)

Rozwiązanie zadania metodą przemieszczeń sprowadza się do zbudowania i rozwiązania układu równań kanonicznych MP względem niewiadomych przemieszczeń (liniowych, kątowych) metody - w zapisie ogólnym podanym poniżej.

$$[K] \cdot \{Z\} + \{R\} = 0 \quad (3)$$

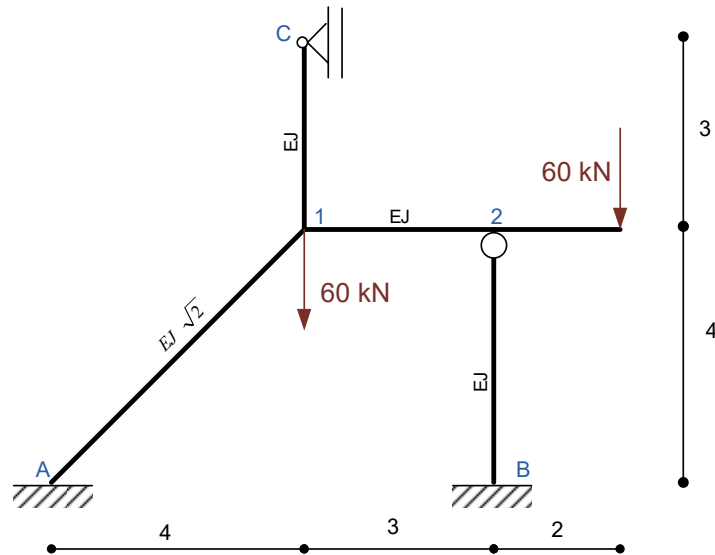
gdzie $[K]$ jest macierzą sztywności ustroju (wynikającą z macierzy sztywności poszczególnych prętów) budowaną na podstawie reakcji fikcyjnych podpór r_{ij} (dodanych w ustroju podstawowym MP) od jednostkowych, wymuszanych wartości niewiadomych MP - Z_i ; wektor $\{Z\}$ jest wektorem niewiadomych MP; wektor $\{R\}$ zawiera reakcje fikcyjnych podpór r_{ip} od zadanych obciążeń ustroju.

Należy dodać, że macierz sztywności $[K]$, która opisuje sztywność ustroju jest zawsze symetryczna oraz musi być dodatnio określona, co pozwala na kontrolę poprawności jej wyznaczenia.

Algorytm MP jest dokładniej przedstawiony za pomocą przykładowego zadania w kolejnym rozdziale.

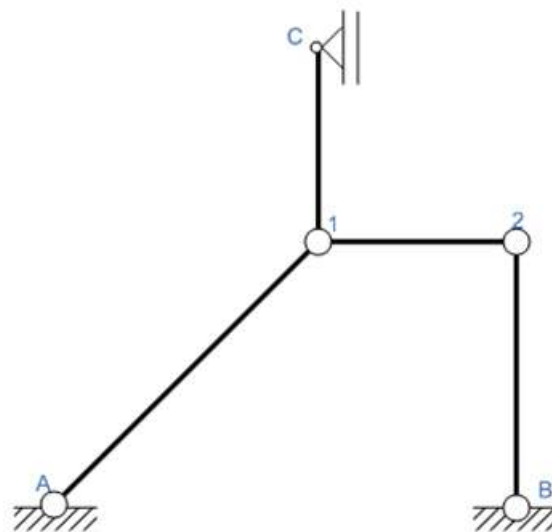
5. Przykład rozwiązania ramy płaskiej metodą przemieszczeń

Temat rozwiązywanego układu pokazano na rys.4. Jest to rama 3-krotnie statycznie niewyznaczalna, z dodatkowym wspornikiem, obciążona dwoma siłami skupionymi. Sztywności giętnie prętów EJ są zróżnicowane jak na rys. 4. Natomiast sztywności EA prętów, zgodnie z założeniem klasycznej wersji MP są równe nieskończoności.



Rys. 4. Układ rzeczywisty

W pierwszej kolejności należy ustalić stopień geometrycznej niewyznaczalności odpowiadający liczbie niewiadomych MP. W metodzie przemieszczeń wyróżniamy niewiadome liniowe (wynikające z przesunięcia węzłów) oraz kątowe (związane z obrotem węzłów sztywnych lub częściowo sztywnych). Pierwsze z wymienionych niewiadomych ustalamy na podstawie tzw. łańcucha kinematycznego przedstawionego na rys. 5. Łańcuch ten zbudowany na podstawie układu rzeczywistego, który ma jeden stopień swobody kinematycznej, (4). Oznacza to, że zadany ustrój jest jednokrotnie przesuwny, czyli występuje jedna niewiadoma na przesunięciu w MP.



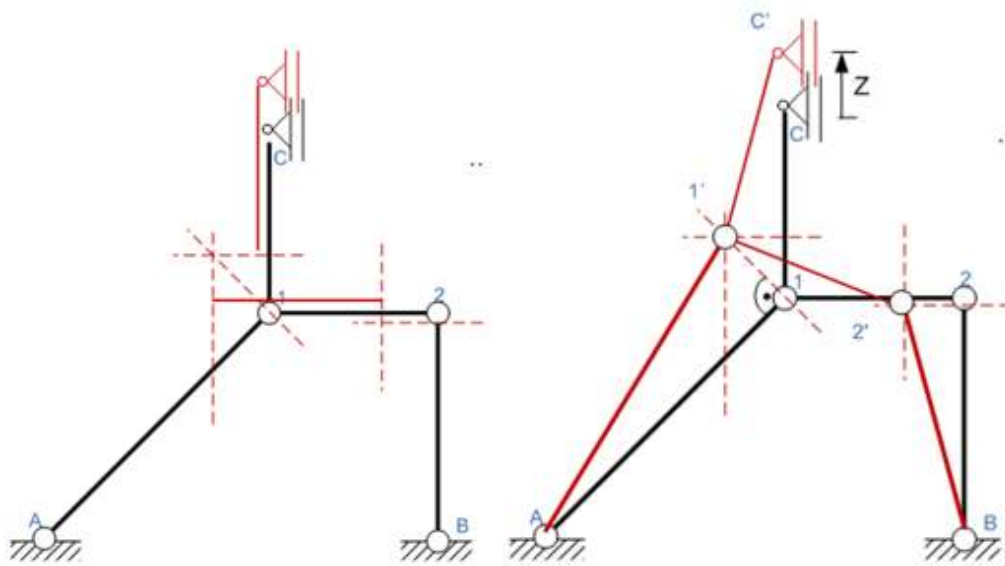
Rys. 5 Łańcuch kinematyczny do określenia niewiadomej na przesunięciu

$$W=3E-2p-s = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

(4)

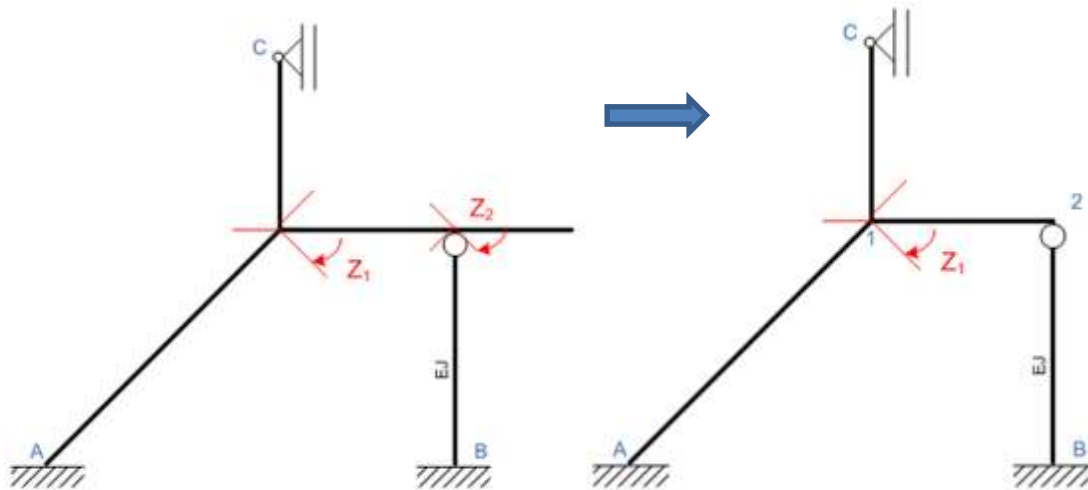
Możliwą lokalizację niewiadomej na przesunięcie określamy na podstawie zbudowanego planu przesunięć łańcucha kinematycznego (rys. 6). Plan ten ułatwi nam także budowę układu pomocniczego MP od przesunięcia. Przy budowie planu przesunięć stosujemy w/w założenie upraszczające dot. obrotu prętów po prostopadłej zamiast po łuku.

Prawidłowy plan przemieszczeń to taki, w którym żaden z prętów nie doznał zmiany długości, przy czym obrót po prostopadłej nie jest w to wliczany, a plan przemieszczeń zgodny jest z narzuconymi więzami w ustroju rzeczywistym. W zadaniu jako niewiadomą na przesunięcie przyjęto pionowe przemieszczenie węzła C (rys.6)

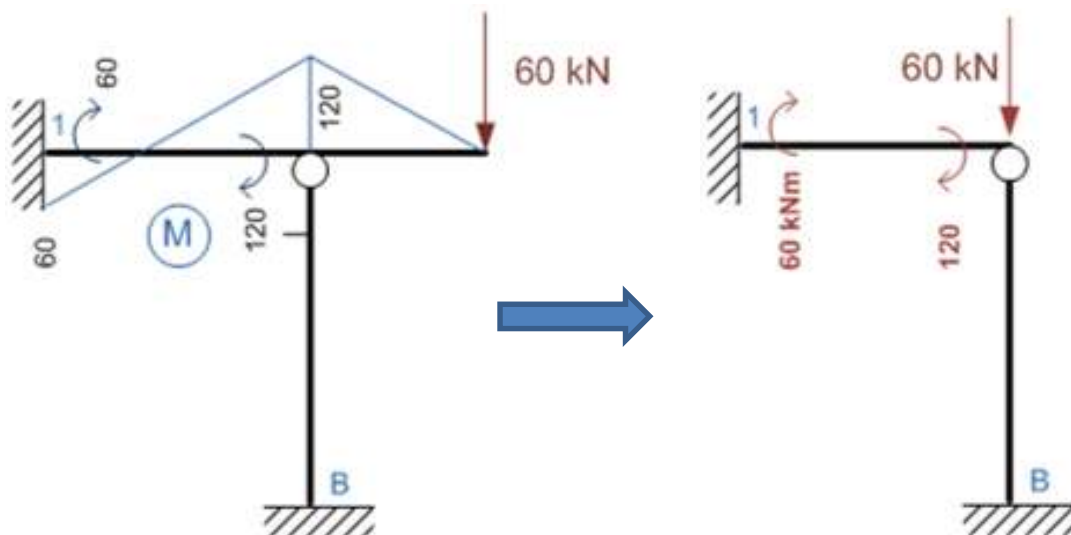


Rys. 6 Budowa łańcucha kinematycznego zbudowany w dwóch etapach (rozdziół na pręty i ustalenie kierunków obrotu prętów po prostopadłych, konstrukcja planu przemieszczeń), Z- przyjęta niewiadoma MP na przesunięcie

W dalszej kolejności ustalamy liczbę niewiadomych MP kątowych na obrót. Niewiadome te należy przyjąć jedynie w węzłach sztywnych lub częściowo sztywnych, czyli w węzle 1 i 2. Daje to dwie niewiadome kątowe na obrót. Jednak istnieje możliwość redukcji tylko do jednej niewiadomej na obrót, poprzez rozwiązanie i redukcję wspornika jako części statycznie wyznaczalnej (rys. 7), oraz odpowiednie rozdzielanie obciążenia ze wspornika na pręt 1-2, do którego jest on dołączony (rys.8).

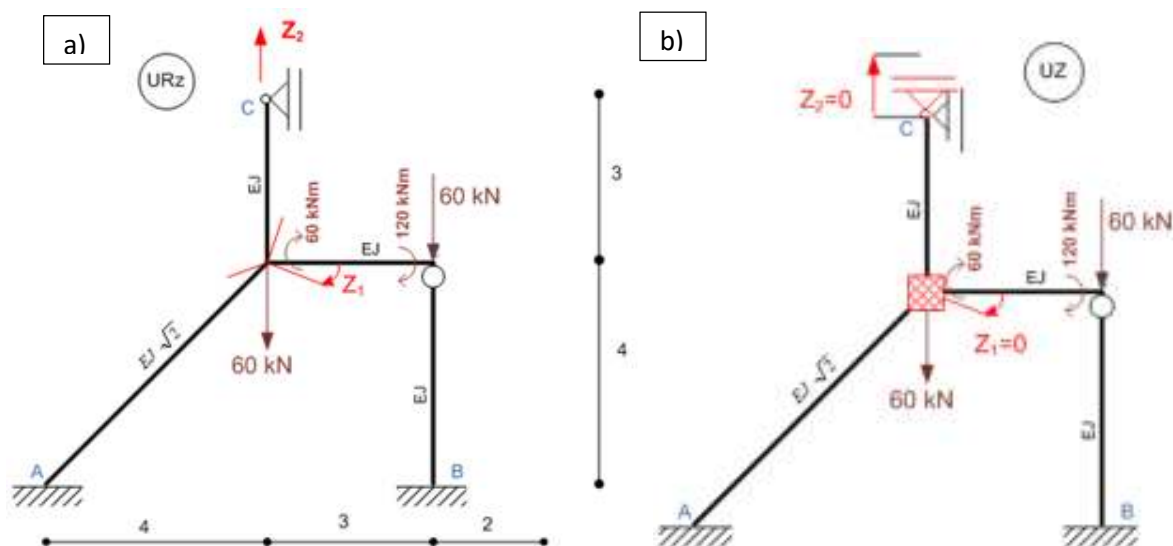


Rys. 7. Redukcja niewiadomej na obrót poprzez redukcję wspornika



Rys. 8. Rozdzielenie obciążenia ze zredukowanego wspornika

Po przeprowadzeniu redukcji wspornika zadany ustrój jest dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny, czyli występują dwie niewiadome MP: jedna na obrót i jedna na przesunięcie. Na rys 9a przedstawiony jest układ rzeczywisty po redukcji wspornika z przyjętymi niewiadomymi MP, natomiast na rys. 9b przyjęty układ zastępczy MP. Układ zastępczy MP (UZ) musi być geometrycznie wyznaczalny, co zapewniają dwie dodatkowe, fikcyjne podpory: na obrót w węźle 1 oraz na przesunięcie pionowe w węźle C.



Rys.9 Układ rzeczywisty po redukcji wspornika (po lewej) oraz przyjęty układ zastępczy MP (po prawej)

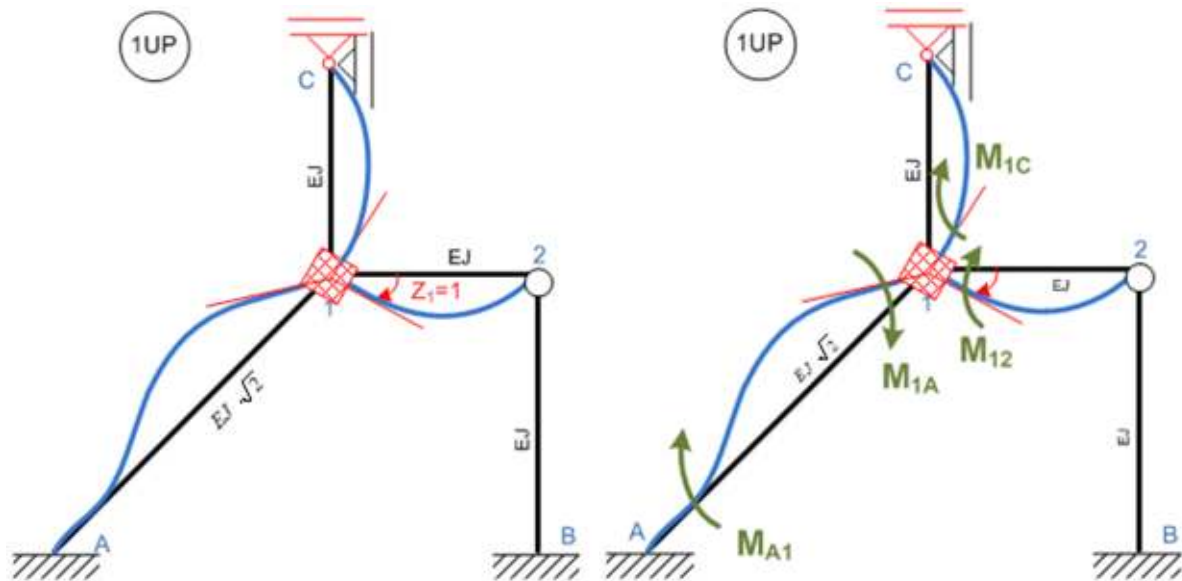
W kolejnym etapie algorytmu MP dokonujemy budowy oraz rozwiązania trzech układów pomocniczych: pierwszego układu pomocniczego (1UP) od jednostkowej niewiadomej Z_1 , drugiego układu pomocniczego (2UP) od jednostkowej niewiadomej Z_2 , oraz dodatkowego układu pomocniczego (DodUP) od zadanego obciążenia,

W 1UP i w 2UP określamy deformację prętów wynikającą z wymuszonego przemieszczenia równego jednostkowej wartości niewiadomych odpowiednio Z_1 i Z_2 . Następnie na podstawie tzw. wzorów transformacyjnych opisujących sztywności prętów wyznaczamy wartości momentów zginających na końcach prętów i sporządzamy wykres momentów zginających. W końcu z warunków równowagi węzłów oraz prętów wyznaczamy reakcje w więzach fikcyjnych, stanowiących wyrazy macierzy sztywności ustroju $[K]$. Jest to pokazane na rys. 10 do 15.

Tablice zawierające wzory transformacyjne (sztywności prętów) można odnaleźć w podręczniku [1] lub w Internecie np. [tutaj](#).

Pierwszy układ pomocniczy:

Pierwszy układ pomocniczy rozwiązujemy od niewiadomej na obrót.



Rys. 10. Pierwszy układ pomocniczy. Deformacje oraz momenty w przekrojach przywęzłowych, działające „na pręt”, z zaznaczonymi rzeczywistymi zwrotami ustalonymi na podstawie deformacji prętów

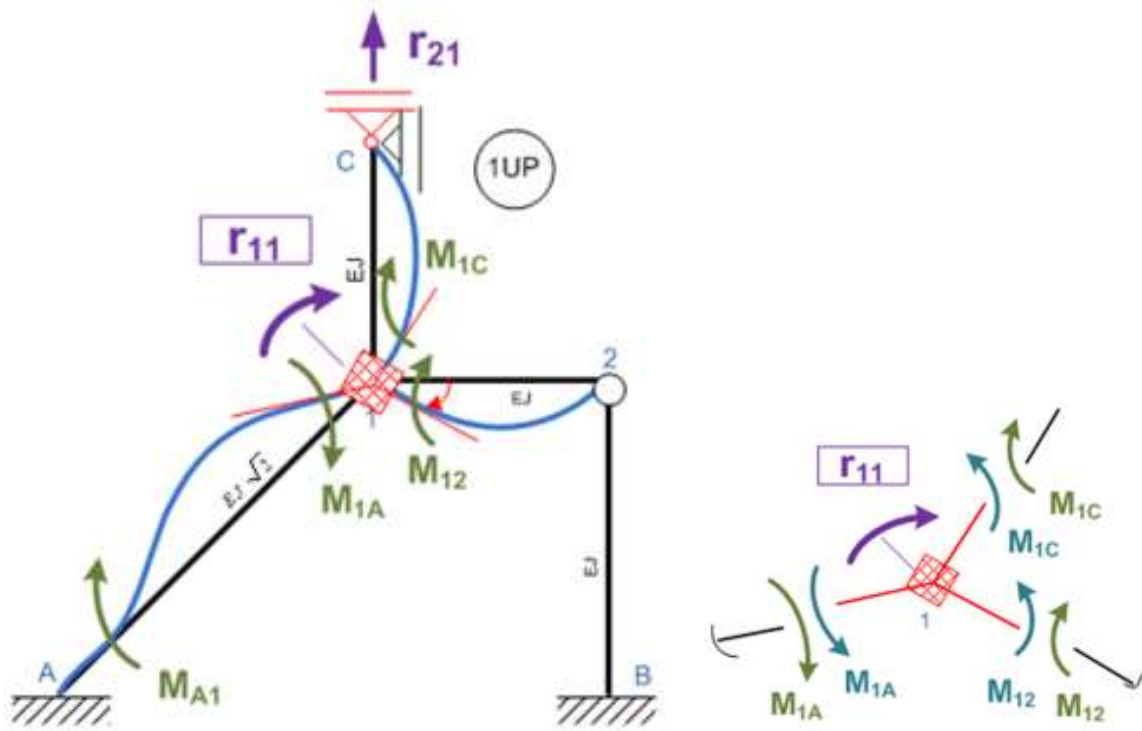
Wartości momentów przywęzłowych wyznaczone na podstawie wzorów transformacyjnych (tzw. sztywności giętkie) wynoszą:

$$M_{1A} = \frac{4EJ_{1A}}{l_{1A}} = \frac{4EJ\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = EJ$$

$$M_{A1} = \frac{2EJ_{1A}}{l_{1A}} = \frac{EJ}{2} \quad M_{1C} = \frac{3EJ_{1C}}{l_{1C}} = \frac{3EJ}{3} = EJ$$

$$M_{12} = \frac{3EJ_{12}}{l_{12}} = \frac{3EJ}{3} = EJ$$

(5)



Rys. 11 Reakcje w więzach fikcyjnych w 1UP oraz sposób wyznaczenia reakcji r_{11} . Uwaga zwroty reakcji i wymuszanych przemieszczeń muszą być zgodne.

$$r_{11} = M_{1A} + M_{12} + M_{1C}$$

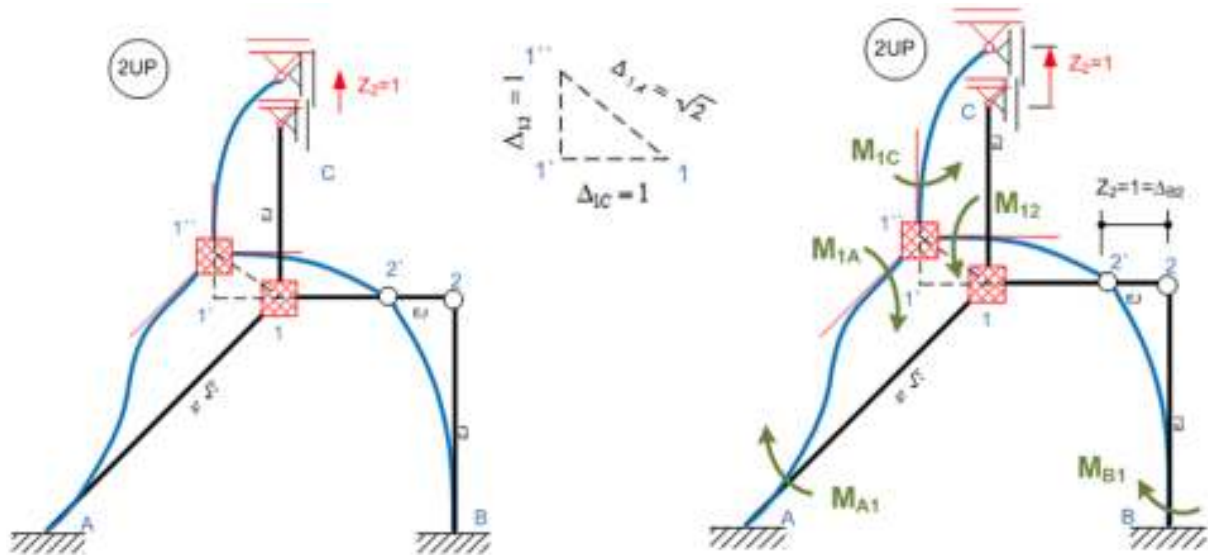
$$r_{11} = EJ + EJ + EJ = 3EJ$$

$$r_{21} = r_{12}$$

(6)

Drugi układ pomocniczy:

Drugi układ pomocniczy rozwiązujemy od niewiadomej na przesunięcie. Do wyznaczenia wartości momentów zginających w przekrojach przywęzłowych, zgodnie ze [wzorami transformacyjnymi](#), niezbędne jest wyznaczenie także wzajemne przemieszczeń końców prętów Δ_{ij} .



Rys. 12. Drugi układ pomocniczy. Deformacje oraz momenty w przekrojach przywęzłowych, działające „na pręt”, z zaznaczonymi rzeczywistymi zwrotami ustalonymi na podstawie deformacji prętów

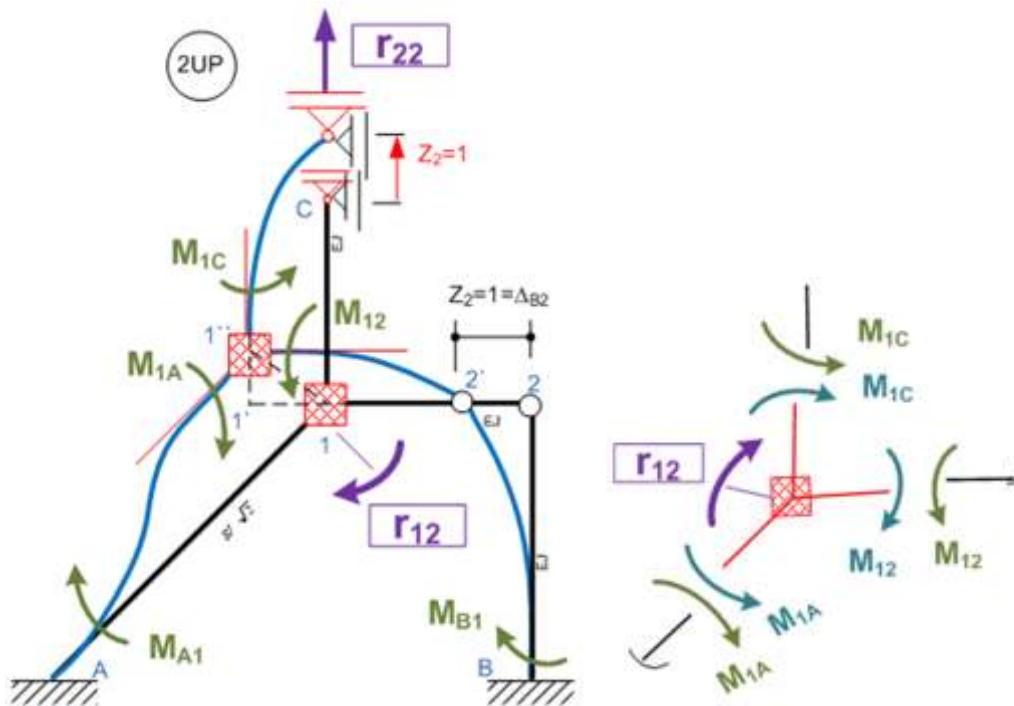
$$M_{14} = M_{A1} = \frac{6EJ_{14}}{l_{14}^2} \cdot \Delta_{14} = \frac{6EJ\sqrt{2}}{(4\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{8}EJ$$

$$M_{1C} = \frac{3EJ_{1C}}{l_{1C}^2} \cdot \Delta_{1C} = \frac{3EJ}{3^2} = \frac{EJ}{3}$$

$$M_{12} = \frac{3EJ_{12}}{l_{12}^2} \cdot \Delta_{12} = \frac{3EJ}{3^2} \cdot 1 = \frac{EJ}{3}$$

$$M_{B2} = \frac{3EJ_{B2}}{l_{B2}^2} \cdot \Delta_{B2} = \frac{3EJ}{4^2} = \frac{3EJ}{16}$$

(7)



Rys. 13 Reakcje w więzach fikcyjnych w 1UP oraz sposób wyznaczenia reakcji r_{12} . Uwaga zwroty reakcji i wymuszanych przemieszczeń muszą być zgodne.

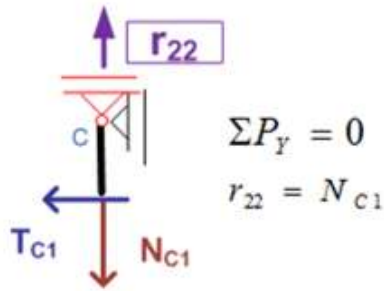
$$r_{12} = M_{1A} - M_{12} - M_{1C}$$

$$r_{12} = \frac{3EJ}{8} - \frac{EJ}{3} - \frac{EJ}{3} = -\frac{7EJ}{24} = r_{21}$$

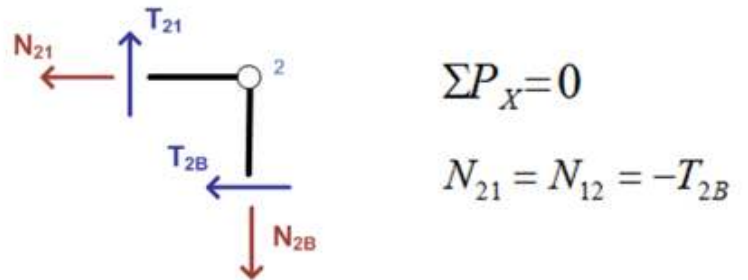
(8)

Wyznaczenie reakcji na podporze fikcyjnej r_{22} jest nieco trudniejsze. W pierwszej kolejności na podstawie warunków równowagi wybranych węzłów układany jest stosowny wzór (dla dodatnich zwrotów sił tnących T i sił osiowych N). Wzór ten wyraża zależność reakcji od sił tnących. Następnie na podstawie wyznaczonych z warunków równowagi prętów sił tnących określamy wartość reakcji r_{22} .

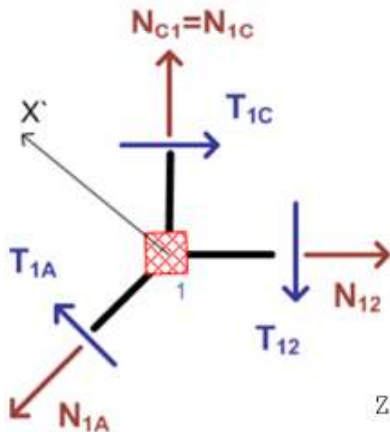
r_{22} obliczamy z warunków równowagi węzłów na podstawie sił T i N
a) węzeł C Zakładamy siły T i N o dodatnich zwrotach



c) węzeł 2



b) węzeł 1



$$\Sigma P_{X'} = 0$$

$$T_{1A} - T_{1c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{1c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - T_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

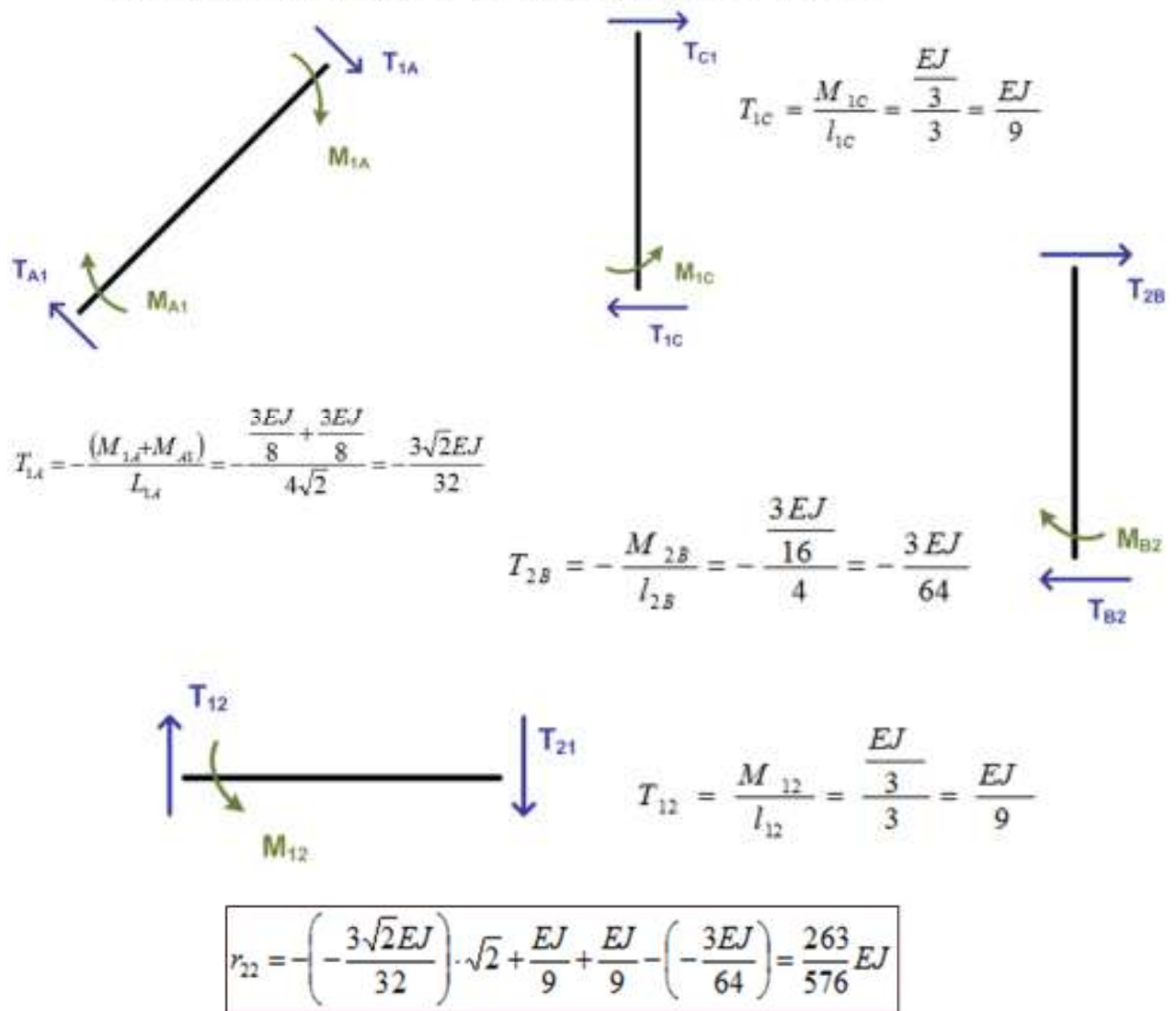
$$N_{1c} = -T_{1A} \cdot \sqrt{2} + T_{1c} + T_{12} + N_{12} = 0$$

Zatem na podstawie a), b) i c) mamy wzór na r_{22} :

$$r_{22} = -T_{1A} \cdot \sqrt{2} + T_{1c} + T_{12} - T_{2B}$$

Rys. 14 Wyznaczenie wzoru określającego reakcję r_{22} na podstawie sił tnących w 2UP

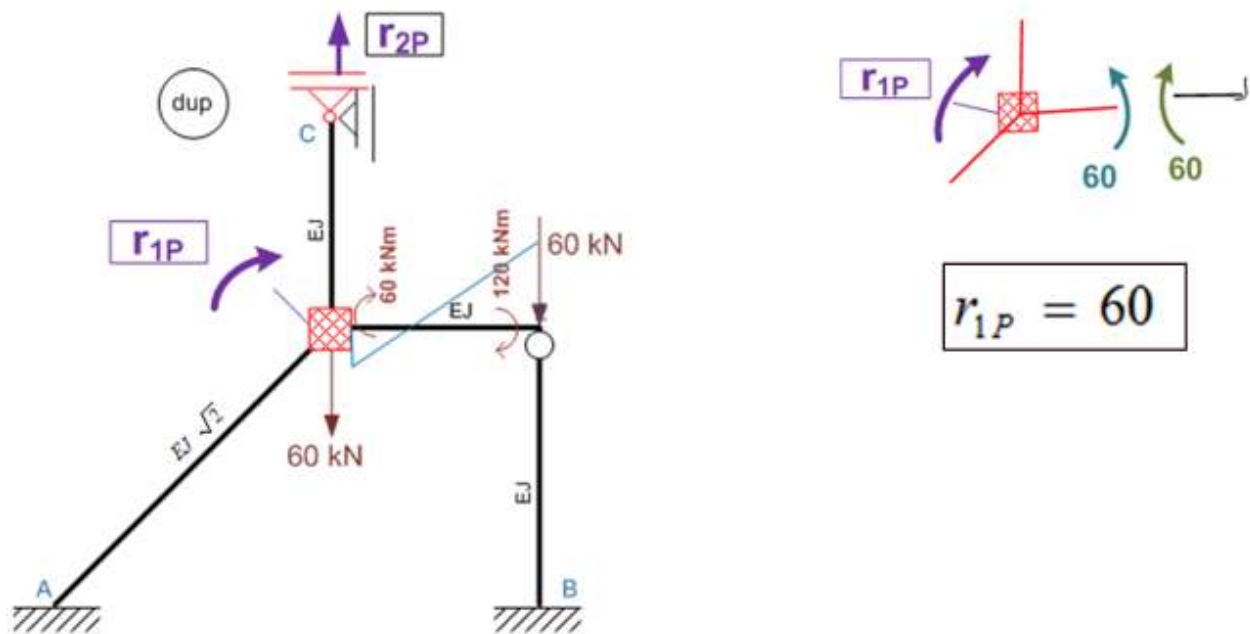
siły tnące w 2UP wyznaczmy z momentów zginających:



Rys. 15. Wyznaczenie wartości reakcji r_{22} na podstawie sił tnących w 2UP

Dodatkowy układ pomocniczy:

Dodatkowy układ pomocniczy rozwiązujemy od zadanego obciążenia w zadaniu.



Rys. 15. Dodatkowy układ pomocniczy i wyznaczenie reakcji r_{1p}

Reakcję r_{2p} wyznaczamy z podobnego wzoru jak wzór na reakcję r_{22} w drugim układzie pomocniczym rozszerzonym o uwzględnienie siły $P=60$ kN- w węźle 1.



$$r_{2P} = -T_{1A} \cdot \sqrt{2} + T_{1C} + T_{12} - T_{2B} + 60$$

Na podstawie sił tnących wyznaczonych z momentów zginających mamy:

$$T_{1A} = T_{1C} = T_{2B} = 0 \quad T_{12} = -\frac{120 + 60}{3} = -60$$

czyli:

$$r_{2P} = 0 \cdot \sqrt{2} + 0 - 60 - 0 + 60 = 0$$

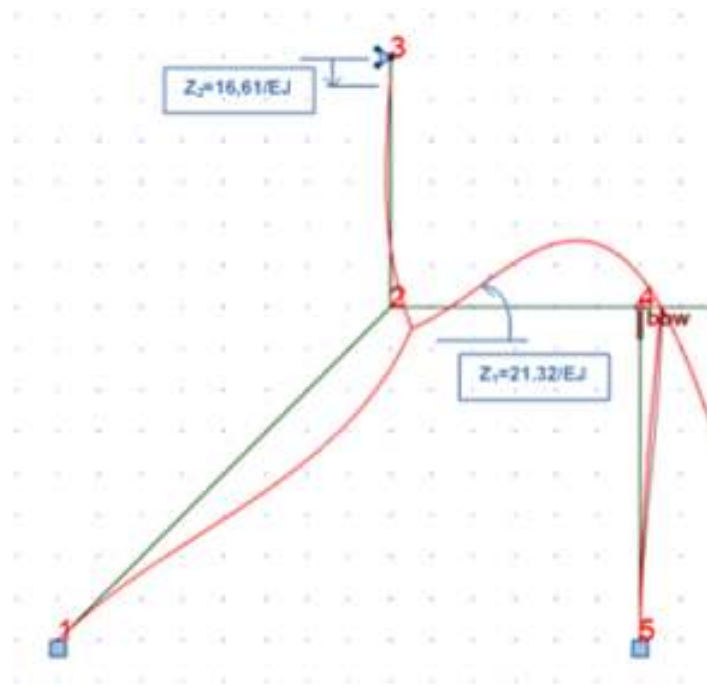
Rys. 16. Dodatkowy układ pomocniczy - wyznaczenie reakcji r_{2p}

Rozwiązanie wszystkich trzech układów pomocniczych pozwala nam zbudować układ równań kanonicznych MP (9) i go rozwiązać (10). Należy dodać, że układ ten wynika z warunków równowagi ustroju zapisanych względem niewiadomych geometrycznych.

$$\begin{bmatrix} 3EJ & -\frac{7}{24}EJ \\ -\frac{7}{24}EJ & \frac{263}{576}EJ \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 60 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

(9)

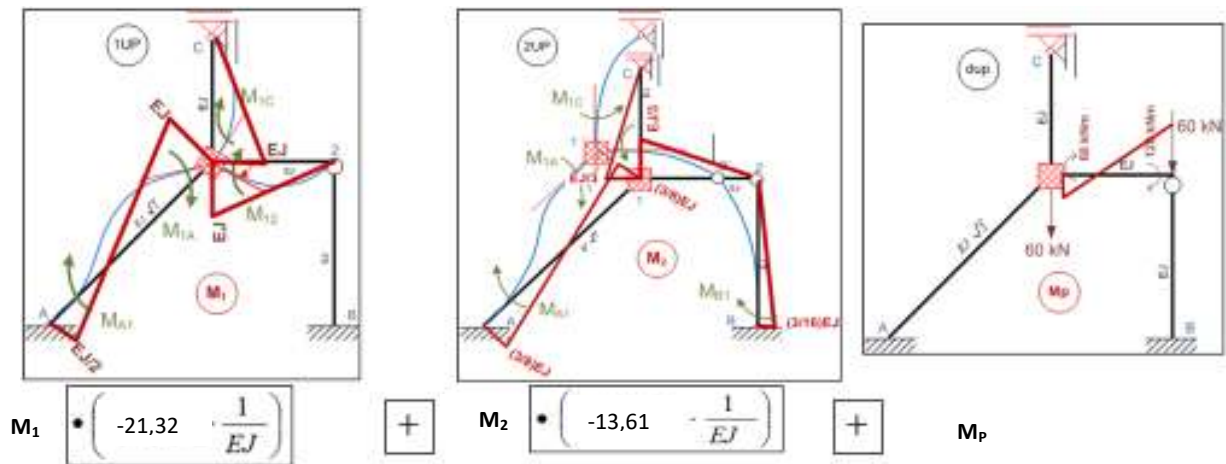
$$\begin{cases} Z_1 = -21,32 \cdot \frac{1}{EJ} & [m] \\ Z_2 = -13,61 \cdot \frac{1}{EJ} & [rad] \end{cases} \quad (10)$$



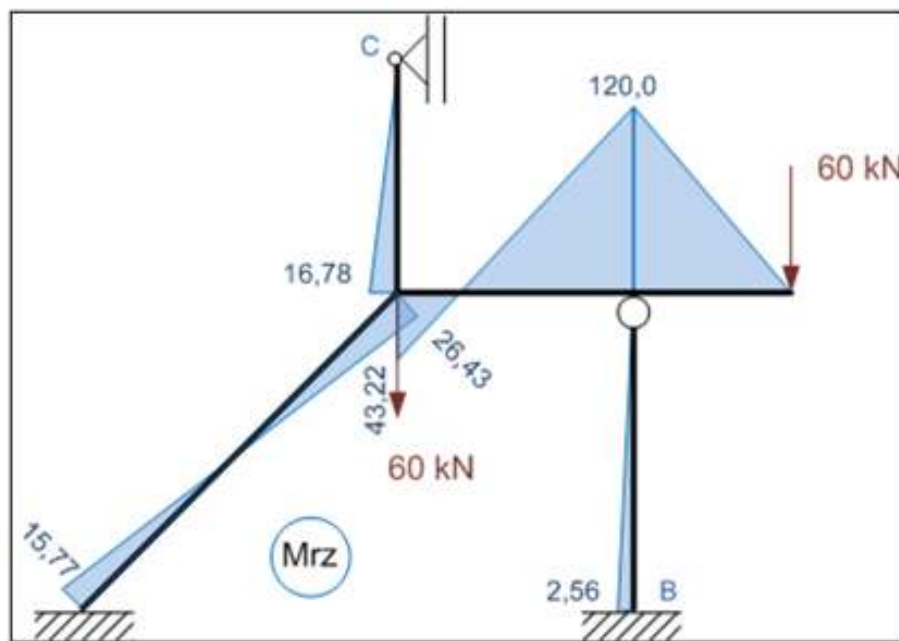
Rys. 16 . Interpretacja rozwiązania zadania w przemieszczeniach, wyznaczona w programie Robot

Wykres momentów rzeczywistych (rys. 18) uzyskamy poprzez superpozycję rozwiązań w poszczególnych układach pomocniczych - wykresów M_1 (w 1UP), M_2 (w 2UP) i M_P (w Dod. UP) przedstawionych poniżej wg następującej formuły:

$$M_{rz} = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + M_P \quad (11)$$



Rys. 17. Sposób wyznaczenia wykresu momentów rzeczywistych na podstawie sumy wykresów momentów w układach pomocniczych: 1UP i 2UP odpowiednio przemnożonych przez wyznaczone wartości niewiadomych Z_1 i Z_2 , oraz wykresu w układzie pomocniczym dodatkowym DodUP.

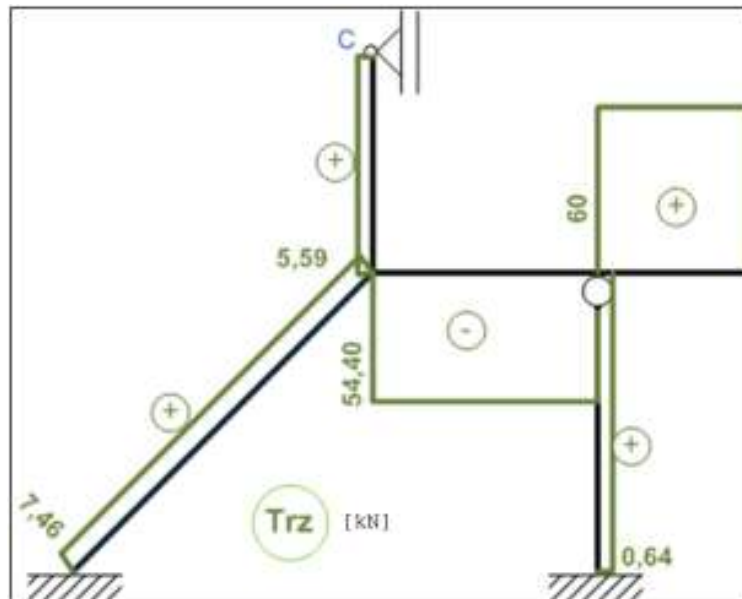


Rys. 18. Wykres momentów rzeczywistych

Wykres sił tnących uzyskamy z wykresu momentów rzeczywistych wycinając i równoważąc kolejne pręty siłami tnącymi-jak na rys. 19.

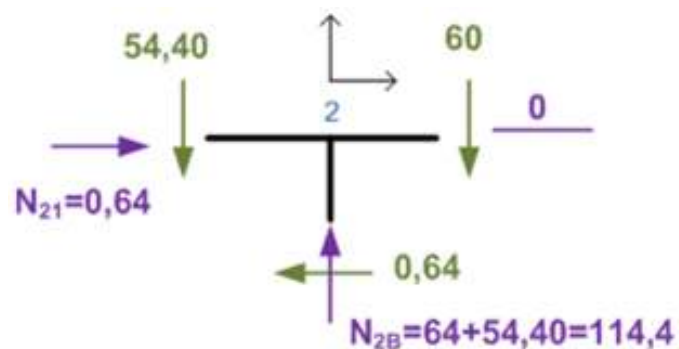


Rys. 19 Sposób wyznaczenia siły tnącej dla pręta 1-2 z wykresu momentów rzeczywistych

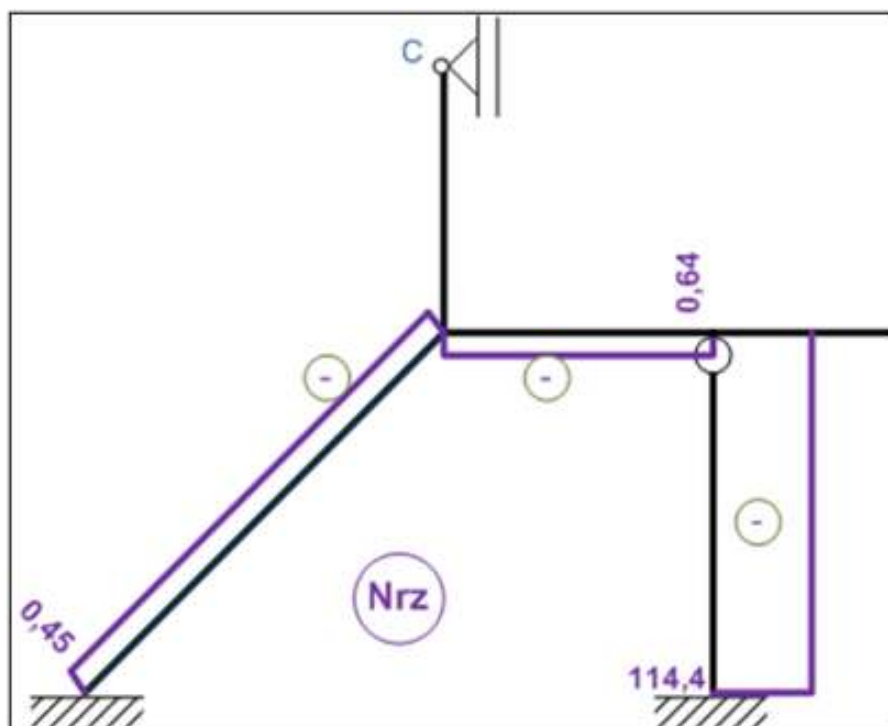


Rys. 20. Wykres rzeczywistych sił tnących

Z kolei wykres sił osiowych uzyskujemy z wykresu sił tnących poprzez równowagę węzłów –rys 21:



Rys. 21 Sposób wyznaczenia siły osiowej z wykresu sił tnących rzeczywistych



Rys. 22. Wykres rzeczywistych sił osiowych

Dodatek

Z podanego poniżej linku internetowego można pobrać zbudowany model układu rzeczywistego rozwiązanego programem *Robot Structural Analysis*

https://polslpl-my.sharepoint.com/:u:/g/personal/acincio_polsl_pl/ERqLwtMbONBFo6JMDn98-u0BTdrkSfgB6uNjAvwrlzXkzQ?e=XjaEXZ

Plik w formacie Robot 2020 (*.rtd) 772 kB

Literatura

- [1] Zdzisław Dyląg, Eugenia Krzemińska-Niemiec, Franciszek Filip, *Mechanika budowli t.I i II*, PWN, Warszawa
- [2] Ambroziak A, Kłosowski P., *Autodesk Robot Structural Analysis. Podstawy obliczeń*, skrypt Politechniki Gdańskiej, 2010 r.
- [3] Andrzej Cińcio, [Wprowadzenie do programu komputerowego Autodesk Robot Structural Analysis](#)
[Materiały dydaktyczne dla studentów Wydz. Budownictwa. Repolis Pol. Śl 2020](#)

Andrzej Cińcio, luty 2021 r