O naprężeniach normalnych s(x,y) w przekroju decydują trzy siły wewnętrzne:
- osiowa N
- obie składowe momentu zginającego $M(M_x,M_y)$

W przypadku zginania prostego (jednokierunkowego) niezerowa jest wyłącznie jedna ze składowych momentu zginającego $M_x\neq 0$ lub $M_y\neq 0$, dlatego wzór na naprężenia a jednocześnie i warunek wytrzymałościowy może przyjąć postać:

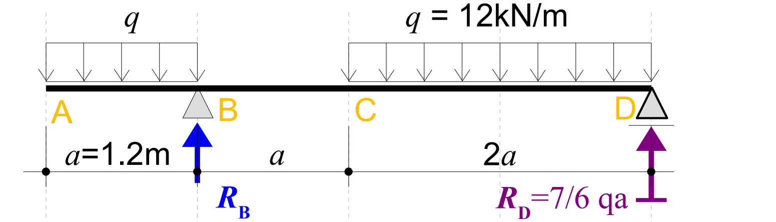
$$\sigma(x,y)=\cancel{\frac{N}{A}}+\frac{M_x\cdot y}{I_x}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\leq f_? \qquad \sigma(x,y)=\cancel{\frac{N}{A}}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\frac{M_y\cdot x}{I_y}\leq f_?$$

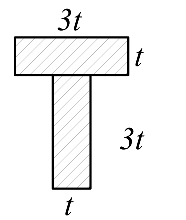
czyli:

$$\sigma(y)=+\frac{M_x\cdot y}{I_x}\leq f_? \quad \text{lub} \quad \sigma(x)=-\frac{M_y\cdot x}{I_y}\leq f_?$$

To które składowe czy momentu zginającego $M(M_x,M_y)$ są niezerowe zależy od położenia wektora momentu (z podwójnym grotem) względem osi układu głównych centralnych współrzędnych w przekroju.

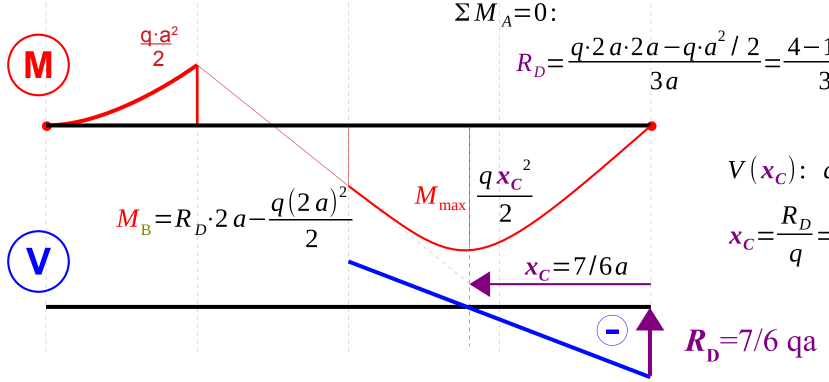
Zad. 1. Zwymiarować przekrój belki: f_c = 24 MPa, f_t = 36 MPa





$$\Sigma M_A=0:$$

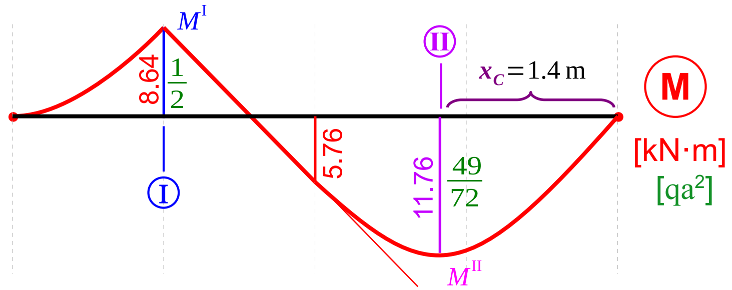
$$R_D=\frac{q\cdot 2a\cdot 2a-q\cdot a^2/2}{3a}=\frac{4-1/2}{3}qa=\frac{7}{6}qa$$



$$V(x_C):\; q\cdot x_D-R_C=0$$

$$x_C=\frac{R_D}{q}=\frac{7/6\,qa}{q}=\frac{7}{6}a$$

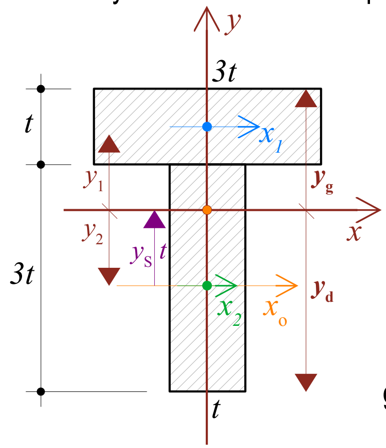
Postępując tak, jak pokazano powyżej, określono wykres momentów zginających M:



$M^{I}=8.64$ kNm

$M^{II}=11.67$ kNm

Mamy dwie skrajne wartości momentów rozciągające albo włókna górne M^{I} albo włókna dolne M^{II}. Zobaczmy jak te momenty są położone w stosunku do głównych centralnych osi bezwładności przekroju $\alpha-\alpha$ (*geometria mas*):



środek ciężkości:

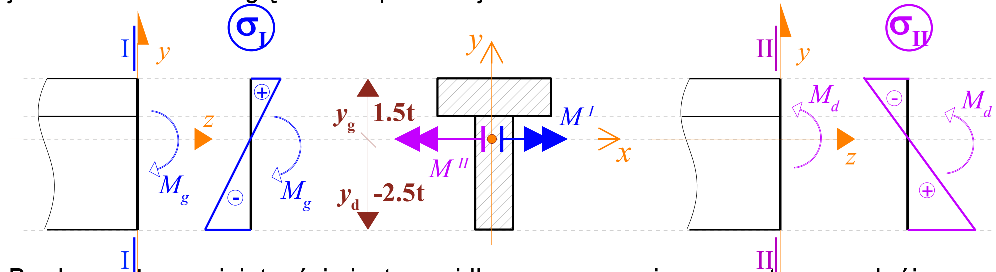
$$y_S=\frac{3t^2\cdot 2t}{3t^2+3t^2}=+t \qquad y_1=2t-t=+t \qquad y_g=+1.5t$$
$$y_2=\;0-t=-t \qquad y_d=-2.5t$$

momenty bezwładności:

$$\cancel{J_y=\frac{3^3+3}{12}t^4=\frac{5}{2}t^4} \qquad J_x=\frac{3+3^3}{12}t^4+[3(\pm 1)^2\,t^4]\cdot 2=\frac{17}{2}t^4$$

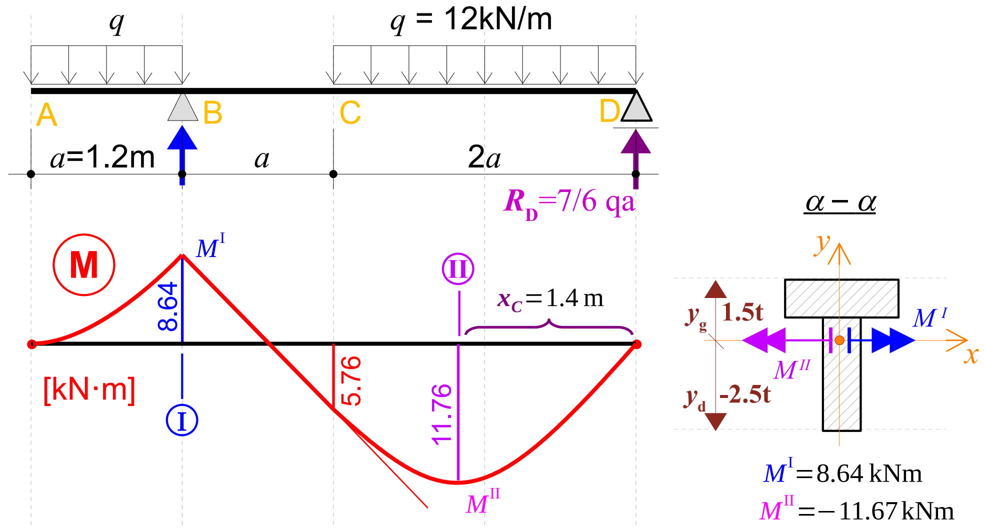
Ponieważ OY jest osią symetrii więc ona jest też osią główną centralną a druga oś centralna jest osią główną.

Oba ekstremalne momenty wrysowane w przekrój wskazują na zginanie proste – jednokierunkowe względem osi poziomej OX:



Bardzo ważną umiejętnością jest prawidłowe wrysowanie momentu w przekrój – na kierunku odpowiedniej osi i z odpowiednim zwrotem (wg reguły prawej dłoni).

Ad. 1. Zwymiarować przekrój belki: f_c = 24 MPa, f_t = 36 MPa



Znakowanie momentów M_x wynika z porównania wektorów ze zwrotem osi OX.

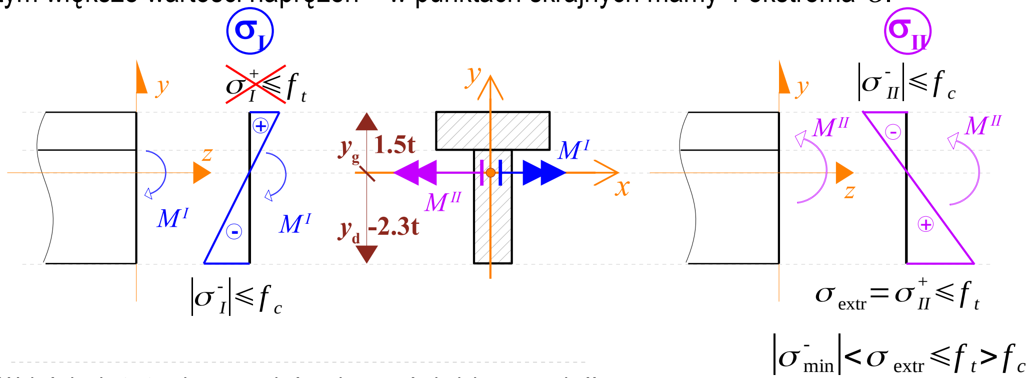
Mamy więc dwa przekroje zagrożone: **I** rozciągany u góry i **II** rozciągany u dołu, przy czym większy moment zginający znajduje się w przekroju drugim $M^I < M^{II}$.

Oba momenty działają względem osi poziomej OX mamy więc niezerową składową M_x a odpowiadający temu wzór naprężeń normalnych to:

$$\sigma(y) = +\frac{M_x \cdot y}{I_x} \leqslant f_?$$

Wg tego wzoru wykonano poniższe szkice naprężeń.

Patrząc na szkice naprężeń w obu przekrojach widać, że im dalej od środka ciężkości tym większe wartości naprężeń – w punktach skrajnych mamy 4 ekstrema σ.



Wyjaśnienia te trzeba rozumieć a nie uczyć się ich na pamięć!

Mamy więc dwa zagrożone przekroje i w każdym z nich dwa ekstrema – w sumie cztery warunki wytrzymałościowe do sprawdzenia. Nie ma jednak konieczności uwzględniania aż 4 warunków!

Jeśli jedna z trzech par wielkości jest równa: (1) wytrzymałości $f_t \neq f_c$, (2) współrzędne skrajne $y_d \neq y_g$ lub (3) ekstrema $M_g \neq M_d$, to zadanie redukuje się do jednego warunku: $\sigma_{extr} \leq f_?$!

Nawet jeśli wszystkie te pary wielkości są różne to zawsze można wykluczyć jeden z warunków:

Mamy po dwa warunki wytrzymałościowe o tych samych znakach – po przeciwnych stronach przekroju w obu przekrojach.

Wartość naprężeń (wg podanego wzoru) rosną proporcjonalnie do wartości momentu oraz do współrzędnej włókien skrajnych.

Jeśli σ_{II}^+ jest naprężeniem ekstremalnym gdyż odpowiada większemu momentowi M_{II} i większej (dolnej) współrzędnej y_d włókien skrajnych, to warunek wytrzymałościowy odpowiadający drugiemu dodatniemu naprężeniu $\sigma_I^+ < f_t$ (z mniejszym Momentem i mniejszą współrzędną) można zignorować, gdyż jest bez znaczenia!

Drugi warunek z tym samym znakiem naprężeń co naprężenie ekstremalne σ_{extr} ale z mniejszym momentem i współrzędna jest zawsze bez znaczenia a sprawdzenia wymagają tylko 3 warunki!

Może się jednak zdarzyć, że ekstremalne naprężenie trzeba porównać z mniejszą z wytrzymałości. Wówczas cała zadanie zredukowałoby się do jednego warunku z σ_{extr} !

Niestety to nie jest ten przypadek, na co wskazuje relacja pomiędzy wytrzymałościami:

$$|\sigma_{min}^-| < \sigma_{extr} \leqslant \underline{f_t > f_c}$$

Gdyby zachodziła tu następująca relacja :

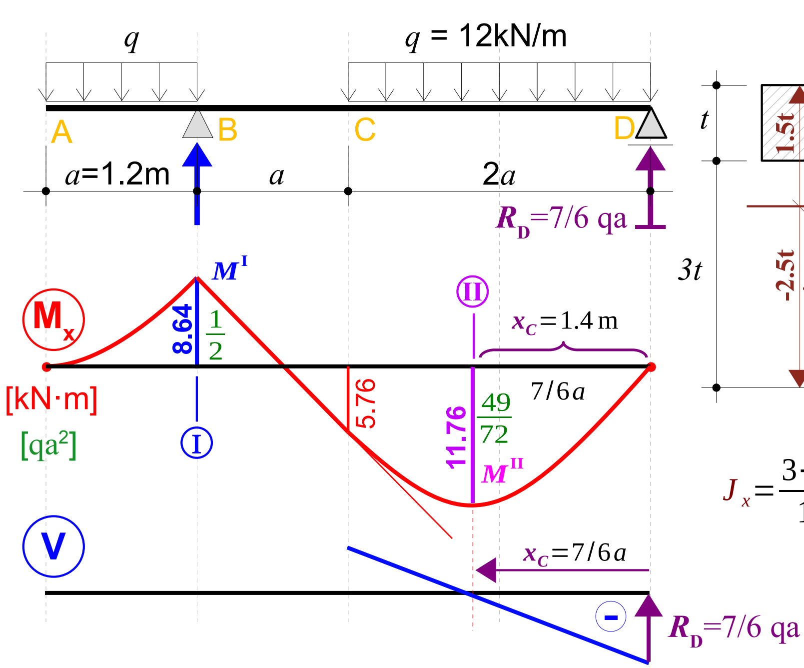
$$|\sigma_{min}^-| < \underline{\sigma_{extr}} \leqslant \underline{f_t} < f_c$$

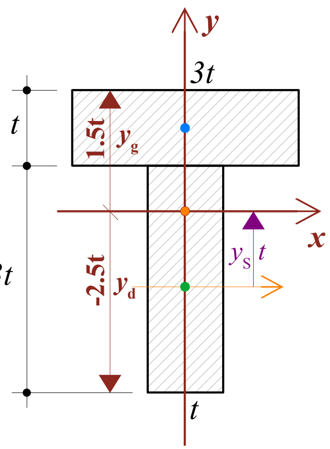
albo w innym zadaniu – o ujemnym ekstremum relacja

$$\sigma_{max}^+ < \underline{|\sigma_{extr}^-|} \leqslant \underline{f_c} < f_t$$

To sprawdzalibyśmy <u>**tylko jeden warunek – ten dla większych na wartość bezwzględną naprężeń i mniejszej z wytrzymałości**</u> !

Ad. 1. Zwymiarować przekrój belki: f_c = 24 MPa, f_t = 36 MPa α – α

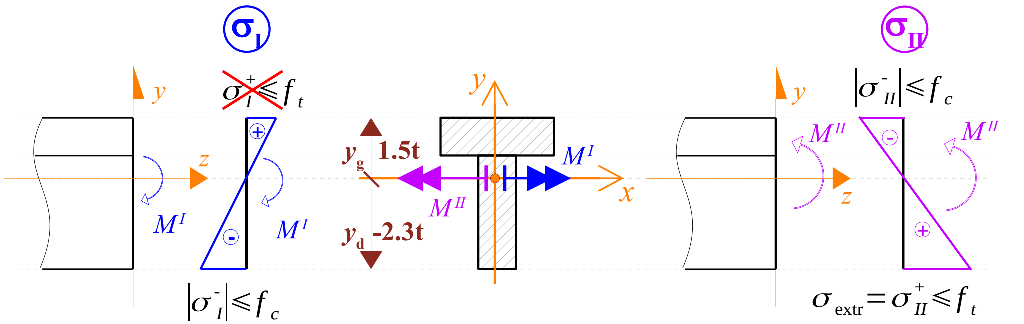




$$J_x=\frac{3+3^3}{12}+(3\cdot1^2)\cdot2=$$
$$=\frac{17}{2}t^4=8.5t^4$$

Wybór niezbędnych warunków wytrzymałościowych do sprawdzenia: $\left|\sigma(y)=\frac{M_x\cdot y}{I_x}\right|\le f_?$

Ponieważ zarówno momenty M^I i M^{II}, jak i współrzędne włókien skrajnych y_d i y_g oraz wytrzymałości f_c i f_t są różne, więc na pewno można wyeliminować jeden z czterech warunków – ten odpowiadający ekstremum naprężeń $\sigma_I^+<f_t$ liczonemu dla mniejszego momentu M^I i mniejszej współrzędnej y_g :



$$|\sigma^-_{min}|<\sigma_{extr}\le f_t>f_c$$

Eliminowany warunek dotyczy najmniejszego z ekstremów. Drugi warunek z tym samym znakiem dotyczy naprężenia $\sigma_{II}^+<f_t$ z większym z momentów M^{II} i większą ze współrzędnych y_d a więc największego, na wartość bezwzględną, naprężenia spośród możliwych 4 ekstremów. Gdyby ono spotkało się z mniejszą z wytrzymałości:

$$\sigma_{extr}\le min(f_t,f_c)$$

to byłby to warunek decydujący – czyli jedyny konieczny do sprawdzenia!

Niestety mamy tu inną zależność: $|\sigma^-|<\sigma_{extr}=\sigma_{II}^+\le f_t>f_c$

Tak więc musimy sprawdzić wszystkie pozostałe 3 warunki wytrzymałościowe!

$$\sigma_{extr}=\sigma_{II}^+\le f_t \qquad |\sigma_{II}^-|\le f_c \qquad |\sigma_I^-|\le f_c$$

$$\frac{M^{II}\cdot y_d}{I_x}\le f_t \qquad \left|\frac{M^{II}\cdot y_g}{I_x}\right|\le f_c \qquad \left|\frac{M^I\cdot y_d}{I_x}\right|\le f_c$$

$$\frac{-49/72qa^2\cdot(-5/2t)}{17/2t^4}\le f_t \qquad \left|\frac{-49/72qa^2\cdot3/2t}{17/2t^4}\right|\le f_c \qquad \left|\frac{1/2qa^2\cdot(-5/2t)}{17/2t^4}\right|\le f_c$$

Zapis tych 3 warunków w podobnej formie umożliwia dalszą ich eliminację:

$$\frac{245qa^2\cdot t}{1224t^4}\le f_t \qquad \cancel{\frac{147qa^2\cdot t}{1224t^4}\le f_c} \qquad \frac{180}{1224}\frac{qa^2}{t^3}=\frac{36}{36}\cdot\frac{5qa^2\cdot t}{34t^4}\le f_c$$

$$\frac{245}{1224}\frac{qa^2}{t^3}\le f_t \qquad \frac{180}{1224}\frac{qa^2}{t^3}\le f_c$$

Powyższe warunki ciągle mogą służyć rozwiązaniu dowolnie sformułowanego zadania (wymiarowania przekroju, obciążenia dopuszczalnego lub rozpiętości a, obl. naprężeń).

$$0.2002\frac{qa^2}{f_t}\le t^3 \qquad 0.14706\frac{qa^2}{f_c}\le t^3$$

$$t^3\ge0.2002\cdot\frac{12\,kN/m\,(1.2\,m)^2}{36\,000\,kPa} \qquad t^3\ge0.14706\cdot\frac{0.12\cdot120^2}{2.4}\frac{kN/cm\cdot cm^2}{kN/cm}$$

$$t\ge0.04581\,m \qquad t\ge4.731\,cm$$

przyjęto: $\underline{\underline{t=48\,mm}}$

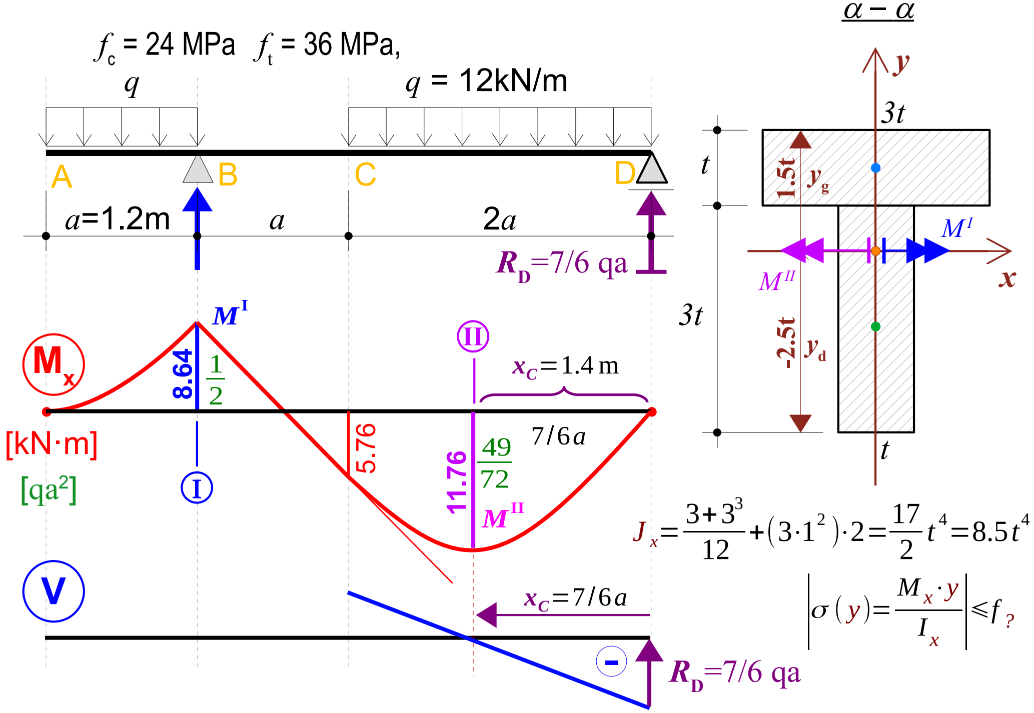
sprawdzenie :

$$\frac{-11.76\,kNm\cdot100\,cm/m\cdot(-2.5\cdot4.8\,cm)}{8.5\cdot4.8^4\,cm^4}\le f_t \qquad \frac{8.64\,kNm\cdot(-2.5)}{8.5\cdot0.048^3\,m^3}\le f_c$$

$$3.1276\frac{kNcm}{cm^3}\le36\frac{MN}{m^2} \qquad 22978\frac{kNm}{m^2}\le24\frac{MN}{m^2}$$

$$3.13\frac{kN}{cm^2}\le3.6\frac{kN}{cm^2}\ \surd \qquad 22.98\frac{MN}{m^2}\le24\frac{MN}{m^2}\ \surd$$

Ad. 1. Zwrot momentu w przekroju i inne ważne elementy związane ze zginaniem



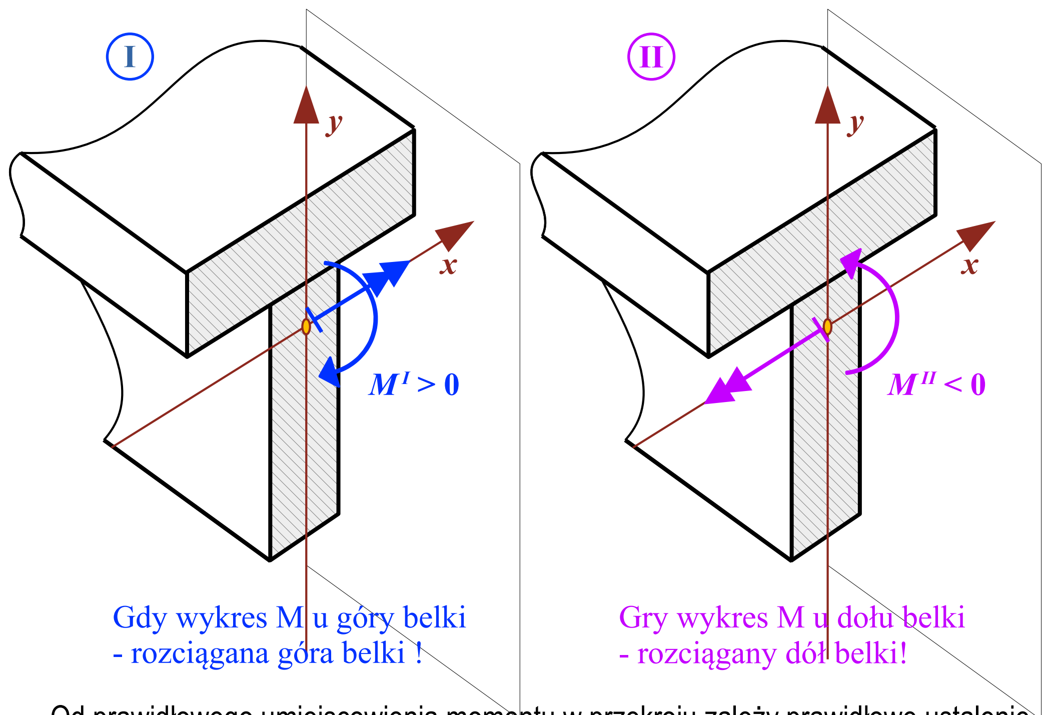
$$J_x=\frac{3+3^3}{12}+(3\cdot1^2)\cdot2=\frac{17}{2}t^4=8.5t^4$$

$$\left|\sigma(y)=\frac{M_x\cdot y}{I_x}\right|\leqslant f_?$$

Zwrot wektora momentu (z podwójnym grotem) w stosunku do osi przekroju:

Przekroje:

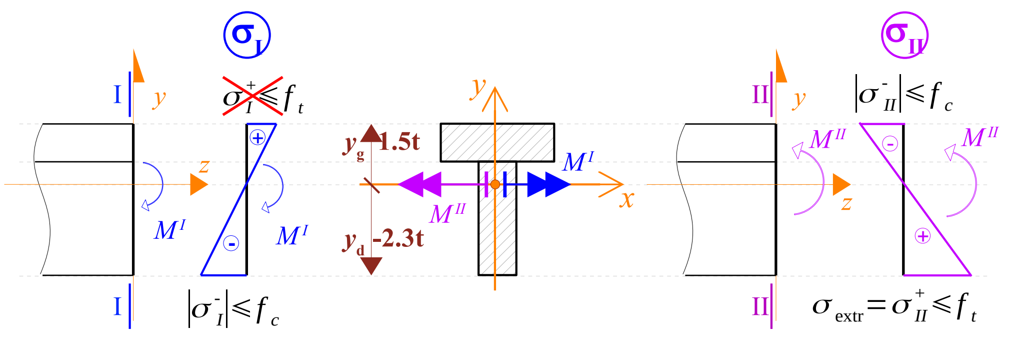
M^{I} = 1/2 qa^2 =8,64 kNm M^{II} = 49/72 qa^2 =11,76 kNm



Gdy wykres M u góry belki - rozciągana góra belki !

Gry wykres M u dołu belki - rozciągany dół belki!

Wykr. M odniesiony do przekroju wskazuje na zgnanie proste (jednokierunkowe) wzgl. osi OX. Momenty M^{I} i M^{II} nanosimy korzystając z zasady śruby prawoskrętnej. Poniższe szkice są obowiązkowe – pomagają w eliminacji zbytecznych warunków:

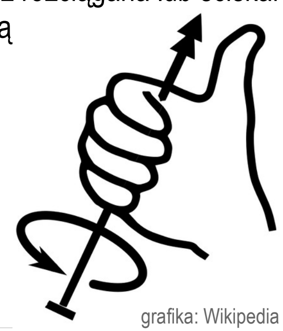


Szkice naprężeń są proporcjonalne do wartości momentów!

$$|\sigma_{min}^-| < \sigma_{extr} \leqslant f_t > f_c$$

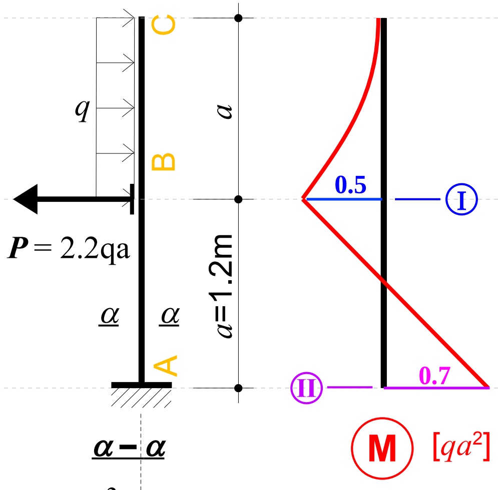
Od prawidłowego umiejscowienia momentu w przekroju zależy prawidłowe ustalenie znaku momentu! Jego znaku nie bierzemy z wykresu M! Zależy on od porównania położenia wektora M z podwójnym grotem ze zwrotem odpowiedniej osi głównej układu współrzędnych przekroju, względem której działa (kręci) dany moment M!

Tutaj mamy zginanie względem osi poziomej przekroju, gdyż rozciągana lub ściskana jest albo dolna albo górna część belki, oddzielone osią główną Działające w obu przekrojach momenty można łatwo wrysować na przekroju pamiętając o *zasadzie śruby prawoskrętnej*. Porównując sposób działania momentów na przycięte belki w widoku bocznym (zaznaczone jako łuki, tak aby rozciągały właściwą stronę belki) z zasadą śruby prawoskrętnej, można wyobrazić sobie położenie wektora momentu z podwójnym grotem w widoku od czoła przekroju.

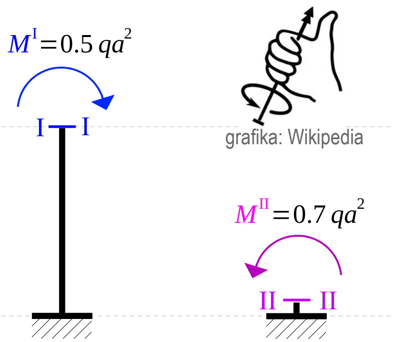


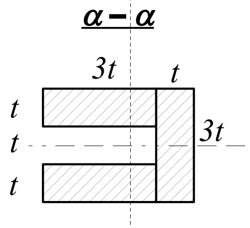
grafika: Wikipedia

Zad. 2. obliczyć dopuszczalne obciążenie belki: t =12cm f_c = 24 MPa f_t = 36 MPa

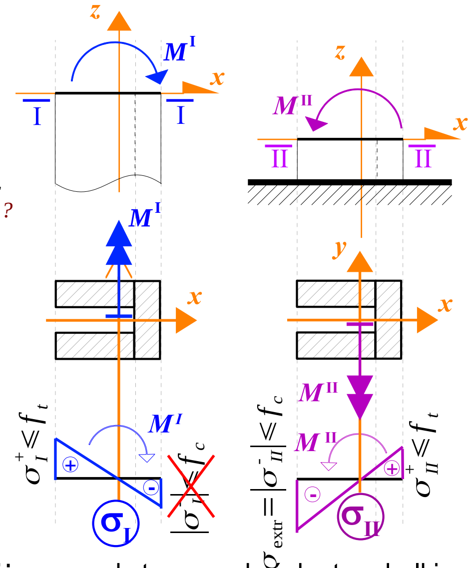


Momenty w przekrojach zagrożonych :





$$\left|\sigma(x) = -\frac{M_y \cdot x}{I_y}\right| \leqslant f_?$$



Patrząc na kierunek działania momentów zginających M^{I} i M^{II} w obu przekrojach widać, że mamy do czynienia ze zginaniem względem osi pionowej przekroju! Jest to oś główna, gdyż druga oś – oś pozioma jest osią symetrii. Mamy więc zginanie względem jednej osi głównej przekroju. Jest to więc zginanie jednokierunkowe (zwane prostym) wzgl. OY.

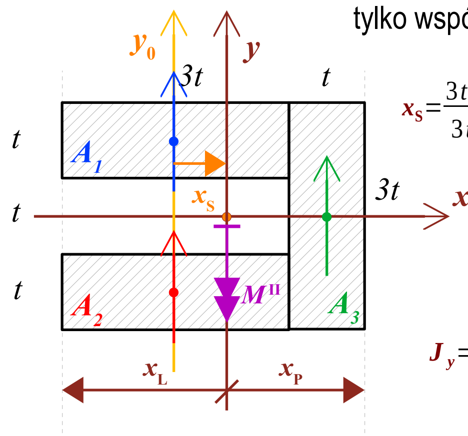
Z wykresu momentów zginających M wynika, iż mamy ekstrema z dwóch stron belki oraz że są one różne! Wytrzymałości materiału f_c i f_t też są różne! Jak widać z kształtu przekroju również współrzędne włókien skrajnych x^{L} i x^{P} liczone względem osi zginania OY są różne. **Skoro wszystkie 3 wielkości (M, f, współrzędne) decydujące o znaczeniu warunku wytrzymałościowego są różne, to można wyeliminować 1 spośród 4 warunków wytrzymałościowych a sprawdzić trzeba 3 pozostałe.**

Wiedząc, która współrzędna włókien skrajnych (lewych czy prawych) jest większa, a która mniejsza, można sprawdzić relację pomiędzy ekstremami naprężeń a wytrzymałościami materiału. W tym przykładzie ekstremum naprężeń odpowiada większemu z momentów M^{II} oraz x^{L} jako większej ze współrzędnych włókien skrajnych. Ekstremum naprężeń jest ujemne, więc zachodzi taki porządek zależności:

$$\sigma^{+}_{\max} < \sigma_{\mathrm{extr}} = |\sigma^{-}_{\min}| \leqslant f_c < f_t$$

Spełnienie wewnętrznego warunku powoduje więc automatyczne spełnienie warunku zewnętrznego (dla większych naprężeń dodatnich)! Trzy obowiązkowe warunki równowagi redukują się więc tu do jednego: $\sigma_{\mathrm{extr}} = |\sigma^{-}_{\min}| \leqslant f_c$

Ustaliwszy powyższe dowiemy się, które wielkości geometryczne trzeba obliczyć: tylko współrzędne x-owe oraz moment bezwładności J_y.



$$x_S = \frac{3t^2 \cdot 2t}{3t^2 \cdot 3} = +\frac{2}{3}t \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 - \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3}t \\ x_3 = 2t - \frac{2}{3}t = +\frac{4}{3}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_L = -\frac{13}{6}t \\ x_P = +\frac{11}{6}t \end{cases}$$

$$\left|\sigma(x) = -\frac{M_y \cdot x}{I_y}\right| \leqslant f_?$$ - zależnie od x

$$J_y = \frac{3^3 \cdot 2 + 3}{12} t^4 + 3t^2 \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2 + \left(+\frac{4}{3}\right)^2\right] t^2 = \frac{153}{12} t^4$$

Teraz wystarczy sprawdzić jedyny niezbędny - wytypowany powyżej warunek:

$$\sigma_{\mathrm{extr}} = |\sigma^{-}_{\min}| \leqslant f_c \qquad \left|-\frac{M_y \cdot x}{I_y}\right| \leqslant f_c$$

gdzie: $M_y = -M^{II}$ $\quad x = x_L = -\frac{13}{6}t$

gdyż M^{II} ma zwrot przeciwny do osi OY

$$\left|-\frac{M^{II} \cdot x_L}{I_y}\right| \leqslant f_c$$

$$\left|-\frac{-0.7qa^2 \cdot \left(-\frac{13}{6}t\right)}{\frac{153}{12}t^4}\right| \leqslant f_c \qquad \frac{2 \cdot 0.7qa^2 \cdot 13t}{153t^4} \leqslant f_c \qquad \frac{91qa^2}{765t^3} \leqslant f_c \qquad q \leqslant \frac{765}{91} \cdot \frac{t^3 f_c}{a^2}$$

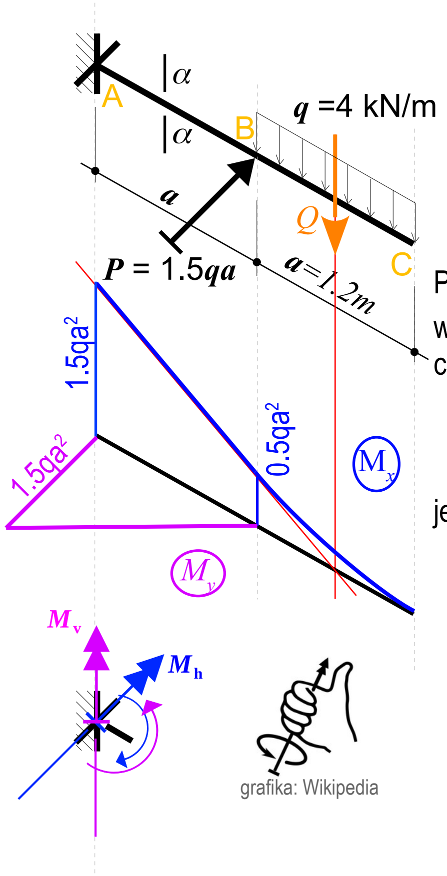
$$q \leqslant \frac{765}{91} \cdot \frac{12^3 \cdot 2.4}{120^2} \frac{cm^3 \cdot kN/cm^2}{cm^2}$$

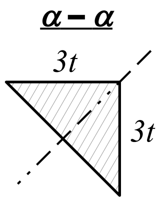
$$q \leqslant 2.421\, kN/cm$$

przyjęto :

$$q_{dop} = 240\, kN/m$$

Zad. 3. Zwymiarować przekrój wspornika:



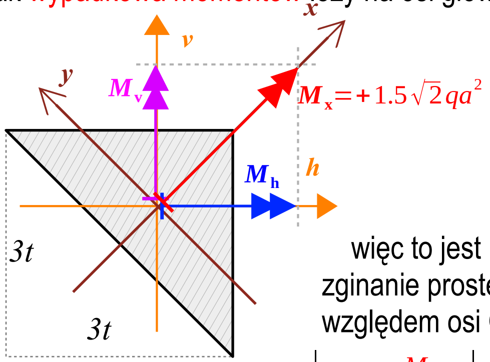


a = 4 kN/m
P = 1.5 qa^2
f_c = 24 MPa
f_t = 36 MPa

Patrząc na kierunek działania momentów M_v i M_h względem osi przekroju, wydaje się, że mamy do czynienia ze zginaniem dwukierunkowym ukośnym

$$\left|\sigma(x,y)=\cancel{\frac{N}{A}}+\frac{M_x\cdot y}{I_x}-\frac{M_y\cdot x}{I_y}\right|\leqslant f_?$$

jednak wypadkowa momentów leży na osi głównej:



więc to jest zginanie proste względem osi OX:

$$\left|\sigma(y)=\frac{M_x\cdot y}{I_x}\right|\leqslant f_?$$

$$J_x=\frac{3/\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2})^3}{48}t^4=\frac{27}{8}t^4$$

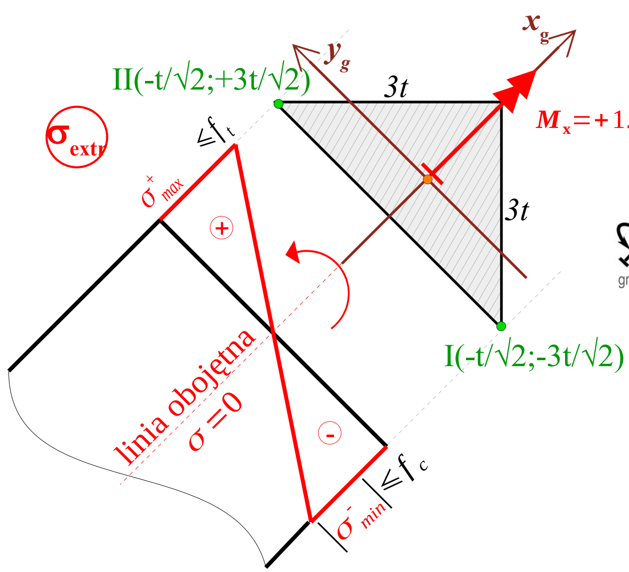
Oba maksima momentów M_v i M_h mamy w przekroju przypodporowym (punkt A na osi belki), który tym samym jest zagrożony. Jednak momenty te działają względem osi poziomej i pionowej, które są tylko osiami centralnymi ale nie są osiami głównymi!

Po zrzutowaniu M_v i M_h na osie główne OX i OY okazuje się, że ich wypadkowa leży tylko na jednej z nich – na osi OX, gdyż oba momenty są równe i rzutowane o 45°.

Mamy tu więc zginanie proste (jednokierunkowe) względem osi OX!

Moment M_x ma zwrot zgodny ze zwrotem przyjętej osi OX więc jest dodatni!

Teraz spróbujmy naszkicować wykres naprężeń normalnych σ aby określić lokalizacje ekstremów oraz wybrać warunki wytrzymałościowe konieczne do sprawdzenia:



$$J_x=\frac{27}{8}t^4$$

$$\left|\sigma(y)=\frac{M_x\cdot y}{I_x}\right|\leqslant f_?$$

Ponieważ wypadkowa momentów leży na jednej z osi głównych (na OX) więc mamy zginanie proste względem tejże osi, z którą pokrywa się linia obojętna σ=0 naprężeń. Im dalej od linii obojętnej tym większe naprężenia. Ekstrema naprężeń znajdują się na końcach I i II przeciwprostokątnej trójkąta, jako punktach najbardziej oddalonych od linii obojętnej. O bezwzględnej wartości naprężeń decydują odległości obu punktów od linii obojętnej a te są równe! Zatem z dwu potencjalnych warunków decyduje ten o mniejszej wytrzymałości (f_c<f_t) :

$$\left|\sigma^-_{min}\right|\leqslant f_c$$

$$\left|\frac{M_x\cdot y_I}{I_x}\right|\leqslant f_c$$

$$\left|\frac{+1.5\sqrt{2}qa^2\cdot(-3t/\sqrt{2})}{27/8t^4}\right|\leqslant f_c$$

$$\frac{4}{3}\frac{qa^2}{t^3}\leqslant f_c \qquad \frac{4}{3}\frac{qa^2}{f_c}\leqslant t^3$$

$$t^3\geqslant\frac{4}{3}\frac{12\,kN/m\cdot(1.2\,m)^2}{24000\,kN/m^2}$$

$$t\geqslant\sqrt[3]{0.00096\,m^3}$$

$$t\geqslant 0.09865\,m$$

przyjęto:

$$\underline{\underline{t=10\,cm}}$$

Spr.:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{0.12\,\text{kN}\cdot(120\,\text{cm})^2}{(\text{m}\,10\,\text{cm})^3}\leqslant 2.4\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$2.304\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}\leqslant 2.4\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\underline{L\leqslant P}$$