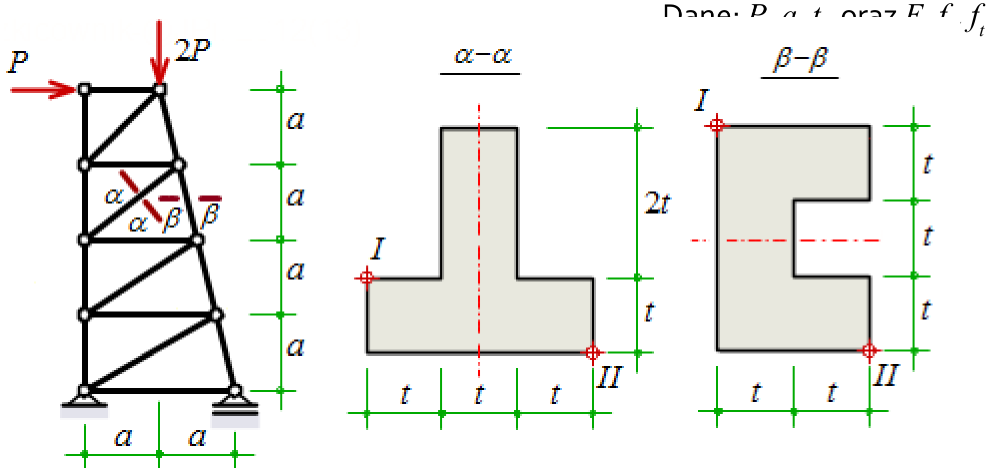
Zad. 1.

1. Obl. naprężenia w punktach I i II przekrojów obu prętów $\alpha\text{–}\alpha$ i $\beta\text{–}\beta$ oraz obliczyć wydłużenia tych prętów.
2. Zwymiarować przekroje prętów określając minimalny wymiar „t”.
3. Obliczyć dopuszczalne obciążenia kratownicy P ze względu na nośność wskazanych prętów.

Dane: P, a, t, oraz E, f_c, f_t



Obliczenie sił we wskazanych prętach (metodą Rittera):

N_α: ΣM$_A$=0: $N_\alpha^{\,x}$·5a + $N_\alpha^{\,y}$·1,25a + 2P·a = P·4a

1,25²+1²≈1,6008² → $N_\alpha^{\,x}$=1,25/1,60·N_α

≈ 41/16 $N_\alpha^{\,y}$ =1,0/1,60·N_a

(1,25*5+1,25)*N_α/1,6 = 2P → N_α = 32/75 P = 0,4267 P

N_β : ΣM$_B$=0: $N_\beta^{\,x}$·a + $N_\beta^{\,y}$·1,25a + 2P·a + P·2a =0

0,25²+1²≈1,03077² → $N_\beta^{\,x}$=0,25/1,031·N_β

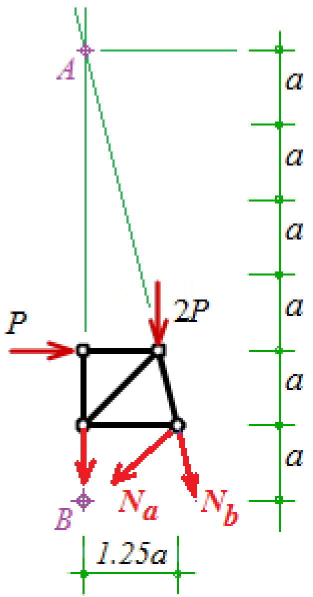
≈ 17/16 $N_\beta^{\,y}$ =1,0/1,031·N_β

(0,25+1,25)*N_b/1,03077 = 4P → N_b = -2,749 P

Spr: ΣP$_x$=0: $N_a^{\,x}$ = P + $N_b^{\,x}$

1,25/1,6·32/75=1+0,25/1,03077·(-2,749)

1/3 ≈ 0,3332654 L=P



Ad. 1.1. Obliczanie naprężeń i wydłużeń prętów:

Wzór na naprężenia dla przypadku osiowego ściskania/rozciagnaia:

$$\begin{matrix} N\neq 0 \\ M_x=0, M_y=0 \end{matrix} \Rightarrow \sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}} \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{N}{A}=const.}$$

Wzór na wydłużenia pręta osiowo rozciąganego (lub ściskanego):

Prawo Hooke'a : $\sigma=E\cdot\varepsilon$

$$\text{gdzie: } \begin{cases} \sigma=\dfrac{N}{A} \\ \varepsilon=\dfrac{\Delta L}{L} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda=\ \Delta L=\frac{N\cdot L}{E\cdot A}}$$

Naprężenia:

$$\sigma_\alpha^I=\sigma_\alpha^{II}=\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{A_\alpha}=\frac{0{,}4267\,P}{5\ t^2}=0{,}08534\,\frac{P}{t^2}$$ rozciąganie osiowe (pręt rozciąg. osiowo)

$$\sigma_\beta^1=\sigma_\beta^{II}=\sigma_\beta=\frac{N_\beta}{A_\beta}=\frac{-2{,}749\,P}{5\ t^2}=-0{,}54974\,\frac{P}{t^2}$$ ściskanie osiowe

Wydłużenia:

$$\lambda_\alpha=\frac{N_\alpha L}{E\,A_\alpha}=\sigma_\alpha\frac{L}{E}=0{,}08534\,\frac{P}{t^2}\cdot\frac{1{,}601\,a}{E}=0{,}88023\,\frac{Pa}{Et^2}$$ wydłużenie

$$\lambda_\beta=\frac{N_\beta L}{E\,A_\beta}=\sigma_\beta\frac{L}{E}=-0{,}54975\,\frac{P}{t^2}\cdot\frac{1{,}0308\,a}{E}=-0{,}56665\,\frac{Pa}{Et^2}$$ skrócenie

W projektowaniu (wymiarowaniu, obliczaniu dopuszczalnych obciążeń a w przypadku zginania także rozpiętości dopuszczalnej), gdy podano ograniczenia na naprężenia normalne – t.j. wartości wytrzymałości materiału na ściskanie f_c i rozciąganie f_t, sprawdzamy warunki wytrzymałościowe ze względu na naprężenia normalne:

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\frac{M_x\cdot y}{I_x}-\frac{M_y\cdot x}{I_y}\right|\leqslant f_?$$

Który dla osiowego rozciągania (lub ściskania) redukuje się do:

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_? \qquad \boxed{\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?}$$

Warunek wytrzymałościowy dla osiowego rozciągania (lub ściskania):

$$\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\leqslant f_?$$

służy do: wymiarowania (projektowania) przekroju elementów przy znanych siłach wewnętrznych; określania dopuszczalnego obciążenia elementu o znanej geometrii i materiale (wytrzymałościach) lub wyznaczenia naprężeń. Dla elementów zginanych można wyznaczyć nawet dopuszczalną rozpiętość elementu o znanym przekroju.

Ad. 1.2. Wymiarowanie przekroi prętów „t" = ? :

stałe kroki

$\underline{\alpha-\alpha}$

$$\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{A_\alpha}=\frac{0{,}4267\,P}{5\,t^2}=0{,}08534\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

$\underline{\beta-\beta}$

$$\left|\sigma_\beta=\frac{N_\beta}{A_\beta}=\frac{-2{,}749\,P}{5\,t^2}=-0{,}54974\,\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c$$

<u>róbcie proszę raczej krok po kroku:</u>

$$\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{A_\alpha}=\leqslant f_?\qquad \sigma_\beta=\frac{N_\beta}{A_\beta}\leqslant f_?$$

$$\sigma_\alpha=\frac{+0{,}4267\,P}{5\,t^2}\leqslant f_t\qquad \left|\sigma_\beta=\frac{-2{,}749\,P}{5\,t^2}\right|\leqslant f_c$$

$$0{,}08534\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_t\qquad 0{,}54974\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_c$$

dla danych:
f_c = 32 MPa
f_t = 24 MPa
oraz:
P = 12 kN
lub
t = 5 cm

Stad można przejść do wymiarowania lub obliczania obciążenia dopuszczalnego eliminując nieistotne warunki albo obliczyć naprężenia:

$$t_\alpha^2\geq 0{,}08534\,\frac{P}{f_t}\qquad t_\beta^2\geq 0{,}54974\,\frac{P}{f_c}$$

$$t_\alpha^2\geq 0{,}08534\,\frac{12\,kN}{2.4\,kN/cm^2}\qquad t_\beta^2\geq 0{,}54974\,\frac{12\,kN}{3.2\,kN/cm^2}$$

$$t_\alpha\geq 0{,}653\mathbf{3}\,cm\qquad t_\beta\geq 1{,}43\mathbf{6}\,cm$$

przyjęto: $t=1\mathbf{5}\,mm$

Wyniki pośrednie t_α i t_β oraz końcowy t zaokrąglamy zgodnie ze znakiem nierówności – tutaj ≤ !

Wymiary zaokrąglamy do mm (ewent. cm)! **Zrobić sprawdzenie po wymiarowaniu!**

Wytrzymałościowe zasady zaokrąglania:
- do 2 miejsc po przecinku
- do 3 cyfr znaczących
- do 4 cyfr znaczących gdy pierwszą jest „1"

Dla wymiarowania zawsze robimy sprawdzenie:

$$\sigma_\alpha=\frac{0{,}4267\,P}{5\,t^2}=\frac{0{,}4267}{5}\,\frac{12\,kN}{(1{,}45\,cm)^2}\qquad \sigma_\beta=\frac{-2{,}749\,P}{5\,t^2}=\frac{-2{,}749}{5}\,\frac{12\,kN}{(1{,}45\,cm)^2}$$

$$\sigma_\alpha=+0{,}4871\,kN/cm^2=4{,}871\,MPa\qquad \sigma_\beta=-3{,}138\,kN/cm^2=-31{,}38\,MPa$$

$$\sigma_\alpha=4{,}871\,MPa\leqslant 24\,MPa=f_t\qquad |\sigma_\beta=-31{,}38\,MPa|\leqslant 32\,MPa=f_c$$

Ad. 1.3. Dopuszczalne obciążenie ustroju Pdop = ? :

$\underline{\alpha-\alpha}$

$$\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{A_\alpha}=\frac{0{,}4267\,P}{5\,t^2}=0{,}08534\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

$\underline{\beta-\beta}$

$$\left|\sigma_\beta=\frac{N_\beta}{A_\beta}=\frac{-2{,}749\,P}{5\,t^2}=-0{,}54974\,\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c$$

<u>róbcie proszę raczej krok po kroku:</u>

$$\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{A_\alpha}\leqslant f_?\qquad \sigma_\beta=\frac{N_\beta}{A_\beta}\leqslant f_?$$

$$\sigma_\alpha=\frac{+0{,}4267\,P}{5\,t^2}\leqslant f_t\qquad \left|\sigma_\beta=\frac{-2{,}749\,P}{5\,t^2}\right|\leqslant f_c$$

$$0{,}08534\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_t\qquad 0{,}54974\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_c$$

te same kroki

$$P_\alpha\leqslant\frac{f_t\cdot t^2}{0{,}08534}\qquad P_\beta\leqslant\frac{f_c\cdot t^2}{0{,}54974}$$

$$P_\alpha\leqslant 11{,}71\mathbf{7}\,f_t\cdot t^2\qquad P_\beta\leqslant 1{,}81\mathbf{9}\,f_c\,t^2$$

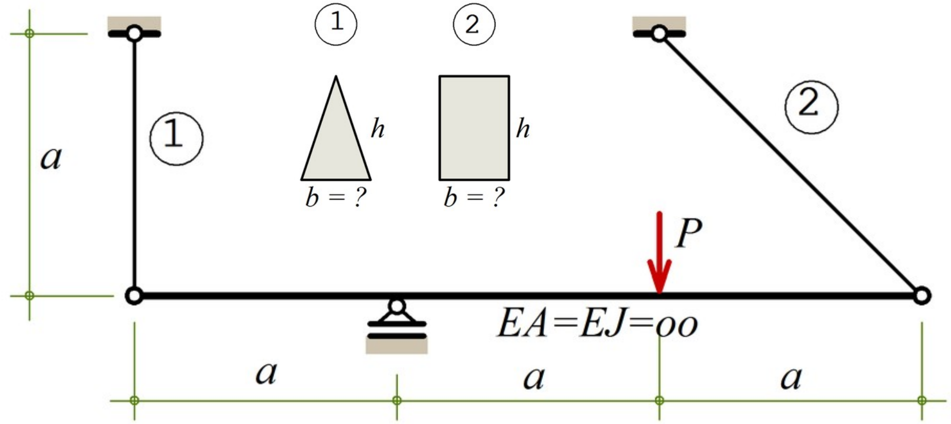
$$P_\alpha\leqslant 11{,}717\cdot 2{,}4\,kN/cm^2\cdot(5\,cm)^2\qquad P_\beta\leqslant 1{,}819\cdot 3{,}2\,kN/cm^2\cdot(5\,cm)^2$$

$$P_\alpha\leqslant 703{,}0\mathbf{7}\,kN\qquad P_\beta\leqslant 145{,}5\mathbf{2}\,kN$$

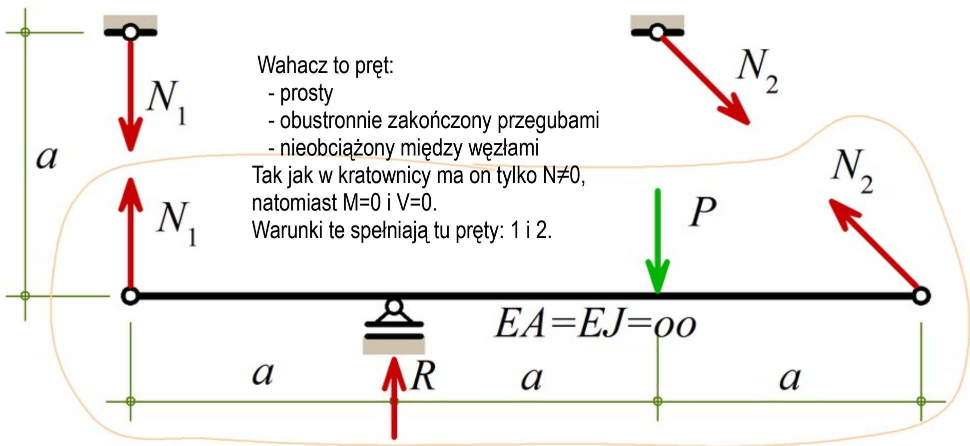
przyjęto: $P_{dop}=145{,}\mathbf{5}\,kN$

Zad.2.
1. Obliczyć siły w wahaczach ustroju.
Zad.2. Zwymiarować przekroje prętów określając minimalny wymiar „b ”.
3. Obliczyć wydłużenia wahaczy.

Dane: P=48kN, a=2m, oraz E=20GPa, f_c=32MPa, f_t=24MPa

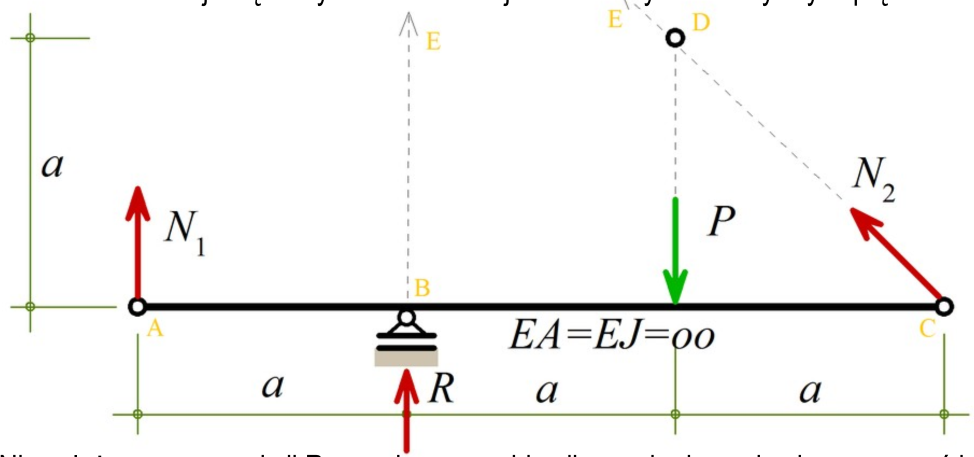


Ad.2.1. Wyznaczamy siły w prętach:
A. rozcinamy wahacze – unikamy obliczania reakcji podpór (jeśli tylko można)



B. Jeśli sama belka ma 3 niewiadome to wyodrębniamy ją.
Jeśli ma więcej niż 4 niewiadome to nie można ograniczyć się do samej belki.

C. Okazuje się iż wydzielona belka jest SW – wyznaczamy siły w prętach 1 i 2:



Nie zależy nam na reakcji R w podporze a obie siły przekrojowe da się wyznaczyć bez obliczania reakcji R, gdyż przecież przecina się ona w różnych punktach z N_1 oraz N_2.

N_2: $\Sigma P_x = 0$: $N_2^x = 0 \rightarrow \underline{N_2 = 0}$

- pręt 2. nie przenosi obciążeń - nie trzeba go projektować.

N_2: $\Sigma M_E = 0$: $N_1 \cdot a + P \cdot a = 0$

$\underline{N_1 = -P = 48\text{ kN}}$ - pręt 1. jest ściskany osiowo (jego M = 0).

Ad.2.1. Część wytrzymałościowa: wymiarujemy przekroje (tylko 2., gdyż $N_1 = 0$)

$$\left|\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \cancel{\frac{M_x}{I_x}\cdot y} - \cancel{\frac{M_y}{I_y}\cdot x}\right| \leqslant f_? \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\sigma = \frac{N}{A}\right| \leqslant f_?}$$

$$\left|\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}\right| \leqslant f_? \quad \text{gdzie } A_1 = bh/2$$

$$\left|\sigma_1 = \frac{-P}{bh/2}\right| \leqslant f_c \qquad b \geqslant \frac{2P}{hf_C} \qquad b \geqslant 5{,}00\,cm$$

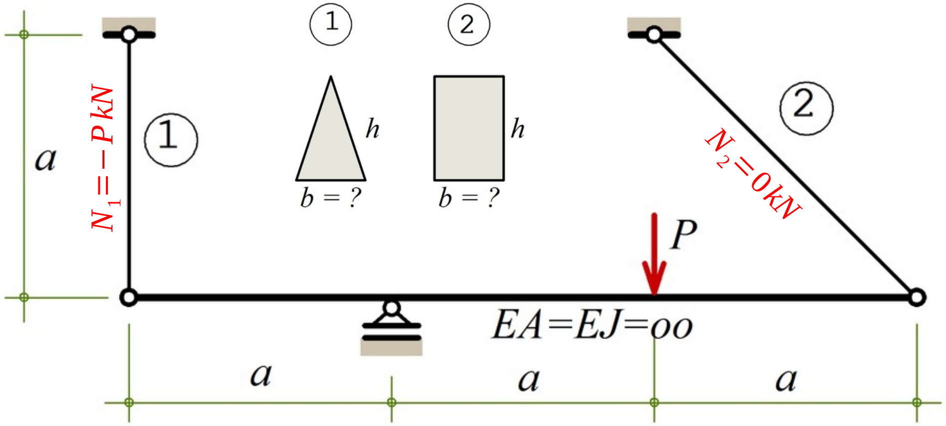
przyjęto:

$$\sigma_1 = \frac{2P}{bh} \leqslant f_c \qquad b \geqslant \frac{2\cdot 48\,kN}{6\,cm\cdot 3.2\,kN/cm^2} \qquad \underline{\underline{b = 50\,mm}}$$

Teraz wypadałoby zrobić sprawdzenie!

~~1. Obliczyć siły w wahaczach ustroju.~~
~~2. Zwymiarować przekroje prętów określając minimalny wymiar „b”.~~
3. Obliczyć wydłużenia wahaczy.

Dane: P=48kN, a=2m, oraz E=20GPa, f_c=32MPa, f_t=24MPa



Ad.2.3. Wyznaczamy wydłużenia w prętach 1 i 2: $\boxed{\lambda=\frac{N\cdot L}{E\cdot A}}$ $(=\Delta L)$

wahacz (1): N_1 = - P

$$\lambda_1=\frac{N_1\cdot L_1}{E\cdot A_1}=\frac{-P\cdot a}{bh/2}$$

$$\lambda_1=\frac{-48\,kN\cdot 2}{2000{,}0\,kN/cm^2\cdot 5{,}00*6{,}00/2\,cm^2}$$

$$\lambda_1=-0.0032\,cm=\underline{\underline{-0.032\,mm}}$$

(skrócenie)

wahacz (2): N_2 = 0

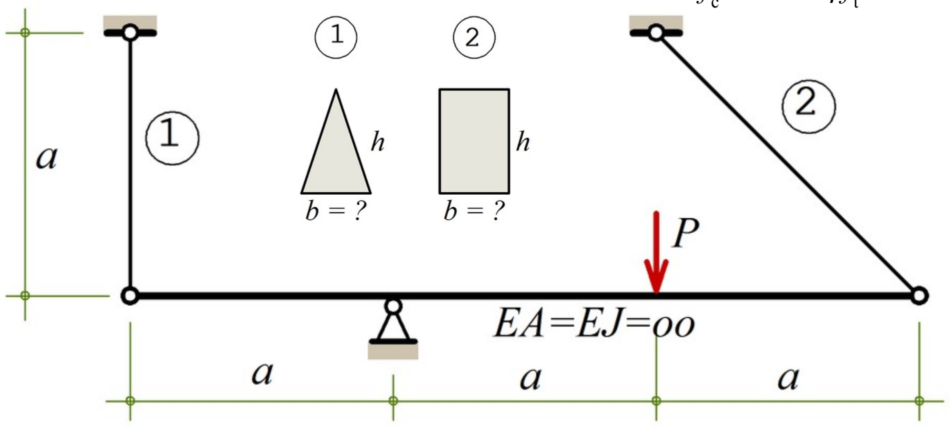
$$\lambda_2=\frac{N_2\cdot L_2}{E\cdot A_2}=\frac{\mathbf{0}\cdot\sqrt{2}a}{E\cdot bh}$$

$$\underline{\underline{\lambda_2=0\,mm}}$$

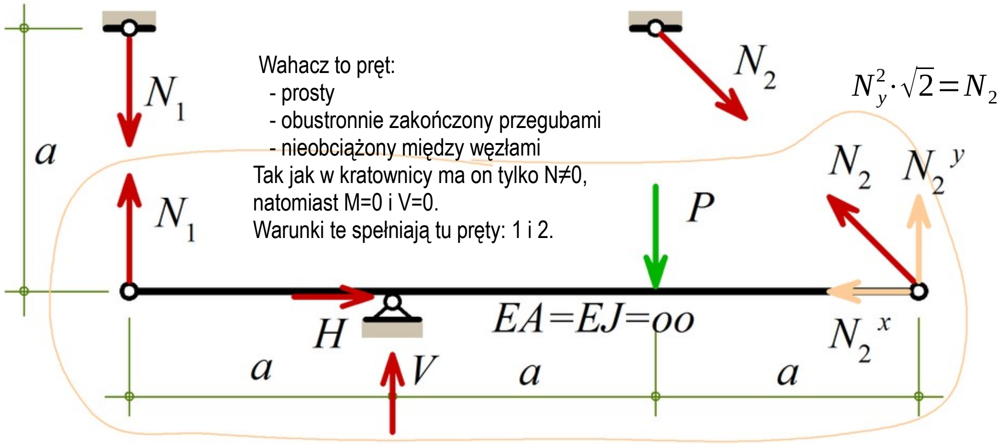
(brak zmiany długości)

Zad.3. (w stos. do poprzedniego podpora beki jest nieprzesuwna – 1*S.N.)
1. Obliczyć siły w wahaczach ustroju.
2. Zwymiarować przekroje prętów określając minimalny wymiar „b ”.
3. Obliczyć wydłużenia wahaczy.

Dane: P=48kN, a=2m, oraz E=20GPa, f_c=32MPa, f_t=24MPa



Ad.3.1. Unikamy obliczania reakcji – tak długo jak długo to ułatwia rozwiązanie:
A. Rozcinamy wahacze



B. Tym razem belka ma 4 niewiadome a analizując równowagę podpory nie uzyskamy dodatkowych równań - to jest ustrój <u>Statycznie Niewyznaczalny</u>!

(S) Strona statyczna:

$\Sigma P_x = 0$: $N_2^x = H$ (2 niewiadome !)

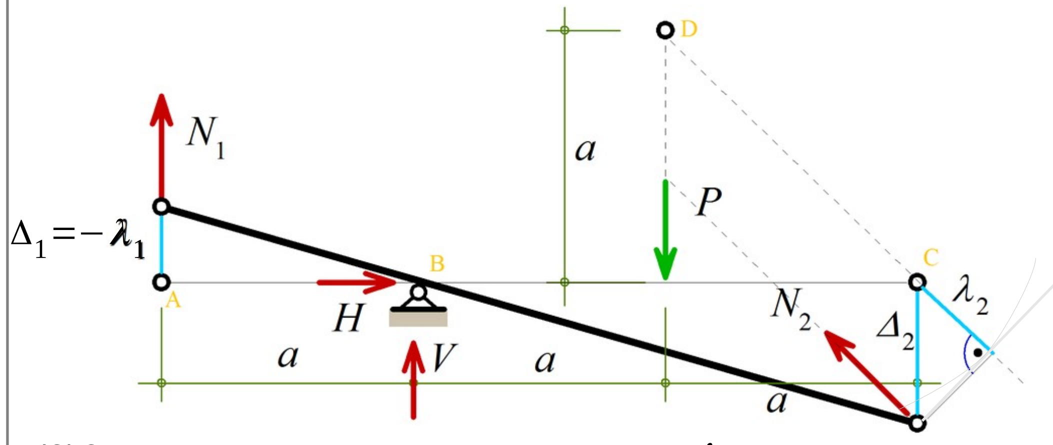
$\Sigma P_y = 0$: N_2^y, V, N_1 (3 niewiadome !)

Brak punktu przecięcia się 3-ech niewiadomych! (wyliczylibyśmy czwartą !)

$\Sigma M_B = 0$: $N_1 \cdot a + P\cdot a = N_2^y \cdot 2a \quad\rightarrow\quad N_1 + P = \sqrt{2}\cdot N_2$ **(!)**

Nie zależy nam na reakcjach V i H w podporze B – mamy przecież zwymiarować tylko pręty 1 i 2 ! Szukamy więc dwóch sił przekrojowych N_1 oraz N_2 a mamy tylko jedno równanie statyki, do którego nie wchodzą pozostałe dwie niewiadome.
Potrzebujemy teraz jeszcze drugiego równania ze względu na siły N_1 i N_2 !

C. Rysujemy plan przemieszczeń ustroju – podejście kinematyczne:



(G) Strona geometryczna: $\frac{-\lambda_1}{a}=\frac{\Delta_2}{2a}$ oraz $\frac{\lambda_2}{\Delta_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $\Delta_2=\sqrt{2}\lambda_2$

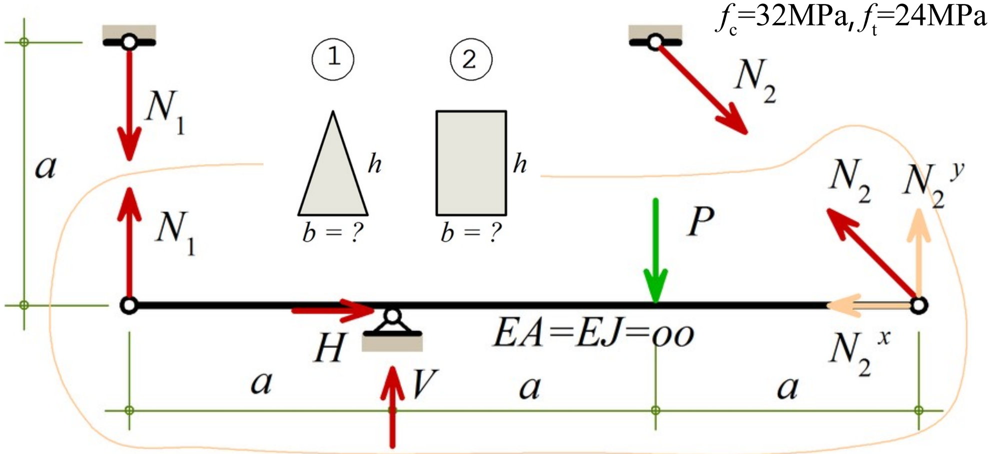
Podstawiwszy otrzymujemy: $-2\lambda_1=\sqrt{2}\lambda_2$

(F) Strona Fizyczna: $\lambda_1=\frac{N_1\cdot L_1}{E\cdot A_1}$ oraz $\lambda_2=\frac{N_2\cdot L_2}{E\cdot A_2}$

(F) → (G) :

$$-2\frac{N_1 L_1}{E A_1}=\sqrt{2}\frac{N_2 L_2}{E A_2} \qquad -2\frac{N_1 a}{E\, bh/2}=\sqrt{2}\frac{N_2 a\sqrt{2}}{E\, bh} \qquad -2N_1=N_2 \quad \text{(!)}$$

Ad.3.1. B) Siły w prętach 1 i 2 - c.d.: P=48kN, a=2m, oraz E=20GPa, f_c=32MPa, f_t=24MPa



Strona statyczna (S):
Strony (F) → (G):

$$\begin{cases} N_1-\sqrt{2}N_2=-P \\ -2N_1-N_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1=-0.2612\,P=-12.53\mathbf{8}\,kN \\ N_2=\;\;0.5224\,P=\;\;25.07\mathbf{6}\,kN \end{cases}$$

Ad.2. Część wytrzymałościowa: wymiarujemy przekroje prętów 1 i 2 : $\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?$

wahacz (1):

$$\left|\sigma_1=\frac{N_1<0}{A_1}\right|\leqslant f_c \quad \begin{cases} A_1=bh/2 \\ N_1=-0.2612\,P \end{cases}$$

$$\left|\frac{-0.2612\,P}{bh/2}\right|\leqslant f_c \quad\Rightarrow\quad \frac{1.044\,\mathbf{9}\,P}{bh}\leqslant f_c$$

$$b\geqslant\frac{1.0449\,P}{hf_C}$$

$$b\geqslant\frac{21.0449\cdot 48\,kN}{6\,cm\cdot 3.2\,kN/cm^2}$$

$$b_1\geqslant 1.306\,\mathbf{1}\,cm$$

wahacz (2):

$$\sigma_2=\frac{N_2>0}{A_2}\leqslant f_t \quad \begin{cases} A_2=bh \\ N_2=0.5224\,P \end{cases}$$

$$\frac{0.5224\,P}{bh}\leqslant f_t$$

$$b\geqslant\frac{0.5224\,P}{hf_t}$$

$$b\geqslant\frac{0.5224\cdot 48\,kN}{6\,cm\cdot 2.4\,kN/cm^2}$$

$$b_2\geqslant 1.741\,\mathbf{4}\,cm$$

przyjęto: $b=18\,mm$

→ sprawdzenie zrobić !

Ad.3.3. Wyznaczamy wydłużenia w prętach 1 i 2: $\boxed{\lambda=\frac{N\cdot L}{E\cdot A}}$ $(=\Delta L)$

wahacz (1): N_1 = - 0.2612 P

$$\lambda_1=\frac{N_1\cdot L_1}{E\cdot A_1}=\frac{-P\cdot a}{bh/2}$$

$$\lambda_1=\frac{-0.2612\cdot 48\,kN\cdot 2}{2000{,}0\,kN/cm^2\cdot 1{,}80*6{,}00/2\,cm^2}$$

$$\lambda_1=-0.0233\,mm$$

(skrócenie)

wahacz (2): N_2 = 0.5224 P

$$\lambda_2=\frac{N_2\cdot L_2}{E\cdot A_2}=\frac{0.5224\,P\cdot\sqrt{2}a}{E\cdot bh}$$

$$\lambda_2=\frac{-0.5224\cdot 48\,kN\cdot 2\sqrt{2}}{2000{,}0\,kN/cm^2\cdot 1{,}80*6{,}00\,cm^2}$$

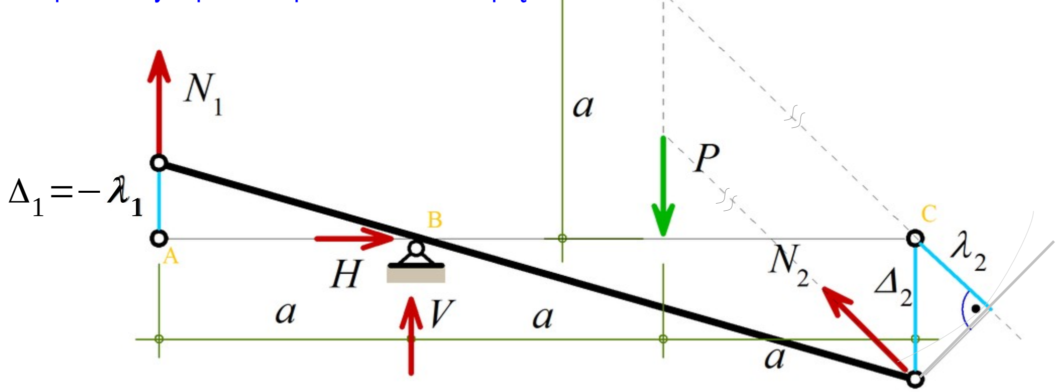
$$\lambda_2=0.0329\,mm$$

(wydłużenie)

Spr.: $-2\lambda_1=\sqrt{2}\lambda_2 \qquad -2(-0.0233)=\sqrt{2}\,0.0329 \qquad 0.0466=0.04653$

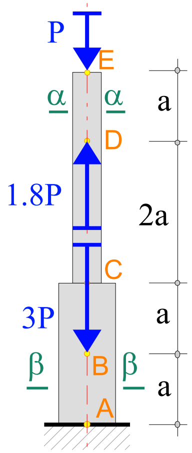
Gdyby to było wymiarowanie zaokrąglalibyśmy w górę a w tym przypadku to zależy od celu obliczania wydłużeń prętów.

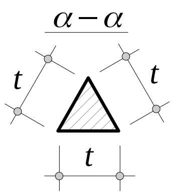
Zasady rysowania planu przemieszczeń (na potrzeby „strony geometrycznej" zadania):
- nieskończenie sztywna belka EA=EJ=oo nie wygina się i nie wydłuża;
- przemieszczenia węzłów są kilka rzędów mniejsze niż rozmiary elementów;
- przemieszczenia punktów wynikające z obrotów jednego końca pręta względem innego odbywają się NIE po łuku ale po linii prostopadłej do osi pręta - stycznej do łuku w pierwotnym punkcie położenia końca pręta!

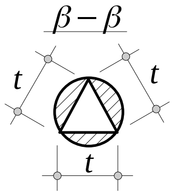


Zad.4.
1. Zwymiarować przekroje słupa (do pełnych mm).
2. Obliczyć przemieszczenie punktu C.
3. Obliczyć wydłużenie całego słupa.

P=72 kN
f_c=48 MPa a=2 m
f_t=36 MPa E=20 GPa







Przypadek wytrzymałościowy
to **ścisk./rozc. osiowe** :

$$\boxed{\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?}$$

Ogólnie:

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_?$$

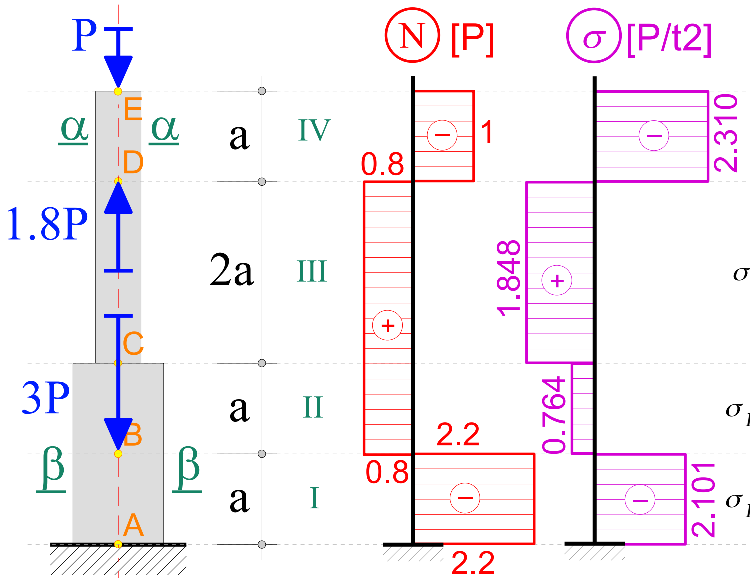
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.433\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}=1.047\,t^2$$

Statyka: Wykresy sił osiowych a także szkice naprężeń i eliminacja war. projektow.
(zadanie jest Statycznie Wyznaczalne, gdyż tylko jeden koniec jest utwierdzony) :



$$\sigma_{IV}=\frac{-P}{A_\alpha}=-2.310\frac{P}{t^2}$$

$$\left|-2.310\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c$$

$$\sigma_{III}=\frac{0.8P}{A_\alpha}=1.848\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

$$\sigma_{II}=\frac{0.8P}{A_\beta}=\cancel{0.764\frac{P}{t^2}\leqslant f_t}$$

$$\sigma_{I}=\frac{-2.2P}{A_\beta}=\cancel{-2.1013\frac{P}{t^2}}$$

Punkty A,B .. E numerować od podpory! Wykres zmian (stałych w przekroju) naprężeń wzdłuż osi słupa.

Ad.4.1..Wyeliminowano 2 warunki spośród 4 (patrz poprzednia strona), pozostawiając :
(IV) w segmencie D-E: oraz (III) w segmencie C-D:

$$\left|\sigma_{IV}=\frac{-P}{0.433}t^2=-2.310\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c \qquad \sigma_{III}=\frac{0.8P}{A_\beta}=1.848\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

$$t^2\geqslant 2.310\frac{P}{f_c} \qquad t^2\geqslant 1.848\frac{P}{f_t}$$

$$t^2\geqslant 2.310\frac{72\,kN}{4.8\,kN/cm^2} \qquad t^2\geqslant 1.848\frac{72\,kN}{3.6\,kN/cm^2}$$

$$t\geqslant\sqrt{30.15\,cm^2}=5.89\,cm \qquad t\geqslant\sqrt{36.96\,cm^2}=6.08\,cm$$

Przyjęto: t = 6.1 cm (zaokr. w górę do pełnych mm)

Spr.:

$$\left|\sigma_{IV}=\frac{-2.310\cdot 72\,kN}{(5.5\,cm)^2}\right|\leqslant f_c \qquad \sigma_{III}=\frac{1.848\cdot 72\,kN}{(0.061\,m)^2}\leqslant f_t$$

$$\left|-4.47\frac{kN}{cm^2}\right|\leqslant 48\,MPa \;✔ \qquad 35759\,kPa\leqslant 36\,MPa \;✔$$

Ad.4.2. Przemieszczenie p. C – jest równe sumie wydłużeń segmentów I i II,
gdyż p. A jest punktem stałym – unieruchomionym przez podporę A:

$$\delta_C=\lambda_I+\lambda_{II}=\frac{N_I\cdot L_I}{E\cdot A_\beta}+\frac{N_{II}\cdot L_{II}}{E\cdot A_\beta}=\frac{-2.2\,P\cdot a}{E\cdot 1.047\,t^2}+\frac{0.8\,P\cdot a}{E\cdot 1.047\,t^2}$$

$$\delta_C=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{-2.2}{1.047}+\frac{0.8}{1.047}\right)=-1.338\frac{Pa}{Et^2}=-1.338\frac{72\,kN\cdot 200\,cm}{2000.0\,kN/cm^2\cdot(6.1\,cm)^2}$$

$$\delta_C=-0.259\,cm=-2.6\;mm\downarrow$$ p.C przem. się w dół - część A-C skróciła się!

Ad.4.2. Wydłużenie całego słupa – jest równe sumie wydłużeń wszystkich segmentów:

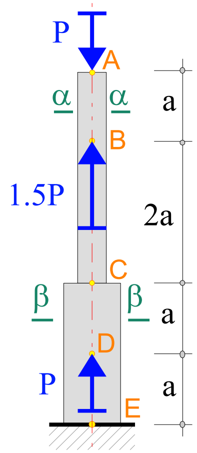
$$\Delta L=\lambda_I+\lambda_{II}+\lambda_{III}+\lambda_{IV}=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{-2.2}{1.047}+\frac{0.8}{1.047}+\frac{0.8\cdot 2}{0.433}+\frac{-1}{0.433}\right)=-1.800\frac{Pa}{Et^2}$$

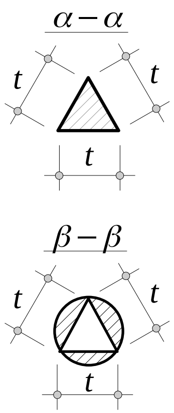
$$\Delta L=-1.800\frac{Pa}{Et^2}=-3.49\,cm=-3.5\,mm$$ ↓ cały słup skrócił się o niespełna 3.5 mm!

Nawet dłuższy odcinek rozciągany C-D nie zrównoważył wydłużeń w dwóch ściskanych segmentów A-B i D-E, tak, że cała długość słupa zmalała p. E w kier. ↓

Zad.5. (j. w zad.4. ale inaczej obciążone)
1. Zwymiarować przekroje słupa (do pełnych mm).
2. Obliczyć przemieszczenie punktu C.
3. Obliczyć wydłużenie całego słupa.

$P=72$ kN, $f_c=48$ MPa, $f_t=36$ MPa, $a=2$ m, $E=20$ GPa





Przypadek wytrzymałościowy to **ścisk./rozc. osiowe** :

$$\boxed{\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?}$$

Ogólnie:

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_?$$

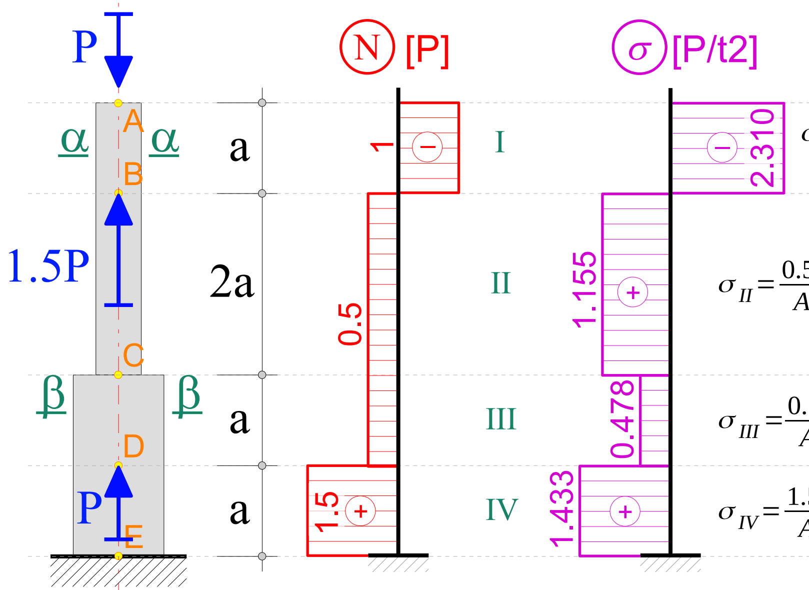
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.4330\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}=1.047\,t^2$$

Statyka: Wykresy sił osiowych (też szkice naprężeń i eliminacja war. Projektowych)
Zadanie jest Statycznie Wyznaczalne, gdyż tylko jeden koniec jest utwierdzony)



$$\sigma_I=\frac{-P}{A_\alpha}=-2.010\frac{P}{t^2}$$

$$\left|-2.010\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c$$

$$\sigma_{II}=\frac{0.5P}{A_\alpha}=\cancel{1.155\frac{P}{t^2}\leqslant f_t}$$

$$\sigma_{III}=\frac{0.5P}{A_\beta}=\cancel{0.478\frac{P}{t^2}\leqslant f_t}$$

$$\sigma_{IV}=\frac{1.5P}{A_\beta}=1.433\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

Oznaczenia p.: A, B, C,D i E zmian sił osiowych i przekrojów zacząć od podpory!

Ad.5.1. Konieczne do sprawdzenia są tylko 2 warunki z 4 (patrz poprzednia strona) :
(I) w segmencie A-B: oraz (IV) w ostatnim segmencie D-E:

$$\left|\sigma_I=\frac{-P}{0.433}t^2=-2.310\frac{P}{t^2}\right|\leqslant f_c$$

$$t^2\geqslant 2.310\frac{P}{f_c}$$

$$t^2\geqslant 2.310\frac{72\,kN}{4.8\,kN/cm^2}$$

$$t\geqslant\sqrt{30.15\,cm^2}=5.89\,cm$$

$$\sigma_{IV}=\frac{1.5P}{A_\beta}=1.433\frac{P}{t^2}\leqslant f_t$$

$$t^2\geqslant 1.433\frac{P}{f_t}$$

$$t^2\geqslant 1.433\frac{72\,kN}{3.6\,kN/cm^2}$$

$$t\geqslant\sqrt{28.66\,cm^2}=5.36\,cm$$

Przyjęto: t = 5.9 cm (zaokr. w górę do pełnych mm)

Spr.:

$$\left|\sigma_I=\frac{-23010\cdot 72\,kN}{(5.9\,cm)^2}\right|\leqslant f_c$$

$$\left|-4.78\frac{kN}{cm^2}\right|\leqslant 48\,MPa\ ✔$$

$$\sigma_{IV}=\frac{1.433\cdot 72\,kN}{(0.059\,m)^2}\leqslant f_t$$

$$21656\,kPa\leqslant 36\,MPa\ ✔$$

Ad.5.2. Przemieszczenie p. C – jest równe sumie wydłużeń segmentów III-IV, gdyż p. E jest punktem stałym :

$$\delta_C=\lambda_{IV}+\lambda_{III}=\frac{N_{IV}\cdot a}{E\cdot A_\beta}+\frac{N_{III}\cdot a}{E\cdot A_\beta}=\frac{1.5P\cdot a}{E\cdot 1.047\,t^2}+\frac{0.5P\cdot a}{E\cdot 1.047\,t^2}$$

$$\delta_C=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{1.5}{1.047}+\frac{0.5}{1.047}\right)=1.911\frac{Pa}{Et^2}=1.911\frac{72\,kN\cdot 200\,cm}{200.0\,kN/cm^2\cdot 5.9^2\,cm^2}$$

$$\delta_C=+0.396\ cm=+4.0\,mm\uparrow$$ p.C przem. się w górę - część E-C wydłużyła się!

Ad.5.2. Wydłużenie całego słupa – jest równe sumie wydłużeń wszystkich segmentów:

$$\Delta L=\delta_A=\lambda_{IV}+\lambda_{III}+\lambda_{II}+\lambda_I=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{1.5}{1.047}+\frac{0.5}{1.047}+\frac{0.5\cdot 2}{0.433}+\frac{-1}{0.433}\right)=1.911\frac{Pa}{Et^2}$$

$$\Delta L=1.911\frac{Pa}{Et^2}=0.3954\,cm=+4.0\,mm\uparrow$$ cały słup wydłużył się o niespełna 5 mm!

Słup wydłużył się dokładnie o tyle samo ile wynosi przemieszczenie punktu C, gdyż wydłużenie odcinaka C-B zostało zrównoważone przez skrócenie odc. B-A!

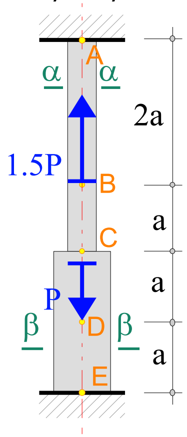
Zad.6. (obustronne utwierdzenie – Stat. Niewyzn.)

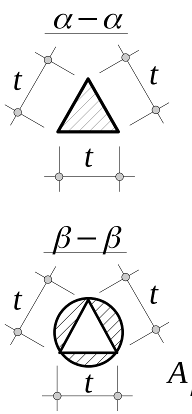
1. Zwymiarować przekroje słupa (do pełnych mm).
2. Obliczyć przemieszczenie punktu C.
3. Obliczyć wydłużenie całego słupa.

$P=72$ kN

$f_c=48$ MPa $a=2$ m

$f_t=36$ MPa $E=20$ GPa





Ściskanie osiowe lub **rozciąganie osiowe** :

$$\boxed{\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?}$$

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_?$$

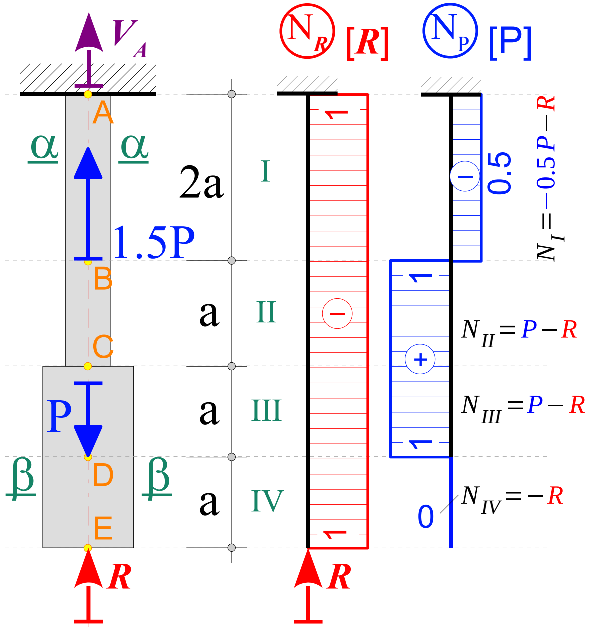
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.4330\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^2=0.6142\,t^2$$

Statyka: Obustronnie utwierdzony słup → Stat. NieWyznaczalny! Uwalniamy jedną z podpór i jej reakcję (pionową) traktujemy jako kolejny nieznany parametr – np. dolną:



Teraz mamy dwie niewiadome:
- projektową: wymiar t
- dodatkową: reakcję R

Aby wyznaczyć dwie nieznane reakcje działające wzdłuż osi pręta R oraz V_A potrzebujemy, oprócz ΣPy=0, dodatkowego równania ze względu na niewiadomą R.

Dodatkowe równanie wynika z braku zmiany długości całkowitej obustronnie podpartego słupa :

$$\Delta L_{całk}=\sum_i\lambda_i=\sum_i\frac{N_i\cdot L_i}{E\cdot A_i}=0$$

Całkowite wydłużenie słupa musi być zerowe, chyba, że mamy osiadanie jednej z podpór (np. szkody górnicze).

Punkty A, B, C,D i E oznaczono poczynając od pozostawionej podpory!

Statyka c.d.:

(1) Strona statyczna (równanie równowagi statycznej):

$$\sum P_y=0:\quad R+1.5\,P+V_A=P \qquad \text{(2 niewiadome: } R \text{ i } V_E)$$

(2) Strona geometryczna (sumaryczne wydłużenie – tutaj zerowe) :

$$\Delta L_{całk}=\sum_i\lambda_i=\lambda_I+\lambda_{II}+\lambda_{III}+\lambda_{IV}=0$$

(3) Strona fizyczna (równ. fiz. opisujące wydłużenie segmentu o stałych własnościach)

$$\lambda_i=\frac{N_i\cdot L_i}{E\cdot A_i}\ \text{czyli:}\quad \lambda_I=\frac{N_I\cdot L_I}{E_I\cdot A_I},\ \lambda_{II}=\frac{N_{II}\cdot L_{II}}{E_{II}\cdot A_{II}},\ \lambda_{III}=\frac{N_{III}\cdot L_{III}}{E_{III}\cdot A_{III}},\ \lambda_{IV}=\frac{N_{IV}\cdot L_{IV}}{E_{IV}\cdot A_{IV}}.$$

Podstawienie (3) → (2) , pamiętając o wartościach N_i z dodawania wykresów N_R i N_P :

$$\Delta L_{całk}=\frac{N_I\cdot L_I}{E\cdot A_I}+\frac{N_{II}\cdot L_{II}}{E\cdot A_{II}}+\frac{N_{III}\cdot L_{III}}{E\cdot A_{III}}+\frac{N_{IV}\cdot L_{IV}}{E\cdot A_{IV}}=0$$

$$\frac{(-0.5\,P-R)\cdot 2\,a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{(P-R)\cdot a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{(P-R)\cdot a}{E\cdot A_\beta}+\frac{-R\cdot a}{E\cdot A_\beta}=0$$

$$\frac{-0.5\,P\cdot 2\,a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{P\cdot a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{P\cdot a}{E\cdot A_\beta}=\frac{R\cdot 2\,a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{R\cdot a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{R\cdot a}{E\cdot A_\beta}+\frac{R\cdot a}{E\cdot A_\beta}$$

$$\frac{P\cdot a}{E\cdot t^2}\left(\frac{-0.5\cdot 2}{A_\alpha}+\frac{1}{A_\alpha}+\frac{1}{A_\beta}\right)=\frac{R\cdot a}{E\cdot t^2}\left(\frac{2}{A_\alpha}+\frac{1}{A_\alpha}+\frac{1}{A_\beta}+\frac{1}{A_\beta}\right)$$

$$\cancel{\frac{P\cdot a}{E\cdot t^2}}\left(\frac{\cancel{-0.5\cdot 2+1}}{A_\alpha}+\frac{1+0}{A_\beta}\right)=\cancel{\frac{R\cdot a}{E\cdot t^2}}\left(\frac{2+1}{A_\alpha}+\frac{1+1}{A_\beta}\right)$$

(co od razu można było zapisać w tej postaci patrząc na wykresy N_P i - N_R)

$$P\frac{1}{0.6142\,t^2}=R\left(\frac{3}{0.4330\,t^2}+\frac{2}{0.6142\,t^2}\right)$$

(to równanie ma już tylko 1 niewiadomą: R)

$$P\cdot 1.6281743=R\cdot 10.184552$$

$$\Sigma P_y=0:\ V_E=-0.5\,P-R \quad \text{(str. statyczna)}$$

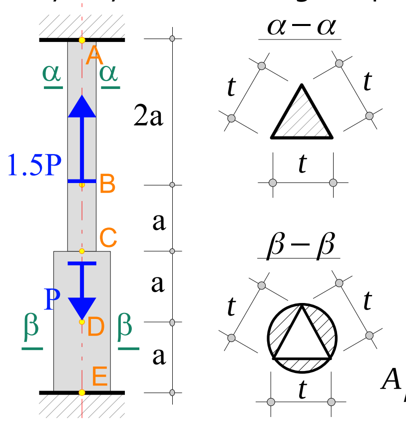
$$R=P\cdot\frac{1.6282}{10.185}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{R=0.1599\,P}}\ \rightarrow (1):\ V_E=-0.5\,P-R=\underline{-0.6599\,P}$$

Reakcję V_E można obliczyć podstawiając R do warunku równowagi statycznej ale jest ona kompletnie zbyteczna. Wykres N można bowiem zrobić tylko na podstawie reakcji R – np. skalując wykres N_R przez wartość reakcji R oraz dodając do wykresu N_P graficznie: $N=N_R{}^*R+N_P$.

Mając gotowy wykres N dalej postępujemy już jak w zadaniu statycznie wyznaczalnym!

c.d.6. (obustronne utwierdzenie – S.N.)
1. Zwymiarować przekroje słupa (do pełnych mm).
2. Obliczyć przemieszczenie punktu C.
3. Obliczyć wydłużenie całego słupa.

P=72 kN
f_c=48 MPa a=2 m
f_t=36 MPa E=20 GPa



Ściskanie osiowe lub **rozciąganie osiowe** :

$$\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_{?}$$

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_{?}$$

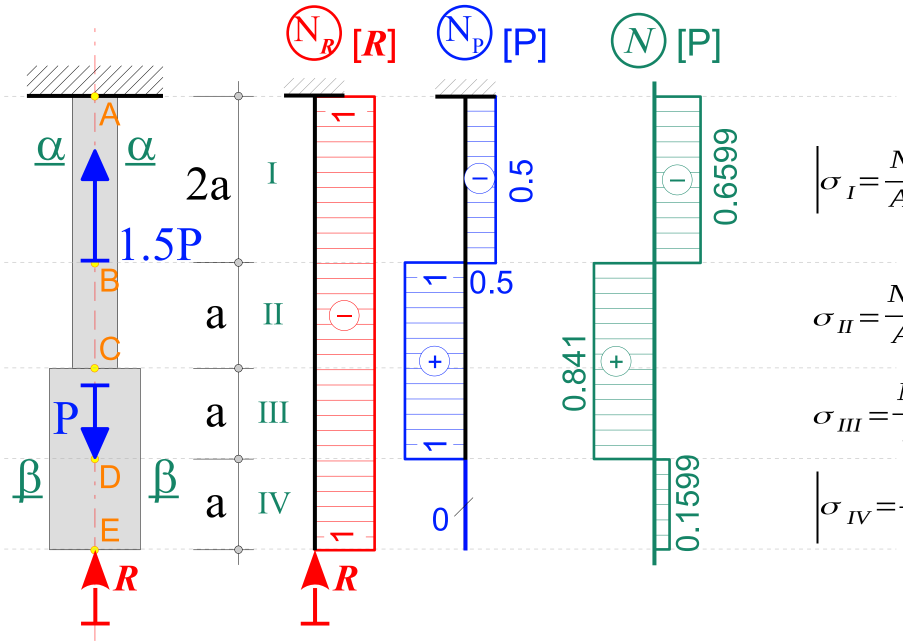
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.4330\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^2=0.6142\,t^2$$

Statyka: Znając reakcję $\boldsymbol{R}$ (przy okazji łatwo określić V_E) rysujemy wykres N:



$$\left|\sigma_I=\frac{N_I}{A_\alpha}\right|\leqslant f_c$$

$$\sigma_{II}=\frac{N_{II}}{A_\alpha}\leqslant f_t$$

$$\sigma_{III}=\frac{N_{III}}{A_\beta}\leqslant f_t$$

$$\left|\sigma_{IV}=\frac{N_{IV}}{A_\beta}\right|\leqslant f_c$$

Rzeczywisty wykres N będzie sumą N_P i N_R, możliwy do zrobienia gdy wyznaczymy $\boldsymbol{R}$!

Ad.6.1.a) <u>Eliminacja zbędnych warunków.</u>
Porównując wyłącznie wykres sił osiowych N z przekrojami słupa A_α i A_β, można, bez dodatkowych obliczeń, znacznie ograniczyć ilość warunków wytrzymałościowych wymagających sprawdzenia (tutaj szkic naprężeń normalnych $\boldsymbol{\sigma}$ jest do tego zbędny):
Dodatnia siła osiowa N o tej samej wartości rozciąga się na dwa segmenty II i III, różniące się przekrojem. Można wyeliminować warunek z większym (silniejszym) przekrojem rozciąganym. Sprawdzenia wymaga warunek z maksimum naprężeń (rozciągające) odpowiadające mniejszemu polu przekroju.
Ujemne siły osiowe działają również w dwóch różnych przekrojach (segmenty I i IV), przy czym większej sile osiowej odpowiada słabszy przekrój dając minimum naprężeń (ściskanie). Tylko ten warunek wymaga sprawdzenia na ściskanie.
Spośród 4 możliwych warunków zostały nam tylko 2 warunki: w segmentach I i II, odpowiadające słabszemu przekrojowi A_α. Przy tym samym polu przekroju łatwo wskazać ekstremum naprężeń, które odpowiada większej (na wartość bezwzględną) sile osiowej w segmencie II, która jest dodatnia (rozciągająca). Przyjrzyjmy się wytrzymałościom: dodatnie ekstremum porównujemy z mniejszą z wytrzymałości $f_t<f_c$
Skoro ekstremalne naprężenie porównujemy z minimalną wytrzymałością, stąd wniosek iż jest to jedyny warunek wymagający sprawdzenia!
<u>b) Sprawdzenie warunku w segmencie II czyli B-C:</u>

$$|\sigma_{min}|<\boxed{\sigma_{ekstr}=\sigma_{max}=\sigma_{II}\leqslant f_t}<f_c$$

$$\sigma_{II}=\frac{0.841\,P}{0.4330\,t^2}=1.941\,\frac{P}{t^2}\leqslant f_t \qquad t^2\geqslant 1.941\,\frac{72\,kN}{3.6\,kN/cm^2}$$

$$t^2\geqslant 1.941\,\frac{P}{f_t} \qquad \underline{t\geqslant 6.23\,cm}$$

Przyjęto: t = 6.3 cm (zaokrąglono w górę do pełnych mm)

Sprawdzenie:

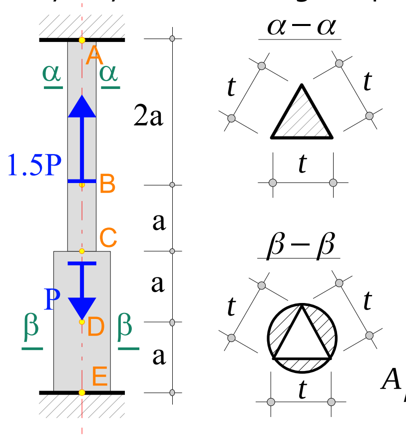
$$\left|\sigma_{min}=\frac{-0.6599\cdot 72\,kN}{0.4330\cdot 6.3^2\,cm^2}=-2.77\,\frac{kN}{cm^2}\right|\leqslant 48\,MPa=f_c \quad ✔$$

$$\sigma_{max}=\frac{0.841\cdot 72\,kN}{0.4330\cdot 6.3^2\,cm^2}=3.52\,\frac{kN}{cm^2}\leqslant 3.6\,\frac{kN}{cm^2}=36\,MPa=f_t \quad ✔$$

c.d.6. (obustronne utwierdzenie – S.N.)

1. Zwymiarować przekroje słupa (do pełnych mm).
2. Obliczyć przemieszczenie punktu C.
3. Obliczyć wydłużenie całego słupa.

$P=72$ kN
$f_c=48$ MPa $a=2$ m
$f_t=36$ MPa $E=20$ GPa



<u>**Ściskanie osiowe**</u> lub <u>**rozciąganie osiowe**</u> :

$$\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_?$$

$$\left|\sigma(x,y)=\frac{N}{A}+\cancel{\frac{M_x\cdot y}{I_x}}-\cancel{\frac{M_y\cdot x}{I_y}}\right|\leqslant f_?$$

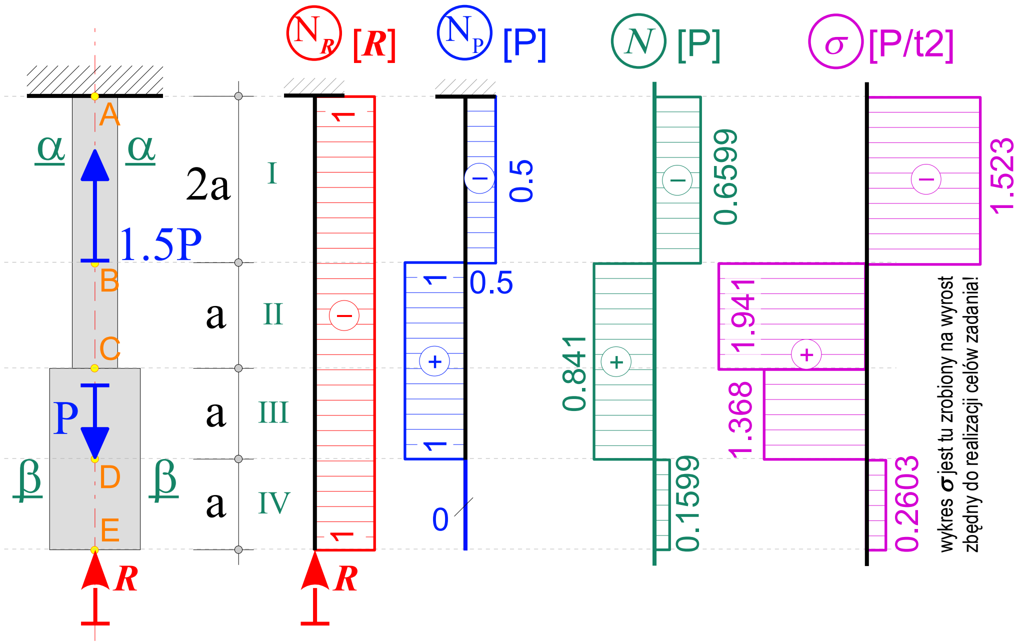
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.4330\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^2=0.6142\,t^2$$

Statyka: Znając reakcję $\boldsymbol{R}$ (przy okazji łatwo określić V_E) rysujemy wykres N:



Rzeczywisty wykres N będzie sumą N_P i N_R, możliwy do zrobienia gdy wyznaczymy $\boldsymbol{R}$!

Ad.6.2. Przemieszczenie p. C – jest równe sumie wydłużeń segmentów I-II, gdyż p. A jest punktem stałym :

$$\delta_C=\lambda_I+\lambda_{II}=\frac{N_I\cdot 2a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{N_{II}\cdot a}{E\cdot A_\alpha}$$

Dodatni znak sumy wydłużeń kolejnych segmentów słupa utwierdzonego u góry będzie oznaczał przemieszczenie punktu C w dół.

$$\delta_C=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{-0.6599\cdot 2}{0.4330}+\frac{0.841}{0.4330}\right)=-1.108\frac{Pa}{Et^2}$$

$$\delta_C=-1.108\frac{Pa}{Et^2}=-1.108\frac{72\,kN\cdot 2\cdot 200\,cm}{2000.0\,kN/cm^2\cdot 6.3^2\,cm^2}$$

$$\delta_C=-0.00101\,cm\approx-0.01\,mm\uparrow$$ p.C przemieści się w górę

Ad.6.3. Wydłużenie całego słupa – jest równe sumie wydłużeń wszystkich segmentów:

$$\Delta L=\delta_E=\lambda_I+\lambda_{II}+\lambda_{III}+\lambda_{IV}=\frac{Pa}{Et^2}\left(\frac{-0.6599\cdot 2}{0.4330}+\frac{0.841}{0.4330}+\frac{0.841}{0.6142}+\frac{-0.1599}{0.6142}\right)$$

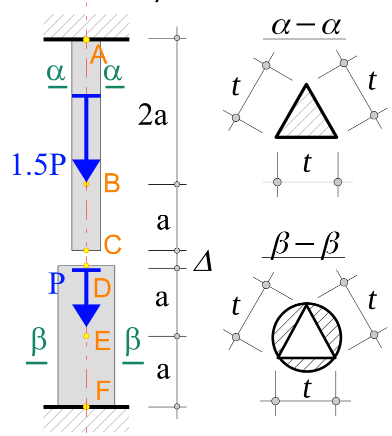
$$\Delta L=\delta_E=(-3.048+1.941+1.368-0.2603)\frac{Pa}{Et^2}=1.665\cdot 10^{-16}\frac{Pa}{Et^2}\approx 0$$

$$\Delta L=1.665\cdot 10^{-16}\frac{Pa}{Et^2}=1.511\cdot 10^{-19}\,cm\equiv 0$$ ✔

Uzyskany wyniki jest oczekiwany, gdyż w wyjściowym ustroju mamy obustronne utwierdzenie więc i suma wydłużeń musi być zerowa – chyba, że mielibyśmy do czynienia z osiadaniem podpory.
Ten – zgodny z intuicją wynik, jest jednocześnie dodatkowym sprawdzeniem poprawności dotychczasowych obliczeń na podstawie przemieszczeń ustroju (kontrola geometryczna).
Główna różnica pomiędzy ustrojem SW i SN: w ustroju SN napotykamy problem z narysowaniem wykresu sił wewnętrznych. Odrzucamy jedną z podpór, przyjmujemy odpowiednią reakcję jako dodatkowy parametr; robimy wykresy N: od obciążeń i osobno (!) od nieznanej reakcji, wyznaczamy tę reakcję, robimy ostateczny wykr. N!

Zad.7. Jakie musi być obciążenie P aby zamknęła się szczelina Δ.
Jedno z zadań typu dobierz jakąś wielkość (obciążenie, wymiar przekroju lub długość elementu) aby uzyskać jakiś określony efekt.

a=2 m $\quad f_c$=48 MPa
t= 12 cm $\quad f_t$=36 MPa
Δ=5 mm $\quad E$=20 GPa



Przypadek:
ścisk./rozc. osiowe : $\left|\sigma=\frac{N}{A}\right|\leqslant f_{?}$

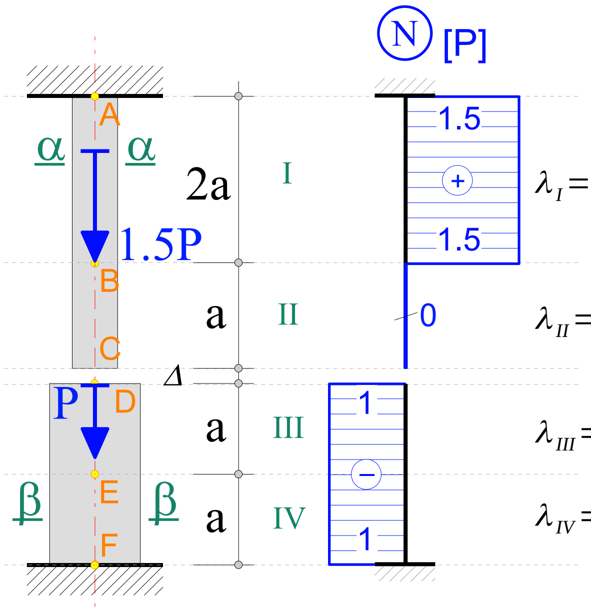
Tylko niezbędne z geom. mas:

$$A_\alpha=\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=0.4330\,t^2$$

$$r_\beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t\sqrt{3}}{2}=\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$A_\beta=\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\pi}{4}-\frac{t^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^2=0.6142\,t^2$$

Statyka: Niech Was nie zmylą podpory z obu stron słupa, gdyż obie jego części stanowią niezależne ustroje podparte na jednym tylko końcu – łatwo zrobić wykresy N:



$$\lambda_I=\frac{N_I\cdot 2a}{E\cdot A_\alpha}$$

$$\lambda_{II}=\frac{N_{II}\cdot a}{E\cdot A_\alpha}$$

$$\lambda_{III}=\frac{N_{III}\cdot a}{E\cdot A_\beta}$$

$$\lambda_{IV}=\frac{N_{IV}\cdot a}{E\cdot A_\beta}$$

Tutaj warunek wytrzymałościowy $\sigma_{extr}\leq$f jest bezużyteczny. Warunek wynikający z założeń zadania to zamknięcie się szczeliny, które może nastąpić po odpowiednim wydłużeniu obu części słupa:
ΔL=λ_I+λ_II+λ_III+λ_IV=Δ
Stąd pochodzi równanie geometrycznej natury nie wytrzymałościowej!

Suma wydłużeń wszystkich segmentów musi być równa szerokości szczeliny Δ:

$$\Delta L_{AC}+\Delta L_{DF}=\Delta$$

$$(\lambda_I+\lambda_{II})+(\lambda_{III}+\lambda_{IV})=\Delta$$

$$\frac{N_I\cdot 2a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{N_{II}\cdot a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{N_{III}\cdot a}{E\cdot A_\beta}+\frac{N_{IV}\cdot a}{E\cdot A_\beta}=\Delta$$

$$\frac{1.5\,P\cdot 2a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{0\cdot a}{E\cdot A_\alpha}+\frac{P\cdot a}{E\cdot A_\beta}+\frac{P\cdot a}{E\cdot A_\beta}=\Delta$$

$$\frac{1.5\,P\cdot 2}{A_\alpha}+\frac{P}{A_\beta}+\frac{P}{A_\beta}=\Delta\cdot\frac{E}{a}$$

$$\frac{1.5\,P\cdot 2}{A_\alpha}+\frac{P}{A_\beta}+\frac{P}{A_\beta}=\Delta\cdot\frac{E}{a}$$

$$\frac{3P}{A_\alpha}+\frac{2P}{A_\beta}=\Delta\cdot\frac{E}{a}$$

$$P\left(\frac{3}{A_\alpha}+\frac{2}{A_\beta}\right)=\Delta\cdot\frac{E}{a}$$

$$P=\Delta\cdot\frac{E}{a}\cdot\frac{A_\beta\cdot A_\alpha}{3A_\beta+2A_\alpha}$$

$$P=0.5\,cm\cdot\frac{2000.0\,kN/cm^2}{200\,cm}\cdot\frac{0.6142\cdot 0.4330\cdot(12\,cm)^2}{3\cdot 0.6142+2\cdot 0.4330}=\underline{70.7\,kN}$$

Aby zamknąć szczelinę trzeba przyłożyć obciążenie równe około 70.7 kN.