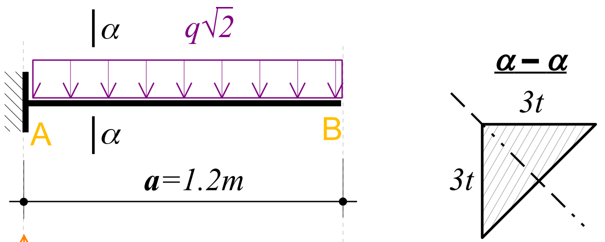
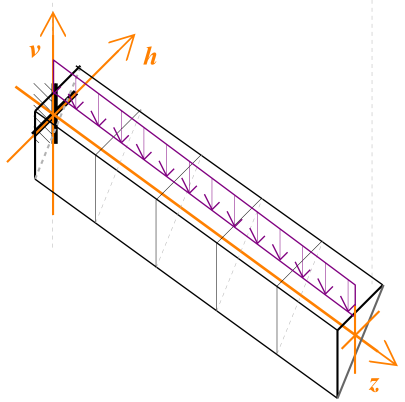
Zad. 1. Sporządzić wykres naprężeń stycznych w przekroju ekstremalnym:



a = 1.2 m
q = 10 kN/m
t = 4 cm



Wypadkowymi naprężeń stycznych τ są działające w przekroju pręta siły tnące V_x i V_y (poprzeczne do osi pręta w kierunku obu osi głównych przekroju OX i OY) oraz moment skręcający M_o (kręcący wokół osi podłużnej pręta OZ prostopadłej do przekroju). Naprężenia styczne od ścinania obliczamy wg wzoru Żurawskiego:

$$\tau(y)=\frac{\pm\left|V_y\cdot S_x^*(y)\right|}{I_x\cdot b^*(y)} \qquad \tau(x)=\frac{\pm\left|V_x\cdot S_y^*(x)\right|}{I_y\cdot h^*(x)}$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\frac{M_x\cdot y}{I_x}-\frac{M_y\cdot x}{I_y}$$

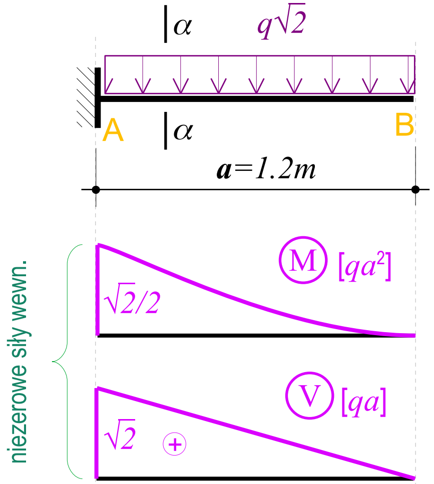
Naprężenia styczne od skręcania natomiast wg:

$$\tau(\rho)=\frac{M_o\cdot\rho}{I_o}$$

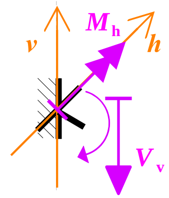
W przeciwieństwie do naprężeń normalnych $\sigma(x,y)$ nie ma jednego wzoru na wypadkowe naprężenia styczne gdyż nie opisuje ich jedna powierzchnia lecz kombinacja powierzchni parabolicznych oraz stożkowej. Naprężenia ścinania w obu kierunkach można by wyrazić jednym wzorem: $\tau^2(x,y)=\tau^2(x)+\tau^2(y)$, jako dwu prostopadłych składowych. Jednakże uwzględnienie ewentualnego wpływu skręcania $\tau(\rho)$ wymagałoby dodawania wektorów w odniesieniu do $\tau(x,y)$ i $\tau(\rho)$ w każdym punkcie (x,y) z osobna, ze względu na zmienny kierunek $\tau(\rho)$.
Jednak obciążenie jest przyłożone w płaszczyźnie osi pręta i tutaj nie ma skręcania!

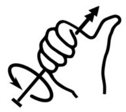
Siły poprzeczne V (tnące) są związane z momentami zginającymi M jako ich pochodna. Gdy tylko momenty nie są funkcją stałą to istnieją w tym miejscu niezerowe tnące. Wyjątkiem jest miejsce ekstremum momentów, gdzie siły poprzeczne – jako ich pochodna - zerują się.

a) Najpierw trzeba sprawdzić, które siły wewnętrzne, decydujące o naprężeniach stycznych V, M_o są niezerowe oraz gdzie i jakie mają ekstrema:

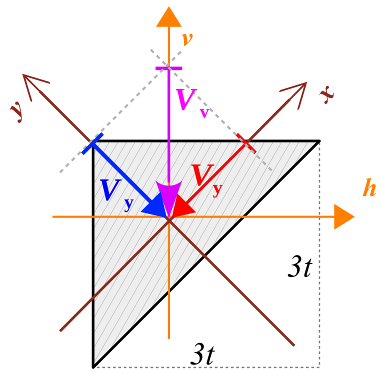


Jak widać oprócz niezerowych momentów zginających mamy tu do czynienia tylko z niezerowymi siłami poprzecznymi (tnącymi), działającymi na kierunku pionowym V_v. Siłę poprzeczną V_v działającą w przekroju pręta należy zrzutować na kierunki osi głównych otrzymując siły tnące V_x i V_y w kierunku obu osi głównych!
Mamy więc tutaj do czynienia ze ścinaniem w kierunku obu osi głównych:





grafika: Wikipedia



Do wzorów Żurawskiego potrzebujemy momentów bezwładności wzgl. obu osi głównych:

$$J_x=\frac{3/\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2})^3}{48}t^4=\frac{27}{8}t^4$$

$$J_y=\frac{3\sqrt{2}\cdot(3/\sqrt{2})^3}{36}t^4=\frac{9}{8}t^4$$

$$V_y=\frac{qa\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=qa$$

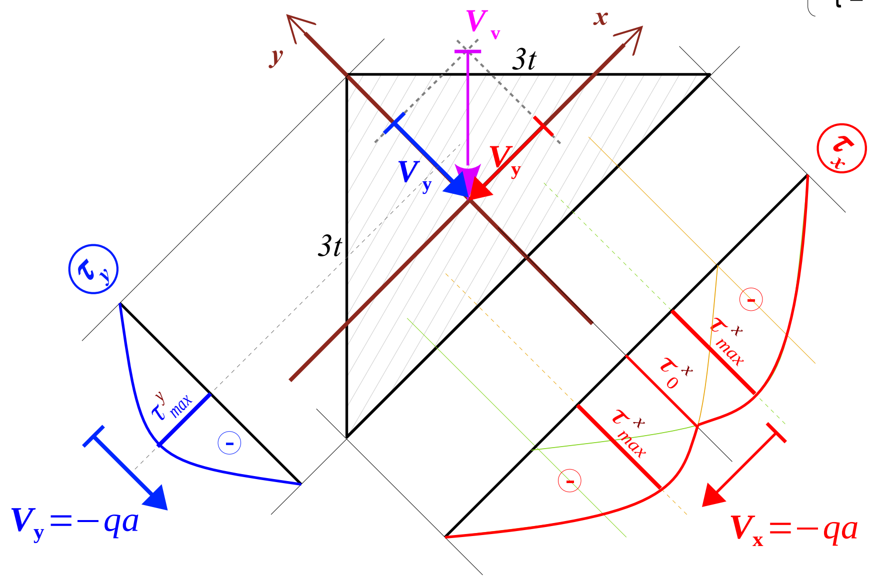
$$V_x=\frac{qa\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=qa$$

Ad. 1. Sporządzić wykres naprężeń stycznych w przekroju ekstremalnym:

Najpierw przygotujemy szkice naprężeń (bez wartości i jednostek) w obu kierunkach . Robiąc od razu wykres naprężeń, wpisalibyśmy na nim obliczone rzędne a tylko przy ekstremum dodali symbol τ_{max} .

Tutaj jednak pozwolę sobie zrobić szkice naprężeń wraz z odpowiednimi opisami:

$$\begin{cases} a = 1.2 \text{ m} \\ q = 10 \text{ kN/m} \\ t = 4 \text{ cm} \end{cases}$$



Mając już gotowe szkice możemy łatwo wskazać rzędne, które są niezbędne:

- na kierunku ścinania OX: τ^x_0 i τ^x_{max}
- na kierunku ścinania OY: τ^y_{max}

I tylko te rzędne wymagają wyznaczenia.

Robiąc ostateczny wykres trzeba będzie praktycznie przerysować powyższy szkic zamieniając oznaczenia rzędnych na wartości liczbowe i uzupełniając o jednostkę w nawiasie kwadratowym przy symbolu wykresu.

Gdyby to jednak było zadanie projektowe, to szkice byłyby dowodem i uzasadnieniem wyboru miejsc przekroju dla których naprężenia osiągają ekstrema i wymagają uwzględnienia w projektowaniu wytrzymałościowym.

Wykorzystując wzory Żurawskiego:

$$\tau(y) = \frac{\pm\left|V_y \cdot S^*_x(y)\right|}{I_x \cdot b^*(y)} \qquad \tau(x) = \frac{\pm\left|V_x \cdot S^*_y(x)\right|}{I_y \cdot h^*(x)}$$

obliczymy niezbędne 3 rzędne wykresów naprężeń stycznych, które okazały się konieczne po wykonaniu szkiców: τ^y_{max} na kierunku OY oraz τ^x_0 i τ^x_{max} na kierunku OX.

Mamy odpowiednie składowe sił poprzecznych działające na kierunku obu osi oraz wyznaczyliśmy już momenty bezwładności względem obu osi głównych:

ścinanie na kierunku OY: $\begin{cases} J_x = \frac{27}{8} t^4 \\ V_y = qa \end{cases}$ ścinanie na kierunku OY: $\begin{cases} J_y = \frac{9}{8} t^4 \\ V_x = qa \end{cases}$

Brakuje nam jeszcze dwóch pozostałych elementów do tych wzorów dla 3 rzędnych:

a) *szerokości cięcia* – czyli szerokości przekroju, mierzone w kierunku prostopadłym do odpowiedniej siły poprzecznej, na wysokości punktu, dla którego chcemy wyznaczyć rzędną wykresu naprężeń stycznych:

τ^y_{max} : τ^x_{max} : τ^x_0 :

$$b^y_{max}\left(y = \frac{t}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3t\sqrt{2} = \frac{3t}{2}\sqrt{2}$$

$$b^x_{max}\left(x = \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3t}{\sqrt{2}} = \frac{9t}{8}\sqrt{2}$$

$$h^x_0(x = 0) = \frac{3t}{2}\sqrt{2}$$

Są to *szerokości ciecia*, gdyż tymi włóknami „odcinamy” część przekroju, dla której obliczamy drugą niezbędną we wzorze wielkość.

b) *momenty statyczne odciętych części* przekroju S*=A*y*, które są iloczynem pola odciętej części oraz współrzędnej środka ciężkości tego pola:

$$S^{max}_x\left(y = \frac{t}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot b^y_{max} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3t}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{3t^2}{16} \cdot b^y_{max}$$

$$S^{max}_y\left(x = \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot h^x_{max} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{9t}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{63}{64} t^2 \cdot h^x_{max}$$

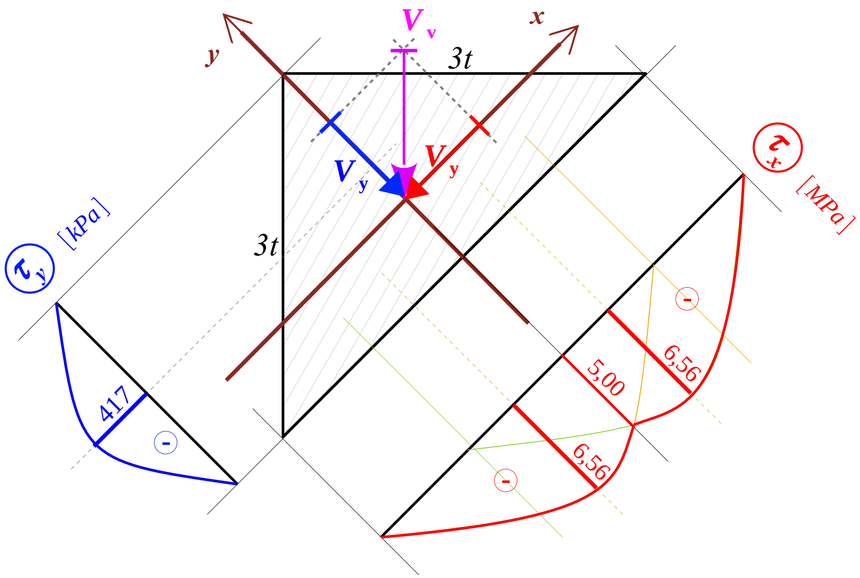
$$S^0_y(x = 0) = \frac{1}{2} \cdot h^x_0 \cdot \frac{3t}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} t^2 \cdot h^x_0$$

Jak się okazuje szerokość cięcia można wyciągnąć poza iloczyn co uprości obliczenia.

Ad. 1. Sporządzić wykres naprężeń stycznych w przekroju ekstremalnym:

Ze szkicu naprężeń stycznych wynika ile i których rzędnych (w których punktach) potrzebujemy obliczyć dla sporządzenia wykresu – co zrobiono obok.

Ostatecznie wykresy naprężeń stycznych przyjmują postać jak poniżej:



Zwracam tutaj uwagę na odniesienie wykresów do przekroju oraz jego charakterystycznych punktów. Pochodzenie znaków na wykresie naprężeń stycznych wymaga osobnych wyjaśnień. Wiąże się to zarówno ze znakiem naprężeń stycznych jak i przyjętym układem współrzędnych przekroju oraz zwrotu trzeciej osi OZ układu współrzędnych, odpowiadającej osi pręta. Zakłada się tutaj, że układ współrzędnych jest prawoskrętny – czyli obrót o dodatni kat pomiędzy osiami OX i OY spowodowałby wkręcanie prawoskrętnej śruby skierowanej zgodnie z osią OZ.
Wówczas, jeśli ustalony na podstawie znaku sił tnących zwrot siły poprzecznej w przekroju pręta jest zgodny z dodatnią półosią wzdłuż, której ta siła poprzeczna działa, to wywołuje ona dodatnie naprężenia. Jeśli jednak tak ustalony zwrot siły poprzecznej będzie przeciwny do dodatniego zwrotu półosi to jej naprężenia styczne ujemne..

Podstawiamy do wzorów:

$$\tau(y)=\frac{\pm\left|V_y\cdot S_x^*(y)\right|}{I_x\cdot b^*(y)} \qquad \tau(x)=\frac{\pm\left|V_x\cdot S_y^*(x)\right|}{I_y\cdot h^*(x)}$$

ustalone wielkości statyczne i geometryczne przekroju:

ścinanie na kierunku OY: $\begin{cases} V_y=qa \\ J_x=\frac{27}{8}t^4 \end{cases}$ ścinanie na kierunku OY: $\begin{cases} V_x=qa \\ J_y=\frac{9}{8}t^4 \end{cases}$

oraz wielkości charakterystyczne dla punktów, w których obliczamy rzędne naprężeń:

τ^y_{max}: $\begin{cases} b^y_{max}=\frac{3t}{2}\sqrt{2} \\ S^{max}_x=\frac{3t^2}{16}\cdot b^y_{max} \end{cases}$ τ^x_{max}: $\begin{cases} h^x_{max}=\frac{9t}{8}\sqrt{2} \\ S^{max}_y=\frac{63}{64}t^2\cdot h^x_{max} \end{cases}$ τ^x_0: $\begin{cases} h^x_0=\frac{3t}{2}\sqrt{2} \\ S^0_y=\frac{3}{4}t^2\cdot h^x_0 \end{cases}$

ostatecznie otrzymując wartości naprężeń:

$$\tau^y_{max}\left(y=\frac{t}{6}\right)=-\left|\frac{V_y\cdot S^{max}_x}{J_x\cdot b^y_{max}}\right|=\frac{-qa\cdot\frac{3t^2}{16}\cdot b^y_{max}}{\frac{27t^4}{8}\cdot b^y_{max}}=-\frac{qa}{18t^2}=-417\frac{KN}{m^2}$$

$$\tau^x_{max}\left(x=\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=-\left|\frac{V_x\cdot S^{max}_y}{J_y\cdot h^x_{max}}\right|=\frac{-qa\cdot\frac{63t^2}{64}\cdot h^x_{max}}{\frac{9t^4}{8}\cdot h^x_{max}}=-\frac{7qa}{8t^2}=-6{,}56\frac{MN}{m^2}$$

a = 1.2 m
q = 10 kN/m
t = 4 cm

$$\tau^x_0(x=0)=-\left|\frac{V_x\cdot S^0_y}{J_y\cdot h^x_0}\right|=\frac{-qa\cdot\frac{3t^2}{4}\cdot h^x_{max}}{\frac{9t^4}{8}\cdot h^x_{max}}=-\frac{2qa}{3t^2}=-5{,}00\,MPa$$

które wpisujemy na wykresy, pamiętając o oznaczeniu wybranych jednostek np. [MPa].