METODY STATYSTYCZNYCH W BADANIACH cz. I

ANALIZA NIEPEWNOŚCI PARAMETRÓW

Tomasz Liszka[1]

Wszystkie pomiary mogą być dokonywane tylko ze skończoną dokładnością i mimo staranności i precyzji ich wykonywania, narażone są na różnorodne niepewności. Powodem tego jest między innymi niedoskonałość przyrządów pomiarowych i nieprecyzyjność naszych zmysłów biorących udział w obserwacjach. Podawanie samego tylko wyniku pomiaru jest niewystarczające, opracowanie pomiarów winno zawierać także miarę ich wiarygodności, czyli **niepewność pomiaru**. Z potrzeby rozwiązania powyższych problemów powstała teoria niepewności pomiaru (zwana również rachunkiem błędu pomiaru). Jej zadaniem jest badanie, oszacowanie wielkości tych niepewności, znajdowaniu ich źródeł i sposobu ich redukcji. Opracowanie to jest uzupełnieniem wykładu „Metody statystyczne w badaniach" prowadzonego dla studentów przez autora. W dalszej części zostaną przedstawione najważniejsze rezultaty teorii niepewności wykorzystujące metody statystyczne przedstawione w ramach prowadzonego wykładu. Teoria niepewności pomiaru (rachunek błędów) nie jest osobną dziedziną nauk ścisłych, jest raczej zbiorem metod pozwalających na matematyczne podejście do analizy i oceny niepewności pomiarowych. Jej metody i rezultaty są wykorzystywane w naukach przyrodniczych oraz wszędzie tam gdzie dokonuje się pomiarów.

Przyglądając się bliżej przeprowadzanym pomiarom możemy zauważyć zjawisko nieuchronnego występowania niepewności pomiarów. Aby lepiej zrozumieć to zjawisko musimy odpowiedzieć na pytanie co to jest błąd czy niepewność pomiaru. W naukach przyrodniczych błąd nie jest rozumiany jako *pomyłka, byk, gafa,* ale jako niemożliwa do uniknięcia niepewność występująca w każdym pomiarze. Nie jesteśmy

[1]dr inż. Tomasz Liszka, Wydział Budownictwa Politechniki Śląskiej w Gliwicach
e-mail: tomasz.liszka@polsl.pl, identyfikator ORCID:000-0003-0939-7828

w stanie tego zjawiska wyeliminować, możemy jedynie strać się znajdować źródła tych niepewności, oszacować ich wielkość oraz podjąć próby ich zmniejszenia. To są główne zadania teorii niepewności pomiaru (rachunku bledów). Zanim zostaną przedstawione metody statystyczne modelowania niepewności pomiarów konieczne jest przedstawienie podstawowych definicji błędów i ich rodzajów.

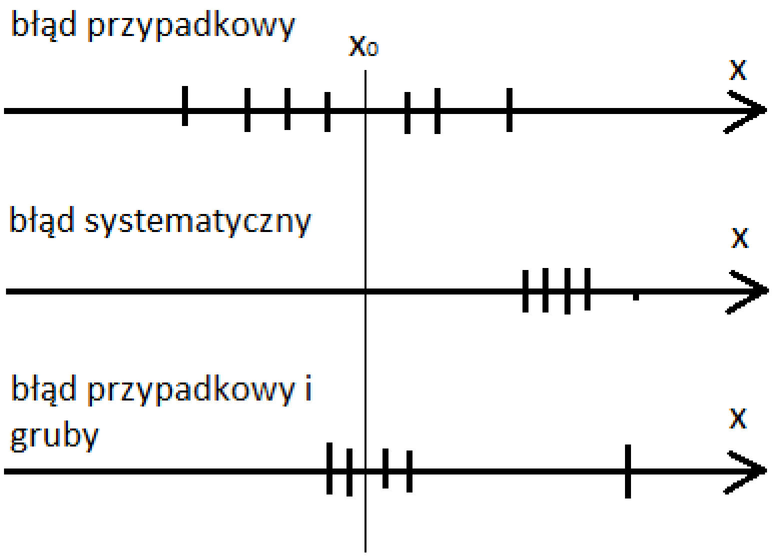
Potocznie słowa „błąd” i „niepewność” są używane wymiennie. Analiza błędów pomiarowych rozróżnia te pojęcia. W znaczeniu tej teorii przez błąd pomiaru rozumiemy różnicę między wartością zmierzoną x_i i rzeczywistą x_0, błąd pomiaru = x_i - x_0. I tu bezpieczniejszym określeniem odnośnie x_0 jest raczej wartość oczekiwana, np. jeżeli wynikiem pomiaru jest wartość pewnej stałej wielkości fizycznej (np. moduł Younga), to tą wartością x_0 będzie wartość z tablic, wartości x_i. to wyniki pomiarów. Czynimy przy tym założenie, że wartość rzeczywista x_0 istnieje. W praktyce wartość x_0 nie jest znana i wtedy możemy ją utożsamiać z wynikiem pomiaru wykonanego przy pomocy innej, znacznie dokładniejszej metody. Na podstawie tej definicji możemy postawić wniosek, że wartość mierzona różni się od wartości rzeczywistej. Analizując wzajemną relację między wartością rzeczywistą x_0 i szeregiem wartości x_i uzyskanych w eksperymencie, możemy spodziewać się trzech rodzajów błędu pomiaru: błąd przypadkowy (losowy), błąd systematyczny i błąd gruby.

Przy błędzie przypadkowym obserwujemy rozrzut wyników pomiaru wokół wartości x_0. Wynik kolejnego pomiaru jest inny, przy czym występuje w przybliżeniu taka sama szansa uzyskania wyników zarówno większych, jak i mniejszych od x_0. Najczęściej źródłem błędu przypadkowego jest niedokładność i przypadkowość działania ludzkich zmysłów. Wykonując kolejny pomiar człowiek wykona go nieco inaczej, stąd powstanie statystyczny rozrzut wyników. Na przykład wyniki pomiaru czasu przy użyciu stopera cechuje pewien rozrzut pomimo tego, że sam stoper chodzi równo. Źródłem statystycznego rozrzutu wyników pomiaru mogą być też szumy generowane w samym układzie pomiarowym i zakłócenia zewnętrzne.

Błąd systematyczny występuje, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wartościami zmierzonymi a wartością rzeczywistą, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki lub nie występuje w ogóle. Jeżeli np. za pomocą taśmy mierzymy odległość latem w temperaturze wyższej niż temperatura komparacji tej taśmy, to stwierdzimy występowanie systematycznej różnicy, tej samej przy kolejnym powtarzaniu pomiaru.

O błędzie grubym mówimy, gdy różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą jest duża lub drastycznie duża. Błąd gruby pojawia się na skutek nieumiejętności użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczytywaniu i zapisie wyników itp. Błąd gruby możemy utożsamiać z pomyłką lub gafą.

Poniższy rysunek przedstawia serie pomiarów, w których wystąpiły przedstawione typy błędów.



Błędy systematyczne i grube nie maja charakteru losowego i nie możemy do ich oszacowania stosować metod statystycznych, niemniej teoria błędu przedstawia metody oszacowania niepewności takich pomiarów. W tej pracy autor skupia się na metodach statystycznych modelowania niepewności pomiarów, a takim podlegają błędy przypadkowe.

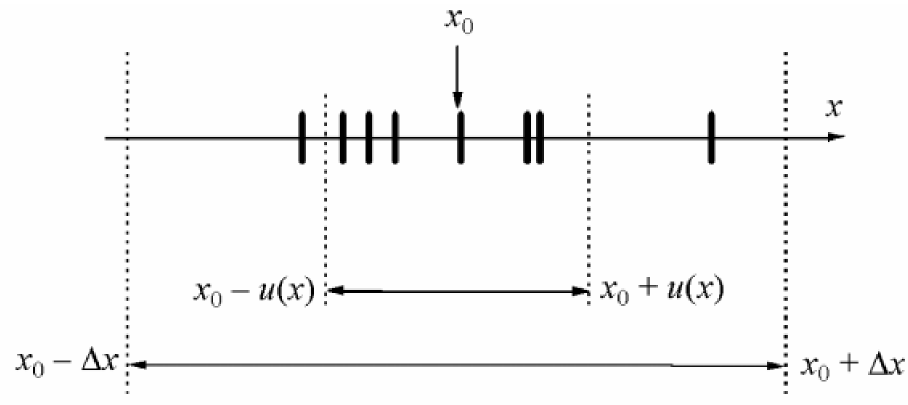
Opis statystycznych metod modelowania niepewności pomiarów musimy rozpocząć od zdefiniowania charakteryzujących go miar. Błąd pomiaru zdefiniowany wzorem $\Delta x_i = x_i - x_0$ nie możemy traktować jako miarę dokładności metody pomiarowej, gdyż podobny pomiar, ale wykonany innym przyrządem, w innym czasie i miejscu, przez inna osobę, da inną wartość. Zatem Δx_i jest liczbą losową, której wartości przewidzieć się nie da, tak jak nie można przewidzieć rezultatu rzutu kostką, mamy jedynie pewność, że liczba wyrzuconych oczek zawiera się w zbiorze liczb całkowitych od 1 do 6.

Celem tej pracy jest przedstawienie metod statystycznych rachunku niepewności pozwalających na oszacowanie rozrzutu wyników pomiarów i miarą tego rozrzutu jest niepewność pomiaru. Dalej niepewność pomiaru będzie rozumiana jako parametr związany z rezultatem pomiaru charakteryzującym rozrzut wyników tego pomiaru. Dla określenia niepewności pomiaru bezpośredniego wykorzystujemy dwie miary: pierwsza to niepewność standardowa u(x), drugą miarą przydatną w określonych sytuacjach jest niepewność graniczna Δx.

W przypadku niepewności granicznej Δx staramy się określić przedział $[x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x]$, w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiaru x_i, aktualnie wykonane i przyszłe. Niepewność graniczna jest miarą deterministyczną, gdyż twierdzimy, że wartość prawdziwa zawarta jest na pewno w przedziale $x_0 \pm \Delta x$. Niepewność graniczna jest stosowana w określonych sytuacjach, np. jako miara dokładności przypadku gdy mamy do czynienia z pomiarem, w którym mamy tylko jedną a nie serię zmierzonych wartości, kiedy do oceny niepewności stosujemy dokładność urządzeń pomiarowych (ocena błędów systematycznych) oraz do oceny jakości niepewności standardowej. Zaletą takiej definicji niepewności jest to, że znamy dokładnie zakres niepewności (choć nie zawsze), i w dalszej analizie tak uwzględniając niepewność uwzględniamy niejako wszystkie możliwe przypadki (jesteśmy po stronie bezpiecznej z inżynierskiego punktu widzenia), lecz takie podejście może prowadzić do znacznego przeszacowania rezultatów. Musimy sobie odpowiedzieć czy koniecznym jest uwzględnienie wszystkich niepewności czy ograniczyć się tylko do niepewności najbardziej prawdopodobnych, których miarą jest odchylenie standardowe.

Niepewność standardowa jest oszacowaniem odchylenia standardowego wyników pomiaru. Jest miarą dokładności pomiaru najpowszechniej stosowaną do oszacowania błędów przypadkowych, ma charakter losowy, a co się z tym wiąże, możemy zastosować metody statystyczne do oszacowania tej niepewności. Przy obliczaniu tej niepewności czynimy założenie, że pomiary są zmiennymi losowymi (przypadkowy charakter błędów pomiarowych) a ich rozrzut charakteryzuje parametr zwany odchyleniem standardowym. Odchylenie standardowe zdefiniować można jako pierwiastek z średniej wartości kwadratu różnicy wartości zmierzonej i rzeczywistej. Z racji tego, że pomiary traktujemy jako próbę z populacji wszystkich możliwych pomiarów, dokładnej wartości odchylenia standardowego nie znamy, niepewność standardowa jest tylko jego oszacowaniem (estymatorem, oceną), a do obliczenia wielkości tej niepewności stosujemy estymatory punktowe stosowane w teorii estymacji.

Graficzną interpretacją zależności pomiędzy niepewnością graniczną i standardową przedstawia poniższy rysunek.



Niepewność standardowa u(x) jest miarą średniego odchylenia wyników pomiarów od wartości rzeczywistej, zatem część wyników (około 1/3) znajdziemy poza przedziałem [$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x$]. W dalszym ciągu tekstu niepewność będziemy traktować jako niepewność standardową. Niepewność u(x) posiada taki sam jak wymiar mierzonej wielkości.

Niepewnością względną nazywamy stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej, u(x)/x. Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową, często wyrażaną w %. Takie przedstawienie daje lepsze wyobrażenie o dokładności pomiaru oraz pozwala na porównanie niepewności wielkości fizycznych posiadających różny wymiar.

Niepewność standardową możemy traktować jako miarę dokładności pomiaru rozumiejąc to tak, że pomiar dokładniejszy, to pomiar o mniejszej niepewności. Mamy dwie podstawowe metody szacowania niepewności pomiaru bezpośredniego: metoda typu A oraz typu B.

Ocena niepewności typu A może być stosowana w pomiarach, w których występuje błąd przypadkowy oraz dysponujemy do analizy serią n obserwacji $x_1, ..., x_i, ..., x_n$ Traktujemy je jako n-elementową próbę zmiennej losowej x o wartości oczekiwanej $\mu = x_0$ oraz odchyleniu standardowym σ. Do obliczenia przybliżonych wartości tych parametrów wykorzystujemy rezultaty teorii estymacji. W wielu sytuacjach wartość x_0 nie jest znana i w tej sytuacji za jej wartość możemy przyjąć wartość średniej arytmetycznej próby, która zgodnie z teorią estymacji jest najlepszym oszacowaniem wartości oczekiwanej:

$$x_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Do oszacowania rozrzutu wyników pomiaru możemy skorzystać z estymatora odchylenia standardowego,

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}.$$

Wielkość S_x można by utożsamiać z niepewnością pomiaru, gdybyśmy za jego wynik przyjęli którąkolwiek z wartości x_i, lecz w tej analizie naszym celem jest oszacowanie niepewności średniej z próby. Zgodnie z teorią estymacji średnia z próby ma rozkład normalny N(μ, $\sigma/\sqrt{n}$), dlatego też, estymator odchylenia standardowego średniej obliczymy ze wzoru:

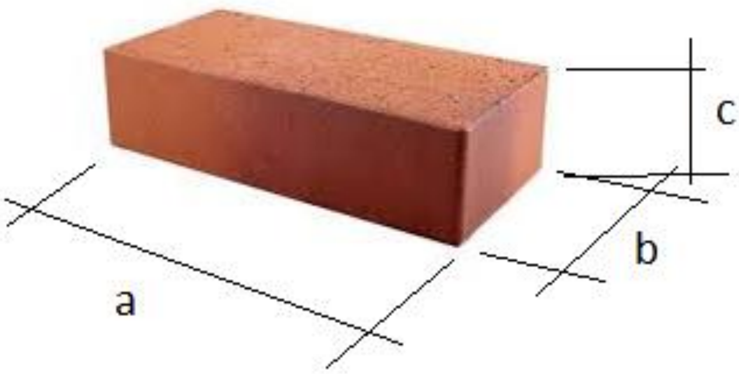
$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Łącząc ze sobą powyższe wzory otrzymujemy:

$$u(x) = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Przykład

Zmierzono wymiary cegły pełnej taśmą mierniczą w centymetrach z dokładnością do 1mm. Pomiary wykonano dla dziesięciu losowo wybranych cegieł. Wyniki pomiarów oraz obliczone niepewności pomiarów zestawiono w tabeli:



Wymiar cegły [cm]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{x}$ [cm]	u(x) [cm]	$\frac{u(x)}{\bar{x}}$ %
a	25,0	24,9	25,2	24,8	24,7	25,2	25,0	25,4	24,6	24,8	24,96	0,08	0,32
b	12,2	12,4	11,8	11,6	11,7	12,4	12,0	12,0	11,8	12,0	11,99	0,09	0,73
c	6,7	6,9	6,3	6,1	6,2	6,9	6,5	6,5	6,3	6,5	6,49	0,09	1,35

Wielkości S_x oraz $S_{\bar{x}}$ nazywamy estymatorami dlatego, że choć obliczane z jednoznacznych wzorów, są równe prawdziwym wartościom odchylenia standardowego tylko w granicy $n \to \infty$. Gdy liczba pomiarów n jest skończona, odchylenie standardowe średniej, czyli niepewność pomiaru, znamy tylko ze skończoną dokładnością. Wyniki pomiarów traktujemy jako zmienne losowe, dlatego, musimy mieć świadomość, że dla każdej innej realizacji pomiarów uzyskamy inną wartość niepewności. Powtarzanie pomiaru przynosi zatem dwie korzyści: zmniejsza niepewność spowodowaną błędem przypadkowym i umożliwia oszacowanie niepewności. Uważa się, że dla określenia odchylenia standardowego z dokładnością rzędu 30 ÷ 20%, trzeba wykonać co najmniej 5 do10 pomiarów. Na ogół nie opłaca się wykonywanie zbyt dużej liczby pomiarów, gdyż zwiększenie dokładności ze wzrostem n jest powolne. Wykonywanie zupełnie małej liczby pomiarów, na przykład 2 lub 3, ma sens tylko jako sprawdzian powtarzalności i tu lepiej często stosować ocenę typu B.

Ocena niepewności typu B stosowana jest, gdy statystyczna analiza serii obserwacji nie jest możliwa. Na przykład dla błędu systematycznego lub gdy występuje błąd przypadkowy, ale dysponujemy tylko jednym rezultatem pomiaru. Najczęściej ocena typu B dotyczy określenia niepewności wynikających ze skończonej dokładności przyrządów pomiarowych. Przy ocenie niepewności typu B możemy bazować między innymi na:

– danych z pomiarów poprzednich,

– doświadczeniu i wiedzy nt. przyrządów i obiektów mierzonych,

– informacji producenta przyrządów,

– niepewności przypisanym danym zaczerpniętym z literatury.

Przy braku powyższych przesłanek jako „dokładność” możemy przyjąć wartość najmniejszej działki skali, zwanej dalej działką elementarną (u(x)~ działka elementarna). Jej wartość wynosi dla: linijki 1 mm, suwmiarki 0,05 mm, śruby mikrometrycznej 0,01 mm, termometru lekarskiego 0,1°C, dla poziomic 0,5mm/m=0,029^o itp.

Niniejsza praca jest wstępem do szerszej analizy metod statystycznych stosownych w teorii niepewności pomiarów.

Bibliografia:

1. Z. Hellwig, Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN
2. W. Kolonecki, Statystyka dla inżynierów, PWN
3. J. R. Taylor, Wstęp do analizy błędu pomiarowego, PWN
4. S. Brandt, Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych, PWN