

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH
Wydział Budownictwa

PRACA DOKTORSKA

mgr inż. Ryszard Walentyński

*Statyka powłok obrotowych
wychylonych*

porównanie metod rozwiązania
analitycznej i numerycznej

promotor:

Prof. dr hab. inż. Stanisław Bielak

Gliwice 1995

Spis treści

	Strona
Karta tytułowa	1
Spis treści	2
Oznaczenia i symbole występujące w pracy	5
1. Wstęp	9
1.1. Przedmiot pracy	9
1.2. Stan badań w zakresie teorii powłok	11
1.3. Podstawowe założenia	13
1.4. Cel i zakres pracy	14
1.5. Metoda analityczna czy numeryczna	14
1.6. Wspomaganie komputerowe	17
1.7. Treść pracy	18
2. Opis geometryczny	20
2.1. Opis powierzchni środkowej w parametryzacji krzywiznowej	20
2.2. Współczynniki pierwszej formy różniczkowej powierzchni środkowej	22
2.3. Współczynniki drugiej formy różniczkowej powierzchni środkowej	23
2.4. Krzywizny	24
2.5. Współczynniki trzeciej formy różniczkowej powierzchni środkowej	25
2.6. Tensor pomocniczy	26
2.7. Symbole Christoffela	26
2.8. Opis powierzchni równoległej w parametryzacji krzywiznowej	27
3. Związki geometryczne	28
3.1. Tensory odkształcenia powierzchni środkowej powłoki	28
3.2. Tensory odkształcenia powłok obrotowych	30
3.2. Tensory odkształcenia dowolnej warstwy równoległej do powierzchni środkowej powłoki	31
3.3. Przemieszczenia fizyczne	32
4. Związki fizyczne	33
4.1. Naprężenia i odkształcenia	33
4.2. Siły wewnętrzne	34
4.3. Związki fizyczne dla powłok obrotowych	35

5.	Równania równowagi	37
5.1.	Równania równowagi powłoki dowolnej	37
5.2.	Równania równowagi powłoki obrotowej	38
5.3.	Siły fizyczne	38
6.	Rozdzielenie zmiennych	40
6.1.	Obciążenie powłoki obrotowej	40
6.2.	Rozdzielenie zmiennych dla wielkości wewnętrznych	40
7.	Rozwiązanie analityczne powłok	43
7.1.	Równanie różniczkowe rozwiązujące powłoki	43
7.2.	Rozwiązanie całki ogólnej równania jednorodnego	45
7.3.	Siły wewnętrzne całki ogólnej równania jednorodnego (stanu zgęciowego)	46
7.4.	Siły wewnętrzne całki szczególnej równania jednorodnego (umownego stanu błonowego)	47
7.5.	Przemieszczenia powłok	48
7.6.	Metodyka rozwiązania analitycznego powłok	49
7.7.	Analiza uproszczeń metody analitycznej	51
8.	Rozwiązanie całki szczególnej równania różniczkowego powłok obrotowych	52
8.1.	Siły wewnętrzne umownego stanu błonowego	52
8.2.	Siły wewnętrzne przy obciążeniu osiowo-symetrycznym	53
8.3.	Siły wewnętrzne przy obciążeniu nieosiowo-symetrycznym	54
8.4.	Metoda rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego	55
8.5.	Rozwiązanie równania drugiego różniczkowego sił	57
8.6.	Związki geometryczne umownego stanu błonowego	61
8.7.	Przemieszczenia przy obciążeniu osiowo-symetrycznym	62
8.8.	Przemieszczenia przy obciążeniu nieosiowo-symetrycznym	62
8.9.	Warunki brzegowe umownego stanu błonowego	64
8.10.	Momenty przekrojowe umownego stanu błonowego	65
9.	Rozwiązanie całki ogólnej powłok obrotowych	66
9.1.	Współczynniki szeregu hipertrygonometrycznego	66
9.2.	Zestawienie wzorów rozwiązania całki ogólnej	67
9.3.	Warunki brzegowe całki ogólnej	68

10. Rozwiązanie powłoki wychylonej od pionu	70
10.1. Wektor obciążenia	70
10.2. Rozwiązanie powłoki ustawionej równoległe do kierunku grawitacji	72
10.3. Rozwiązanie powłoki ustawionej prostopadle do kierunku grawitacji-wspornikowo	72
10.4. Rozwiązanie powłoki ustawionej ukośnie do kierunku grawitacji	73
10.5. Interpretacja mechaniczna rozwiązania powłoki ustawionej prostopadle do kierunku grawitacji	74
11. Rozwiązanie numeryczne powłoki obrotowej	78
11.1. Równania wyjściowe metody numerycznej	78
11.2. Budowa macierzy sztywności i rozwiązanie układu równań	83
11.3. Warunki brzegowe metody numerycznej	85
12. Przykład - rozwiązanie analityczne powłoki hiperboloidalnej wychylonej od pionu	86
13. Porównanie rozwiązania powłoki walcowej metodami analityczną i numeryczną	116
13.1. Rozwiązanie analityczne powłoki walcowej	116
13.2. Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego	118
13.3. Analiza przyczyn niestabilności rozwiązania numerycznego	137
14. Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego na przykładzie powłoki katenoidalnej	148
14.1. Rozwiązanie analityczne powłoki katenoidalnej	148
14.2. Porównanie rozwiązań i przyczyny błędów metody numerycznej	156
15. Podsumowanie i wnioski	169
Spis literatury	174

Oznaczenia i symbole występujące w pracy

Duże litery łacińskie:

A - niezmiennik tensora odkształcenia błonowego

B - niezmiennik tensora odkształcenia błonowo-zgięciowego

C - niezmiennik tensora odkształcenia zgięciowego

$C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ - stałe całkowania całki szczególnej równania różniczkowego

$C_{kl}^1, C_{kl}^2, \bar{C}_{kl}^1, \bar{C}_{kl}^2$ - stałe całkowania całki ogólnej równania różniczkowego

E - moduł Young'a

G - wyróżnik tensora metrycznego powierzchni równoległej

G_{ij}, G^{ij} - kowariantny/kontrawariantny tensor metryczny warstwy równoległej

H - Krzywizna średnia

K - krzywizna Gaussa

M^{ij} - tensor momentów,

\hat{M}^{ij} - tensor momentów całki ogólnej równania różniczkowego,

$M_j^{\bar{}}$ - momenty fizyczne

\bar{N} - niezmiennik tensora sił przekrojowych umownego stanu błonowego

N^{ij} - tensor sił przekrojowych

\bar{N}^{ij} - tensor sił przekrojowych umownego stanu błonowego

\bar{N}_s^{ij} - tensor sił przekrojowych całki szczególnej równania różniczkowego

\bar{N}_o^{ij} - tensor sił przekrojowych całki ogólnej równania różniczkowego

N_j^\neg - siły przekrojowe fizyczne

P^1, P^3 - składowe wektora obciążenia powłoki

\bar{P}^1, \bar{P}^3 - składowe wektora obciążenia powłoki wymuszającego stan błonowy

P_i^\neg, P_3^\neg - składowe wektora obciążenia fizycznego

Q^j - wektor sił poprzecznych

Q^\neg - siły poprzeczne fizyczne

S, S^i, S^{ij} - szeregi hipertrygonometryczne rozwiązujące całkę ogólną równania różniczkowego

V^j - wektor zastępczej siły poprzecznej

Z - skalar związany z krzywiznami warstwy równoległej

Małe litery łacińskie:

ant - oznaczenie wielkości związanych z antysymetryczną składową obciążenia

b - wyróżnik drugiej formy różniczkowej powierzchni

b_{ij}, b_i^j - kowariantny/mieszany tensor krzywiznowy

\bar{b}^{ij} - tensor pomocniczy

c_{ij} - tensor (współczynniki III formy różniczkowej)

\vec{d} - wektor obrotu

d^i, d^3 - kontrawariantne składowe wektora obrotu

e_{ij} - obiekt permutacyjny

f - funkcja opisująca południk powłoki

g - wyróżnik pierwszej formy różniczkowej powierzchni

g_{ij}, g^{ij} - kowariantny/kontrawariantny tensor metryczny

h - połowa grubości powłoki

i, j, k, l, r, s - wskaźniki przyjmujące wartości 1,2.

\bar{m} - wektor normalny do powierzchni środkowej

m_i, n_i - współczynniki szeregu hipertrygonometrycznego

q - ciężar jednostkowy płata powłoki

\bar{r} - wektor opisujący powierzchnię środkową nieodkształconą

\bar{r}' - wektor opisujący powierzchnię środkową odkształconą

\bar{r}_k - wektory bazy kowariantnej styczne do powierzchni środkowej

sym - oznaczenie wielkości związanych z symetryczną składową obciążenia

u^i - współrzędne krzywoliniowe

u^3 - współrzędna w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej

\bar{w} - wektor przemieszczenia

w^i, w^3 - kontrawariantne składowe wektora przemieszczenia

\bar{w}^i, \bar{w}^3 - kontrawariantne składowe wektora przemieszczenia całki szczególnej (stanu błonowego)

\hat{w}^i, \hat{w}^3 - kontrawariantne składowe wektora przemieszczenia całki ogólnej (stanu zgięciowego)

w_i^-, w_3^- - fizyczne składowe przemieszczenia powłoki

Małe litery greckie:

α - kąt wychylenia osi powłoki od pionu

δ_i^k - delta Kroneckera

$\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ - krzywizny powłoki

ε_k - współczynnik występujący w szeregu hipertrygonometrycznym

ε_{ij} - obiekt permutacyjny

γ_{ij}, γ^{ij} - kowariantny/kontrawariantny tensor odkształcenia błonowego

η - współczynnik

$\vartheta_{ij}, \vartheta^{ij}$ - kowariantny/kontrawariantny tensor odkształcenia zgięciowego

λ, μ - stałe Lamego

λ^* - współczynnik związany ze stałymi Lamego

ν - współczynnik Poisson'a

θ - współczynnik wynikający z rozłożenia obciążenia w szereg trygonometryczny

ρ_{ij}, ρ^{ij} - kowariantny/kontrawariantny tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego

τ^{ij} - tensor naprężenia

$\bar{\tau}^{ij}$ - tensor naprężenia błonowego

$\hat{\tau}^{ij}$ - tensor naprężenia błonowo-zgięciowego

$\hat{\tau}^{ij}$ - tensor naprężenia zgięciowego

ϖ - funkcja testowa rozwiązania całki szczególnej powłoki obrotowej

ω - współczynnik występujący w równaniu różniczkowym rozwiązującym powłoki

ζ - współczynnik

W niniejszej pracy starano się zachować możliwie dużą zgodność z oznaczeniami pracy [9].

Inne oznaczenia opisano w tekście pracy.

1. Wstęp

1.1. Przedmiot pracy

Przedmiotem pracy są powłoki obrotowe poddane obciążeniu ciężarem własnym, wychylone od pionu. Obciążenie powłoki nie jest osiowo-symetryczne. Zagadnienie nieosiowo-symetrycznego obciążenia powłoki nie znalazło dotychczas rozwiązania zamkniętego w postaci całki rozwiązującej równanie różniczkowe.

1.2. Stan badań w zakresie teorii powłok

Rozwiązanie zamknięte całki szczególnej powłoki obrotowej dla dowolnego kształtu południka i obciążonej osiowo-symetrycznie znane jest od dawna, Timoshenko, Wojnowsky-Krieger [44], i posiada interpretację mechaniczną.

Rozwiązanie analityczne powłok obrotowych obciążonych nieosiowo-symetrycznie w postaci zamkniętej nie zostało dotychczas rozwiązane dla ogólnego przypadku. Spotkać się można nawet z twierdzeniem, że znalezienie tego rozwiązania jest niemożliwe, Rakowski [41]. Inne prace, na przykład Mazurkiewicz, Nagórski [36], dla stanu obciążenia nieosiowo-symetrycznego ograniczają się jedynie do ogólnych rozważań podając rozwiązanie tylko dla stanu obciążenia osiowo symetrycznego.

Rozwiązania te obejmują jedynie przypadki powłoki walcowej i stożkowej z uwagi na prostotę kształtu oraz powłoki sferycznej, dla której rozwiązanie podał Flügge [17]. Zostało ono zacytowane przez Nowackiego [37].

Dla obciążenia antysymetrycznego wiatrem lub siłą poziomą - przez interpretację mechaniczną - rozwiązanie znaleźć można w pracy Girkmanna [18]. Rozwiązanie to nie daje jednak analitycznego, zamkniętego rozwiązania dla przemieszczeń.

W pracach Golczyka i Ledwonia [19] oraz Ledwonia [32] można znaleźć metodę przybliżonego rozwiązania układu równań sił stanu błonowego hiperboloidy za pomocą

wielomianów aproksymacyjnych lub metodą różnic skończonych techniką przegania. Metody te jednak z punktu widzenia autora, zwłaszcza pierwsza, są technicznie niewygodne i pracochłonne.

W ostatnich latach modne z uwagi na rozwój numerycznej techniki obliczeniowej stały się przybliżone metody numeryczne. Prym wiodą tu - stworzona przez Zienkiewicza [51, 52] metoda elementów skończonych oraz metoda elementów brzegowych, której propagatorem jest na przykład Burczyński [15]. W użyciu jest nadal z uwagi na prostotę metoda różnic skończonych prezentowana na przykład w pracy Rakowskiego [41]. Wszystkie te metody mają charakter przybliżony. Każde przybliżenie powinno być weryfikowalne metodami analitycznymi. Wobec braku takiego odniesienia było to dotychczas niemożliwe.

Badania w zakresie powłok, z uwagi na rozwój techniki obliczeniowej, rozwijają się w kierunku modnej obecnie nieliniowości geometrycznej, na przykład Pietraszkiewicz [40], oraz w pewnym stopniu fizycznej. Przyjmowane są jednak w tworzonych w tym celu teoriach bardzo uproszczone, budzące zastrzeżenia równania konstytutywne, na przykład Smoleń [42].

Rozwiązania te mogą mieć odniesienie analityczne jedynie dla najprostszycy kształtów powłok: walcowej, stożkowej, czy sferycznej

W zakresie analitycznego rozwiązania zagadnień nieliniowych geometrycznie pracę poświęcił Krawczyk [30].

Istotnym zagadnieniem w rozwiązywaniu powłok ma dobór odpowiedniej parametryzacji. Wpływowi parametryzacji na rozwiązanie powłok poświęcona jest praca Szymczaka [43]. W pracy [30] analizowane jest wykorzystanie parametryzacji symetrycznej. Wprowadzeniu parametryzacji symetrycznej poświęcona jest również praca Bielaka [14]. Transformacji sił wewnętrznych z układu krzywiznowego do symetrycznego poświęcono praca [3]. Z kolei wprowadzeniu parametryzacji półgeodezyjnej poświęcono pracę [12]. Autor pracy wybrał do analizy najprostszą - krzywiznową parametryzację, która jak się okazało dała w rozwiązaniu analitycznym oczekiwane

efekty, chociaż wspomniane prace nad parametryzacją symetryczną dają spore nadzieje na uzyskanie interesujących rezultatów.

1.3. Podstawowe założenia

Tematem niniejszej pracy są cienkie sprężyste powłoki spełniające założenia zapewniające geometryczną liniowość.

Przez powłokę cienką rozumiemy taką, której grubość jest znacznie mniejsza od minimalnego promienia krzywizny tej powłoki.

Materiał, z którego zbudowana jest powłoka powinien spełniać założenia uogólnionego prawa Hooke'a. Materiał ten powinien być jednorodny i izotropowy co pozwala na użycie metod analizy matematycznej. W pracy rozpatrywane są powłoki wykonane z materiału kompozytowego - żelbetu, który nie spełnia założeń liniowości, jednorodności i izotropowości, jednak przyjęcie założenia o uśrednionym module sprężystości było tu konieczne z uwagi na początkowy stan rozwoju badań doświadczalnych nad zależnościami konstytutywnymi w żelbetowych konstrukcjach powierzchniowych, a w szczególności w powłokach.

Wprowadzamy dwa założenia upraszczające Kirchhoffa-Love'a [27, 28, 34, 35] pierwsze o prostopadłości i prostoliniowości włókien poprzecznych przed i po odkształceniu powłoki, a drugie o pomijalności odkształceń i naprężeń poprzecznych. Pozwalają one na całkowanie po grubości powłoki i zastąpienie analizy naprężeń przez analizę tak zwanych sił wewnętrznych a tym samym sprowadzenie zagadnienia przestrzennego do dwuwymiarowego. Prowadzą jednak w konsekwencji do pewnych dalej idących uproszczeń jak na przykład konieczność wprowadzenia do warunków brzegowych tak zwanej zastępczej siły poprzecznej [9, 26]. Idąc dalej stwierdzamy, że wektory obrotu wyrażają się przez przemieszczenia co prowadzi w prostej drodze do trójparametrycznych równań przemieszczeniowych. Stwarza to kolejne problemy w analizie warunków brzegowych Stosując jedynie pewne "uściślenia", na przykład dla płyt [26],

otrzymać możemy pięcioparametryczną teorię stosowaną w metodzie elementów skończonych [41, 51, 52].

Zakładamy geometryczną liniowość problemu. Rozpatrywać będziemy sztywne powłoki budowlane, dla których wymagane jest z przyczyn użytkowych zachowanie małych odkształceń co jednocześnie warunkuje liniowość geometryczną.

W ramach teorii powłok zakładamy, w proponowanym rozwiązaniu analitycznym, że rozwiązanie powłoki można rozdzielić na dwa stany: umowny stan błonowy - z punktu widzenia analizy matematycznej rozwiązanie całki szczególnej równania różniczkowego oraz stan zgięciowy - rozwiązanie całki ogólnej równania różniczkowego jednorodnego. Można tu znaleźć pewną analogię do rozwiązania prostego ustroju prętowego metodą sił. W takim przypadku również rozpatrujemy dwa stany - rozwiązanie ustroju statycznie wyznaczalnego a następnie uzupełnienie go o rozwiązanie spełniające warunki brzegowe.

Rozwiązanie całki szczególnej czyli umowny stan błonowy traktować będziemy jako rozwiązanie podstawowe, dominujące w powłoce. W stanie błonowym nie mamy spełnionych wszystkich warunków brzegowych. Spełniamy je uzupełniając ten stan o stan zgięciowy wynikający ze spełnienia wszystkich warunków brzegowych. Warunki brzegowe spełniamy nakładając na rozwiązanie podstawowe rozwiązanie całki ogólnej równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu rozwiązującego powłoki. Postępowanie takie daje dostatecznie dokładne wyniki z punktu widzenia inżynierskiego.

W rozważaniach dotyczących wyprowadzenia stanu zgięciowego [9] zakłada się stałą grubość powłoki. W rzeczywistych konstrukcjach jest ona jednak czasami zmienna. Otóż na podstawie badań analitycznych [29] można stwierdzić, że wpływ zmiany grubości na wielkość sił wewnętrznych wynikających z zaburzeń brzegowych jest niewielki, a przyjęcie stałej grubości jest na ogół z korzyścią dla bezpieczeństwa.

Jak wspomniano stan zgięciowy sprowadza się do zanikających zaburzeń brzegowych.

W trakcie wyprowadzenia związków konstytutywnych zastosowano pewne uproszczenia i uśrednienia [9] jednak jak wykazano w pracach [30, 31] prowadzą one do

związków z dokładnością do sześciannu grubości powłoki a przyjęte uśrednienia nie powodują błędu większego niż 1 %.

Z uwagi na osiową symetrię powłoki, w ramach liniowej teorii, wprowadzono założenie o tak zwanym [17, 18, 19] rozdzieleniu zmiennych. Pozwala ono na znaczne uproszczenie rozwiązania analitycznego i numerycznego.

1.4. Cel i zakres pracy

Autor pracy postawił sobie za cel zbadanie dwoma rodzajami metod zagadnienia obciążenia nieosiowo-symetrycznego powłoki obrotowej.

Pierwszą z metod jest metoda analityczna oparta na założeniu o rozdzieleniu stanu błonowego i zgięciowego (całki szczególnej i ogólnej). Celem pracy w tym zakresie było uzyskanie, dotychczas nieznanego rozwiązania zamkniętego układu równań różniczkowych cząstkowych umownego stanu błonowego powłoki w zakresie sił i przemieszczeń dla obciążenia antysymetrycznego powłoki oraz uzupełnienie tego rozwiązania o stan zgięciowy.

Jest to przypadek z punktu widzenia inżynierskiego najbardziej interesujący gdyż obciążenie antysymetryczne jako niesamozrównoważone [41] wywoływać może w powłokach obrotowo-symetrycznych, na przykład wysokich kominach lub chłodniach kominowych [19, 32], duże przemieszczenia i siły wewnętrzne.

Rozwiązanie zagadnienia obciążenia antysymerycznego powłoki obrotowo-symetrycznej zilustrowano jako szczególnym przypadkiem obciążeniem powłoki wychylonej od pionu o kąt prosty (wspornikowo). Dla tego przypadku podano interpretację mechaniczną rozwiązania, czyli sposób w jaki dotychczas rozwiązywano powłoki obrotowe.

Uzyskanie postawionego zadania może stanowić zarówno sprawne narzędzie do rozwiązywania problemów inżynierskich jak i w celach badawczych do testowania rozwiązań numerycznych.

Dodatkowym celem było uzyskanie rozwiązania zamkniętego dla wyższych składowych periodycznych rozwinięcia obciążenia w szereg trygonometryczny.

Proponowana metoda uproszczonego dwuetapowego rozwiązania powłok prowadzi do otrzymania wyników (sił i przemieszczeń) z pewnym zawyżeniem. Autor postawił sobie za cel zbadanie tego wpływu.

Między innymi w tym celu równolegle prowadzone były badania tego zagadnienia na drodze numerycznej. Oparto się tu na jednej z metod przybliżonych - metodzie różnic skończonych w wersji przemieszczeniowej. Zastosowana metoda dawała w niektórych przypadkach wyniki zgodne z rozwiązaniem analitycznym. Jednak w pewnych przypadkach powłok okazała się ona niestabilna, a otrzymane wyniki okazały się błędne.

Celem pracy było przeanalizowanie na przykładach przyczyn tego zjawiska i podanie wstępnych kryteriów jakie powinny być spełnione aby rozwiązanie numeryczne było poprawne.

1.5. Metoda analityczna czy numeryczna

Główną tezą niniejszej pracy jest stwierdzenie, że podstawową przyczyną niestabilności rozwiązania jest niemożność rozdzielania, w ramach przedstawionej metody numerycznej, stanu błonowego i zgięciowego. W efekcie z jednej strony dochodzi tu do dodawania liczb różniących się o wiele rzędów, a z drugiej gdy wpływ zaburzeń brzegowych ma charakter impulsu skupionego na względnie małym obszarze poprawna analiza tego impulsu może być zawodna metodami numerycznymi. Wymaga ona między innymi odpowiednio gęstego podziału siatki dyskretnej w obszarze impulsu [33]. Celem pracy było przeanalizowanie koniecznej gęstości podziału. Poza tym zagadnienie pod względem matematycznym opiera się na rozwiązaniu numerycznym układu równań różniczkowych których stopień każdego sięga cztery.

W przeciwieństwie do powyższego rozwiązanie analityczne polega na rozwiązaniu kolejno dwóch równań różniczkowych stopnia drugiego, które często mają rozwiązanie zamknięte, a rozwiązanie tego zadania na drodze numerycznej nie sprawia

większych problemów. Rozwiązanie całki ogólnej równania różniczkowego ósmego rzędu sprowadza się do znalezienia szeregu hipertrygonometrycznego. Rozwiązanie szeregowe ma charakter lokalny i ogranicza się do obszaru zaburzeń jakim może być brzeg, otwór lub obciążenie skupione.

Prezentowaną w pracy analizę przyczyn niestabilności rozwiązania można rozciągnąć na wiele innych przybliżonych metod numerycznych jak: metoda elementów skończonych [51, 52], metoda elementów brzegowych [15] lub trochę zapomniana metoda wieloboku sznurowego [39]. Wszystkie te metody, tak jak i metoda różnic skończonych, bazują na lokalnej aproksymacji funkcji kształtu poszukiwanej funkcji wielomianem, najczęściej drugiego stopnia. Wszystkie metody numeryczne wrażliwe są na dodawanie liczb różniących się rzędem wielkości.

Prawdopodobnie wyżej wymienione przyczyny, choć wymagałoby to głębszych badań były przyczyną błędnych wyników analizy numerycznej w pracy [4]. zachodziło tu również zjawisko dodawania małych liczb do dużych oraz zastosowano zbyt rzadki, zdaniem autora podział siatką dyskretną.

Zjawiska wpływające na błędność wyników uzyskiwanymi metodami numerycznymi, a wynikające z podanych wyżej przyczyn można znaleźć również w innych działach techniki.

Można tu wymienić na przykład pracę [38] dotyczącą rozwiązania równań różniczkowych hiperbolicznych gdzie po lewej stronie tych równań występują wyrazy różniące się znacznie rzędem wielkości, a po prawej stronie źródłem ciepła jest impuls laserowy. Badania numeryczne tego zagadnienia nie dały dotychczas zadowalających wyników dla rzeczywistego charakteru tego impulsu.

Sięgając do bliższych okolic można podać za przykład prowadzone na naszym Wydziale w Katedrze Geotechniki i macierzystej dla autora Katedrze Teorii Konstrukcji Budowlanych prace na temat współpracy budowli z podłożem [2]. Przeprowadzone obliczenia programem Crisp opartym na metodzie elementów skończonych dają błędne wyniki z uwagi na znaczne różnice w sztywności budowli i podłoża.

Jak zwrócił na to uwagę Burczyński w pracy [15] również metoda elementów brzegowych jest zawodna dla ciał o wydłużonym kształcie, jak i dla powłok. Przyczyna tkwi tu prawdopodobnie w wyżej wymienionych faktach.

Można się zgodzić z tezą, że przyczyny błędności rozwiązania metodami numerycznymi mają charakter techniczny. Jednak z jednej strony trzeba poszukiwać dalej metodami analitycznymi rozwiązań, które określą kryteria jakie powinny spełnić rozwiązania numeryczne i dadzą możliwość porównania, a z drugiej strony należy wziąć pod uwagę ewentualny koszt takich obliczeń. Okazuje się, że czasami należałoby używać komputerów, które potrafiłyby rozwiązać i pomieścić układy równań o wielu, wielu tysiącach niewiadomych i operujące na liczbach o precyzji do kilkudziesięciu cyfr znaczących. Należałoby tu wziąć pod rozwagę ekonomikę tego zagadnienia.

Niniejsza praca nie stawia sobie za cel podważanie zasadności stosowania metod numerycznych. Należy jednak mieć na względzie zawodność tych metod. Trudno dziś mówić o ich uniwersalności. Miejscem rozwiązań numerycznych są zagadnienia, które nie uzyskały dotychczas lub nie mogą uzyskać rozwiązania analitycznego z uwagi, na przykład, na skomplikowany sposób obciążenia lub konfiguracji ustroju. Jednocześnie metody numeryczne pociągają za sobą konieczność przygotowywania ogromnych zbiorów danych, rozwiązywania ogromnych układów równań liniowych, często iteracyjnie, na liczbach o precyzji jakiej nie przewidzieli konstruktorzy wielu komputerów i producenci oprogramowania. Równie kłopotliwe jest opracowanie wyników, a co najistotniejsze ocena ich poprawności. Nie jest bowiem wystarczająca ocena zbieżności przeprowadzona na przykładach trywialnych. Z uwagi na często występującą nieekonomiczność i niepewność rozwiązań numerycznych wdrażanie ich do codziennej praktyki inżynierskiej następuje dość opornie.

Na drodze rozwiązań analitycznych stoją nadal duże trudności matematyczne. Jednak, jak przedstawimy to w niniejszej pracy, trud rozwiązania jest opłacalny, gdyż prowadzi do prostych, stabilnych i efektywnych inżyniersko rozwiązań. Jednocześnie otrzymujemy pewne narzędzie weryfikacji rozwiązań numerycznych.

Należy tu podkreślić, że nie ma metod uniwersalnych, każda metoda ma pewne ograniczenia i oparta jest na pewnych założeniach upraszczających, na które trzeba zwracać baczną uwagę. Rozwiązań należy w miarę możliwości poszukiwać metodami analitycznymi. Gdy ich brak należy oprzeć się na rozwiązaniach numerycznych. Tak naprawdę weryfikację rozwiązań stanowi dopiero doświadczenie fizyczne.

1.6. Wspomaganie komputerowe

W ostatnich latach technika informatyczna dostarcza badaczom i inżynierom nie tylko coraz sprawniejszy i szybszy sprzęt komputerowy oraz oprogramowanie do obliczeń numerycznych ale także systemy analizy symbolicznej. Programy te pozwalają nie tylko obliczyć numerycznie zadanie ale także na symboliczne przekształcenie i rozwiązanie wielu problemów matematycznych takich jak analityczne całkowanie, różniczkowanie, rozwiązywanie równań różniczkowych, transformacje Laplace'a czy Fouriera, albo operacje macierzowe lub tensorowe i wiele innych.

Dużą pomocą w rozwiązaniu zagadnień analitycznych i numerycznych, a także opracowaniu większości grafiki w niniejszej pracy było wykorzystanie systemu *Mathematica* stworzonego przez Wolframa [48]. Występujące w pracy wzory i przekształcenia matematyczne niezbędne do rozwiązania analitycznego i numerycznego oraz dla przykładów obliczeniowych zostały zweryfikowane lub wykonane z pomocą tego systemu co zostało zaprezentowane dla wybranych wzorów w pracy.



1.7. Treść pracy

Po przedstawionych już zagadnieniach wstępnych w rozdziale drugim zaprezentowano opis geometryczny powłoki obrotowej w krzywiznowym, ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych. Przyjęta parametryzacja oparta na opisie powłoki poprzez funkcję definiującą południk pozwoliła z jednej strony na objęcie szerokiej klasy powłok obrotowych, a z drugiej okazała się najwłaściwszą z uwagi na uzyskane dalej zamknięte rozwiązanie całki szczególnej zadania. W rozdziale tym wykazano, że dla przyjętej parametryzacji niezerowe składowe tensora b'_i , równe są krzywiznom głównym powierzchni środkowej powłoki. Przedstawiono tu również wzory transformacyjne na współrzędne fizyczne przemieszczeń powłoki

W rozdziale trzecim wychodząc z ogólnych zagadnień dotyczących powłok wyprowadzono wzory na związki geometryczne powłok obrotowych.

Z kolei w rozdziale czwartym przedstawiono, wyprowadzone z ogólnych zależności, uściślone związki fizyczne powłok obrotowych. Związki te oparte na uściślonych rozważaniach geometrycznych prowadzą do niesymetrycznych tensorów sił wewnętrznych.

Następnie w rozdziale piątym przedstawiono rozpisane równania równowagi powłok obrotowych. Dołączono tu wzory transformacyjne na współrzędne fizyczne dla sił wewnętrznych i obciążeń powłoki.

W rozdziale szóstym przedstawiono założenie o rozdzieleniu zmiennych. Zagadnienie to pozwala sprowadzić rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego do jednowymiarowego przestrzennie.

Po przedstawieniu ogólnych zagadnień teoretycznych w rozdziale siódmym zaprezentowano metodę rozwiązywania analitycznego powłok opartą na rozdzieleniu rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu niejednorodnego na całkę szczególną równania niejednorodnego i całkę ogólną równania jednorodnego. Przedstawiono tu metodykę przyjętego rozwiązania uproszczonego.

W kolejnym, ósmym rozdziale pracy rozwiązano całkę szczególną równania niejednorodnego dla ogólnego przypadku obciążenia osiowo- i anty- symetrycznego powłoki obrotowej. Uzyskano również rozwiązanie dla szerokiej klasy powłok obrotowych o dodatniej i ujemnej krzywiznie Gaussa obciążonych dowolnie. Rozwiązanie to otrzymano w dogodnej obliczeniowo zamkniętej postaci - czyli całek równania różniczkowego.

W dziewiątym rozdziale przedstawiono rozwiązanie całki ogólnej równania jednorodnego w zastosowaniu do powłok obrotowych. Podano tu sposób uwzględnienia warunków brzegowych.

Dalsze rozważania skupione zostały na przypadku powłok obrotowych wychylonych od pionu. W rozdziale dziesiątym podano sposób rozwiązania całki szczególnej równania niejednorodnego dla tego przypadku obciążenia. Podano tu również interpretację mechaniczną tego zagadnienia.

W rozdziale jedenastym podano ogólne zasady rozwiązania numerycznego powłoki obrotowej. Podano tu wyjściowe równania oraz schemat numerycznego przejścia na równania przemieszczeniowe z uwzględnieniem warunków brzegowych.

Kolejne działania oparte zostały na przykładach. Jako pierwsze zilustrowano zagadnienie rozwiązania całki szczególnej równania niejednorodnego powłoki hiperboloidalnej o zmiennej grubości wychylonej o pewien kąt od pionu. Przykład ten obrazuje rozwiązanie przedstawione w rozdziale dziesiątym.

Kolejne dwa przykłady poświęcono porównaniu rozwiązania zadania powłok wychylonych wspornikowo metodami analityczną i numeryczną. W rozdziale trzynastym rozważano powłoki walcowe. Zbadano tu przyczyny niestabilności rozwiązania numerycznego długich powłok walcowych.

W rozdziale czternastym rozważano powłoki katenoidalne. Również i tu stwierdzono niestabilność rozwiązania numerycznego oraz podano jego przyczyny.

Pracę kończy się podsumowaniem i zebraniem wniosków. Zaprezentowane są one w ostatnim piętnastym rozdziale.

2. Opis geometryczny

2.1. Opis powierzchni środkowej w parametryzacji krzywiznowej

Niech dana będzie funkcja ciągła dana równaniem:

$$x = f(z), \quad (2.1)$$

gdzie $z \in \langle l_0, l \rangle$. Zakładamy ponadto, że funkcja $f(z) > 0$ dla każdego $z < l$, $f(z) \geq 0$ dla $z = l$ oraz, że funkcja ta jest n -krotnie różniczkowalna. Jeśli dokonamy obrotu wykresu tej funkcji wokół osi z o kąt pełny, to otrzymamy powierzchnię obrotową, która stanowić będzie powierzchnię środkową opisywanej powłoki (rys. 2.1).

W dalszych rozważaniach zakładając będziemy, że powłoka, której południk opisany jest daną funkcją jest podparta (lub utwierdzona) na brzegu $z = l_0$. Na brzegu tym będziemy mieli zadane warunki brzegowe w przemieszczeniach.

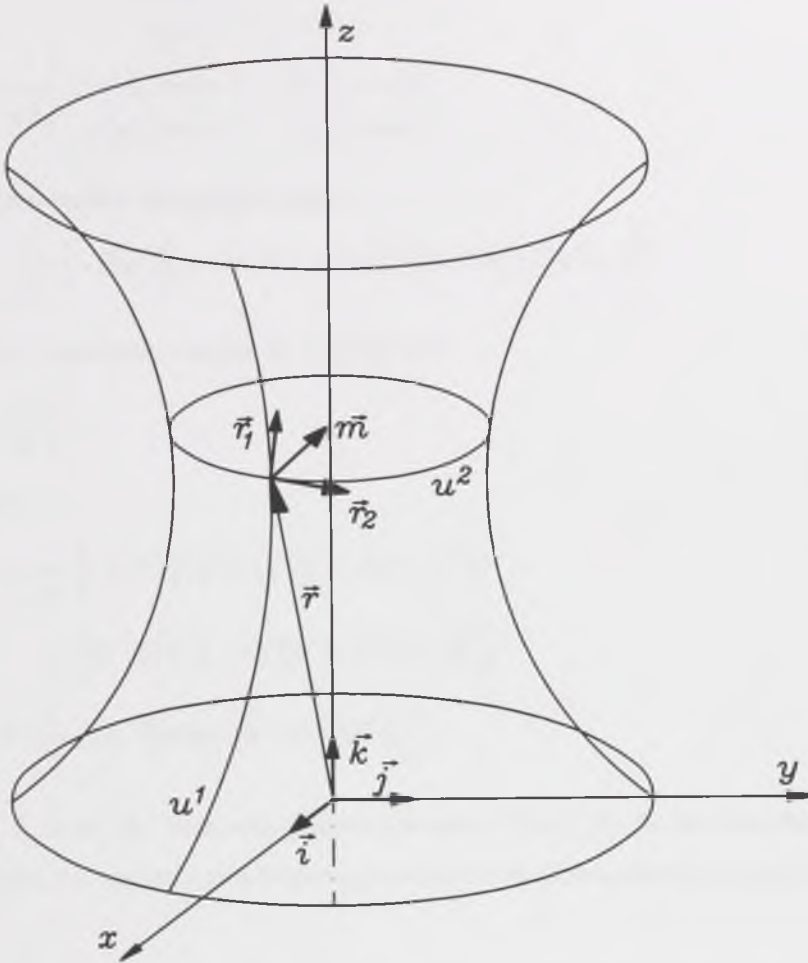
Brzeg $z = l$ traktować będziemy jako swobodny. Na brzegu tym zadane będziemy mieli warunki brzegowe w siłach. W przypadku zerowania się funkcji f w tym punkcie otrzymujemy, co prawda, osobliwość parametryzacji, jednak rozwiązanie możemy uzyskać jako granicę odpowiednich funkcji uzyskanych dla ogólnego przypadku danej powłoki. Prostym przypadkiem jest tu biegun sfery lub wierzchołek stożka.

Powierzchnia ta opisana jest równaniem:

$$\vec{r} = f(u^1) [\vec{i} \cos(u^2) + \vec{j} \sin(u^2)] + u^1 \vec{k}, \quad (2.2)$$

gdzie u^1, u^2 w wspólnym układzie krzywiznowym na powierzchni przy czym współrzędna u^1 , mierzona w jednostkach długości, pokrywa się ze współrzędną z co do wartości. Współrzędna u^2 mierzona jest w radianach począwszy od dodatniego ramienia osi x w kierunku dodatniego ramienia osi y , $u^2 \in (0, 2\pi)$.

Tak przyjęty układ współrzędnych jest najwłaściwszy z punktu widzenia orientacji topograficznej. Pozwala na proste określenie interesującego nas punktu na powierzchni środkowej. Ponadto jak się okazało przyjęta parametryzacja pozwoliła na znalezienie zamkniętego rozwiązania analitycznego całki szczególnej zadania.



rys. 2.1

Wektory bazy kowariantnej na powierzchni \bar{r}_1, \bar{r}_2 otrzymujemy jako cząstkową pochodną wektora \bar{r} względem u^i :

$$\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}. \quad (2.3)$$

Zatem:

$$\bar{r}_1 = f(u^1),_1 [\bar{i} \cos(u^2) + \bar{j} \sin(u^2)] + \bar{k}, \quad (2.4)$$

$$\bar{r}_2 = f(u^1) [-\bar{i} \sin(u^2) + \bar{j} \cos(u^2)], \quad (2.5)$$

zaś wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni \bar{m} otrzymujemy ze wzoru:

$$\bar{m} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\sqrt{g}}, \quad (2.6)$$

g jest wyróżnikiem pierwszej formy różniczkowej.

$$\bar{m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f(u'),, \cos(u^2) & f(u'),, \sin(u^2) & 1 \\ -f(u')\sin(u^2) & f(u')\cos(u^2) & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

stąd po wymnożeniu i uporządkowaniu:

$$\bar{m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ -f(u') [\cos(u^2) \vec{i} + \sin(u^2) \vec{j}] + f(u') f(u'),, \vec{k} \right\}. \quad (2.8)$$

Różniczkując cząstkowo wektor \bar{m} względem u' :

$$\bar{m}_i = \frac{\partial \bar{m}}{\partial u'}. \quad (2.9)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ -f(u'),, [\cos(u^2) \vec{i} + \sin(u^2) \vec{j}] + \right. \\ \left. + [f(u') f(u'),,, + f(u'),, f(u'),,] \vec{k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\bar{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} f(u') [\sin(u^2) \vec{i} - \cos(u^2) \vec{j}]. \quad (2.11)$$

Wektory $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \bar{m}, \bar{m}_1, \bar{m}_2$ stanowią pięciowymiarową bazę [9] na powierzchni środkowej powłoki. Służą do wyznaczenia współczynników form różniczkowych tej powierzchni.

2.2. Współczynniki pierwszej formy różniczkowej powierzchni środkowej

Współczynniki pierwszej formy różniczkowej powierzchni środkowej obliczamy z iloczynu skalarnego:

$$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j. \quad (2.12)$$

Kolejno otrzymujemy:

$$g_{11} = [f(u'),,]^2 + 1, \quad (2.13)$$

$$g_{22} = [f(u')]^2, \quad (2.14)$$

$$g_{12} = g_{21} = 0. \quad (2.15)$$

Ze wzoru (2.15) wynika, że krzywoliniowy układ współrzędnych jest ortogonalny.

Wyróżnik pierwszej formy różniczkowej g_{ij} wynosi:

$$g = \det g_{ij} = g_{11} g_{22}. \quad (2.16)$$

W związku z ortogonalnością układu krzywoliniowego współczynniki kontrawariantnego tensora metrycznego można wyrazić:

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad (2.17)$$

$$g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad (2.18)$$

$$g^{12} = g^{21} = 0. \quad (2.19)$$

Funkcję f i jej pochodne można wyrazić przez współczynniki g_{22} pierwszej formy różniczkowej:

$$f(u^1) \equiv \sqrt{g_{22}}, \quad (2.20)$$

$$f(u^1)_{,1} \equiv \sqrt{g_{22,1}}, \quad (2.21)$$

$$f(u^1)_{,11} \equiv \sqrt{g_{22,11}}, \quad (2.22)$$

itd...

2.3. Współczynniki drugiej formy różniczkowej powierzchni środkowej

Współczynniki drugiej formy różniczkowej powierzchni otrzymuje się jako iloczyn skalarny:

$$b_{ij} = -\vec{r}_i \vec{m}_j. \quad (2.23)$$

Po wykorzystaniu (2.20), (2.21) i (2.22) otrzymamy:

$$b_{11} = -\frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (2.24)$$

$$b_{22} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (2.25)$$

$$b_{12} = b_{21} = 0. \quad (2.26)$$

Ze wzoru (2.26) i ortogonalności układu współrzędnych wynika, że układ ten jest krzywiznowy.

Wyróżnik drugiej formy różniczkowej b_{ij} wynosi:

$$b = \det b_{ij} = b_{11} b_{22}. \quad (2.27)$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że przedstawione powyżej zależności są funkcjami wyłącznie współrzędnej krzywoliniowej u^i . Dotyczy to również innych wielkości wyrażonych w krzywiznowym układzie współrzędnych.

2.4. Krzywizny

2.4.1. Krzywizna średnia

Krzywiznę średnią H , czyli połowę z sumy krzywizn głównych, obliczamy jako sumę:

$$H = \frac{1}{2} b_{ij} g^{ij}, \quad (2.28)$$

co daje po rozpisaniu:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}} \right). \quad (2.29)$$

2.4.2. Krzywizna Gaussa

Krzywiznę Gaussa K , czyli iloczyn krzywizn głównych, oblicza się ze wzoru:

$$K = \frac{b}{g}. \quad (2.30)$$

2.4.3. Krzywizny główne

Analizując postać równań opisujących krzywizny średnią i Gaussa dochodzimy do wniosku, że dla krzywiznowego układu współrzędnych krzywoliniowych z jakim mamy do czynienia - krzywizny główne, oznaczone w [9] przez $\epsilon, \bar{\epsilon}$, wyrażają się przez tensor mieszany b_i^j :

$$b_i^j = b_{ik} g^{kj}. \quad (2.31)$$

Krzywizna południka $\bar{\epsilon}$, po uwzględnieniu (2.17) wynosi:

$$\bar{\epsilon} = b_i^i = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad (2.32)$$

a po podstawieniu (2.24):

$$\bar{\varepsilon} = b_i^i = -\frac{\sqrt{g_{22,11}}}{(g_{11})^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.33)$$

Z kolei krzywiznę równoleżnikową ε , po uwzględnieniu (2.18), obliczamy ze wzoru:

$$\varepsilon = b_2^2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}, \quad (2.34)$$

a po podstawieniu (2.25) i uporządkowaniu:

$$\varepsilon = b_2^2 = \frac{l}{\sqrt{g}}. \quad (2.35)$$

Pozostałe dwie składowe tensora b_i^j zerują się.

Aby udowodnić, że b_i^j jest tensorem krzywizn wystarczy dodać stronami (2.32) do (2.34) i porównać z (2.29). Otrzymamy wówczas inną postać wzoru na krzywiznę średnią:

$$2H = b_k^k, \quad (2.36)$$

wymnożenie zaś stronami (2.32) i (2.34) daje, po uwzględnieniu (2.16) i (2.27) wyrażenie na krzywiznę Gaussa (2.30).

Krzywizny główne można wyrazić poprzez krzywizny średnią i Gaussa [9] w następujący sposób:

$$\varepsilon = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad (2.37)$$

$$\bar{\varepsilon} = H - \sqrt{H^2 - K}. \quad (2.38)$$

2.5. Współczynniki trzeciej formy różniczkowej powierzchni

Współczynniki trzeciej formy różniczkowej powierzchni otrzymuje się jako iloczyn skalarny:

$$c_{ij} = \bar{m}_i \bar{m}_j. \quad (2.39)$$

Tensor ten można też wyrazić przez podane wcześniej wielkości:

$$c_{ij} = 2H b_{ij} - K g_{ij}, \quad (2.40)$$

co daje po podstawieniu odpowiednich wielkości i uporządkowaniu:

$$c_{11} = \frac{(b_{11})^2}{g_{11}}, \quad (2.41)$$

$$c_{22} = \frac{(b_{22})^2}{g_{22}}, \quad (2.42)$$

$$c_{12} = c_{21} = 0. \quad (2.43)$$

2.6. Tensor pomocniczy

Wprowadzamy pomocniczy tensor \bar{b}^{ij} [9], który zawsze występuje w kombinacji $K\bar{b}^{ij}$. Elementy tej kombinacji po rozpisaniu wyrażają się następująco:

$$K\bar{b}^{11} = \frac{b_{22}}{g}, \quad (2.44)$$

$$K\bar{b}^{22} = \frac{b_{11}}{g}, \quad (2.45)$$

$$K\bar{b}^{12} = K\bar{b}^{21} = 0. \quad (2.46)$$

2.7. Symbole Christoffela

Symbole Christoffela drugiego rodzaju, występujące w równaniach różniczkowych cząstkowych, opisuje wzór:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right), \quad (2.47)$$

po rozpisaniu otrzymujemy:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{g_{11'1}}{2g_{11}}, \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{g_{22'1}}{2g_{11}}, \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{g_{22'1}}{2g_{22}}, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (2.51)$$

2.8. Opis powierzchni równoległej w parametryzacji krzywiznowej

Powierzchnia równoległa do powierzchni środkowej to taka, której wszystkie punkty znajdują się w odległości u^3 od powierzchni środkowej powłoki. Opisuje ją równanie:

$$\vec{R} = \vec{r} + u^3 \vec{m}. \quad (2.52)$$

Podamy za [7, 8, 9], bez wyprowadzenia wyrażenia na współczynniki form różniczkowych tej powierzchni. Oznaczmy je dla odróżnienia dużymi literami alfabetu łacińskiego. Kowariantny tensor metryczny:

$$G_{ij} = g_{ij} - 2u^3 b_{ij} + (u^3)^2 c_{ij}, \quad (2.53)$$

lub po podstawieniu (2.38):

$$G_{ij} = g_{ij} \left[1 - K (u^3)^2 \right] - 2b_{ij} (1 - H u^3) u^3, \quad (2.54)$$

wyróżnik tego tensora obliczamy ze wzoru:

$$G = g \left[1 - 2H u^3 + K (u^3)^2 \right]^2. \quad (2.55)$$

Kontrawariantny tensor metryczny wyrazimy w podobnej do (2.54) konwencji:

$$G^{ij} = \frac{g}{G} \left\{ g^{ij} \left[1 - K (u^3)^2 \right] - 2K \bar{b}^{ij} (1 - H u^3) u^3 \right\}. \quad (2.56)$$

W dalszych rozważaniach występują iloczyny tworzone z wyrażeń (2.54) oraz (2.56). Konieczne uproszczenia można wprowadzić w dwojaki sposób [5, 6, 9], albo pominąć składniki zawierające kwadraty i wyższe potęgi z , lub wprowadzić wersję uśrednioną oznaczoną tu nadkreśleniem:

$$\bar{G}_{ij} = Z g_{ij}, \quad (2.57)$$

$$\bar{G}^{ij} = \frac{1}{Z} g^{ij}, \quad (2.58)$$

gdzie:

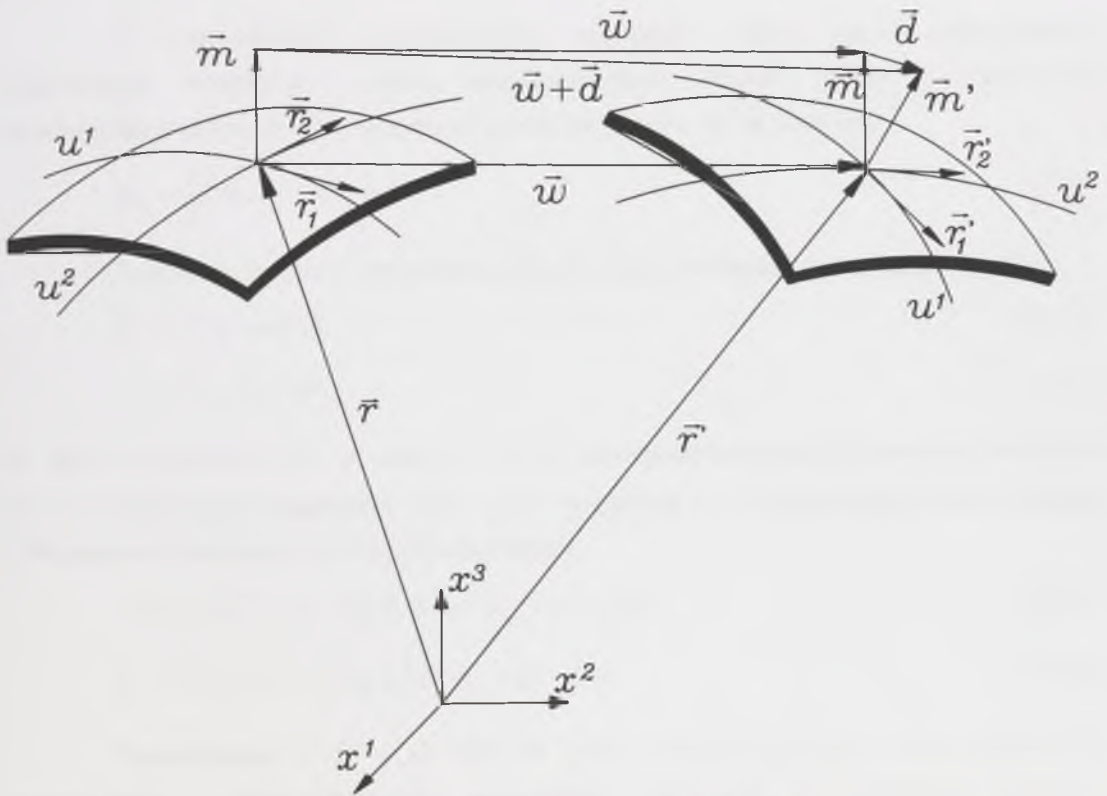
$$Z = 1 - 2H u^3 + K (u^3)^2. \quad (2.59)$$

Wersja ta jest ścisła dla sfery. Dla innych powłok daje wyniki podobne do wersji uproszczonej. Jest jednak wygodniejsza, a przy sumowaniu daje wielkości dokładne.

3. Związki geometryczne

3.1. Tensory odkształcenia powierzchni środkowej powłoki dowolnej

Powierzchnia gładka opisana może być z dokładnością do położenia w przestrzeni poprzez pierwszą i drugą formę różniczkową powierzchni [9]. Dla określenia powierzchni odkształconej musimy zatem je znać. Jeżeli powierzchnia środkowa powłoki $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ przejdzie na powierzchnię $\bar{r}' = \bar{r}'(u^1, u^2)$, rys 3.1,



Rysunek 3.1. Przemieszczenie płata powłoki

to można to zapisać w ujęciu wektorowym wzorem:

$$\bar{r}' = \bar{r} + \bar{w}. \quad (3.1)$$

Wektor \bar{w} nazywamy wektorem przemieszczenia odkształconej powierzchni środkowej powłoki.

Tensor odkształcenia błonowego definiujemy w sposób następujący:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij}). \quad (3.2)$$

Tensor ten wyrazić można, dla małych odkształceń, zgodnie wzorem:

$$\gamma_{ij} = \frac{I}{2} (\bar{r}_i \bar{w}_j + \bar{r}_j \bar{w}_i). \quad (3.3)$$

Tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego określamy jako:

$$\rho_{ij} = \frac{I}{2} (b_{ij}' - b_{ij}) \quad (3.4)$$

Tensor ten przedstawić można, również przy założeniu małych odkształceń jako:

$$\rho_{ij} = -\frac{I}{2} (\bar{m}_i \bar{w}_j + \bar{r}_i \bar{d}_j). \quad (3.5)$$

W rozważaniach teoretycznych występuje także tensor odkształcenia zgięciowego wyrażający zmianę współczynników trzeciej formy geometrycznej powierzchni środkowej. Dla małych odkształceń wyraża się on wzorem:

$$\vartheta_{ij} = \frac{I}{2} (\bar{m}_i \bar{d}_j + \bar{m}_j \bar{d}_i). \quad (3.6)$$

Rozłóżmy wektory przemieszczenia \bar{w} oraz \bar{d} w bazie kowariantnej \bar{r}_k , \bar{m} :

$$\bar{w} = w^k \bar{r}_k + w^3 \bar{m}, \quad (3.7)$$

$$\bar{d} = d^k \bar{r}_k + d^3 \bar{m}. \quad (3.8)$$

W tych wyrażeniach w^k , w^3 oraz d^k , d^3 są kontrawariantnymi składowymi wektorów \bar{w} i \bar{d} . Różniczkując cząstkowo (3.7 i (3.8) względem u^j i wykorzystując wzory Gaussa i Weingartena otrzymamy po uporządkowaniu:

$$\bar{w}_j = (w^k |_{,j} - w^3 b_j^k) \bar{r}_k + (w^k b_{kj} + w^3,_{,j}) \bar{m}, \quad (3.9)$$

$$\bar{d}_j = (d^k |_{,j} - d^3 b_j^k) \bar{r}_k + (d^k b_{kj} + d^3,_{,j}) \bar{m}. \quad (3.10)$$

Podstawiając (3.9) i (3.10) do (3.3), (3.5) oraz (3.6) otrzymujemy po wymnożeniu i uporządkowaniu następujące wyrażenia na składowe tensorów odkształceń.

$$\begin{cases} 2\gamma_{ij} = g_{ik} w^k |_{,j} + g_{kj} w^k |_{,i} - 2b_{ij} w^3, \\ 2\rho_{ij} = g_{ik} d^k |_{,j} + b_{kj} w^k |_{,i} - b_{ij} d^3 - c_{ij} w^3, \\ 2\vartheta_{ij} = b_{ik} d^k |_{,j} + b_{kj} d^k |_{,i} - 2c_{ij} d^3. \end{cases} \quad (3.11)$$

W ramach klasycznej teorii powłok cienkich zakładamy, że wektor jednostkowy \vec{m}' jest prostopadły do powierzchni środkowej odkształconej. Pozwala to powiązać składowe wektora \vec{d} ze składowymi wektora \vec{w} . Rozważania przedstawione w [9] prowadzą do związków:

$$d^i = -\left(w^k b_{ki} + w^3,_{,i}\right) g^{ij}, \quad (3.12)$$

$$d^3 = 0, \quad (3.13)$$

co pozwala powiązać składowe tensorów odkształceń wyłącznie ze składowymi wektora przemieszczenia:

$$\begin{cases} 2\gamma_{ij} = g_{ik} w^k|_j + g_{kj} w^k|_i - 2b_{ij} w^3, \\ 2\rho_{ij} = b_{ik} w^k|_j + b_{kj} w^k|_i - c_{ij} w^3 + w^3|_{,ij}, \\ 2\vartheta_{ij} = c_{ik} w^k|_j + c_{kj} w^k|_i + b_j^k w^3|_{ik} + b_i^k w^3|_{kj}. \end{cases} \quad (3.14)$$

W dalszych rozważaniach nie będziemy zajmować się tensorem odkształcenia zgięciowego z uwagi na to, że występuje on przy wyższych potęgach współrzędnej u^3 w całkach na siły wewnętrzne. W związku z tym jego wpływ pominiemy.

3.2. Tensory odkształcenia powłok obrotowych

Uwzględniając krzywiznowy charakter proponowanej parametryzacji otrzymujemy następującą postać związków geometrycznych powłok obrotowych.

$$\begin{cases} \gamma_{11} = g_{11} w^1|_1 - b_{11} w^3, \\ \gamma_{22} = g_{22} w^2|_2 - b_{22} w^3, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2} \left(g_{11} w^1|_2 + g_{22} w^2|_1 \right), \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} 2\rho_{11} = b_{11} w^1|_1 + g_{11} d^1|_1 + c_{11} w^3 + b_{11} d^3, \\ 2\rho_{22} = b_{22} w^2|_2 + g_{22} d^2|_2 + c_{22} w^3 + b_{22} d^3, \\ 2\rho_{12} = b_{22} w^2|_1 + g_{11} d^1|_2, \\ 2\rho_{21} = b_{11} w^1|_2 + g_{22} d^2|_1, \end{cases} \quad (3.16)$$

lub po uwzględnieniu (3.12) i (3.13):

$$\begin{cases} 2\rho_{11} = 2b_{11} w^1|_1 - c_{11} w^3 + w^3|_{11}, \\ 2\rho_{22} = 2b_{22} w^2|_2 - c_{22} w^3 + w^3|_{22}, \\ 2\rho_{12} = 2\rho_{21} = b_{11} w^1|_2 + b_{22} w^2|_1 + w^3|_{12}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Po rozpisaniu pochodnych kowariantnych i uporządkowaniu otrzymujemy następujące wzory na składowe tensora odkształcenia błonowego:

$$\begin{cases} \gamma_{11} = \sqrt{g_{11}}(\sqrt{g_{11}} w^1)_{,1} - b_{11} w^3, \\ 2\gamma_{12} = 2\gamma_{21} = g_{11} w^1_{,2} + g_{22} w^2_{,1}, \\ \gamma_{22} = \frac{1}{2} g_{22,1} w^1 + g_{22} w^2_{,2} - b_{22} w^3, \end{cases} \quad (3.18)$$

oraz tensora odkształcenia błonowo-zgięciowego:

$$\begin{cases} 2\rho_{11} = 2b_{11} w^1_{,1} + g_{11,1} b'_1 w^1 - c_{11} w^3 + w^3|_{11}, \\ 2\rho_{22} = 2b_{22} w^2_{,2} + g_{22,1} b'_2 w^1 - c_{22} w^3 + w^3|_{22}, \\ 2\rho_{12} = 2\rho_{21} = b_{11} w^1_{,2} + b_{22} w^2_{,1} + g_{22,1}(b'_2 - b'_1)w^2 - w^3|_{12}. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.3. Tensory odkształcenia dowolnej warstwy równoległej do powierzchni środkowej powłoki

Za pracą [9] podamy, że dla dowolnej warstwy równoległej tensor odkształcenia błonowego dowolnej warstwy równoległej do powierzchni środkowej wynosi:

$$\gamma_{ij}^* = \gamma_{ij} - 2u^3 \rho_{ij} + (u^3)^2 \vartheta_{ij}, \quad (3.20)$$

odpowiedni tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego:

$$\rho_{ij}^* = \rho_{ij} - u^3 \vartheta_{ij}, \quad (3.21)$$

i dla porządku tensor odkształcenia zgięciowego:

$$\vartheta_{ij}^* = \vartheta_{ij}. \quad (3.22)$$

Wzory powyższe ważne są dla infinitesimalnych odkształceń oraz założenia o prostoliniowości włókien poprzecznych do powierzchni środkowej przed i po odkształceniu powłoki.

3.4. Przemieszczenia fizyczne.

Występujące w układach (3.16) i (3.17) składowe przemieszczenia są wielkościami określonymi we współrzędnych tensorowych. Aby otrzymać wielkości we współrzędnych fizycznych należy te przemieszczenia przemnożyć przez pewne wyrażenia geometryczne według poniższych wzorów:

$$w_i^{\sim} = \sqrt{g_{ii}} w^i, \quad (3.23)$$

$$w_{\tilde{3}}^{\sim} = w^3. \quad (3.24)$$

Uwaga ! Po "i" nie sumować.

4. Związki fizyczne

4.1. Naprężenia i odkształcenia

Dla cienkich powłok związki między naprężeniami i odkształceniami, w dowolnej warstwie równoległej do powierzchni środkowej, otrzymujemy z uogólnionego prawa Hooke'a. Związki te, w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych, wyrażają się wzorem [9]:

$$\tau^{ij} = \left[\lambda^* G^{ij} G^{mn} + \mu (G^{im} G^{jn} + G^{in} G^{jm}) \right] \gamma_{mn}^*, \quad (4.1)$$

lub:

$$\tau^{ij} = \lambda^* G^{ij} G^{mn} \gamma_{mn}^* + 2\mu \gamma^{*ij}, \quad (4.2)$$

gdzie τ^{ij} jest kontrawariantnym tensorem naprężenia, a γ^{*ij} jest kontrawariantnym tensorem podniesionym w bazie G^{ij} .

Parametr λ^* , zgodnie z drugą hipotezą Kirchhoffa [27, 28], związany jest ze współczynnikami Lamego związkiem:

$$\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (4.3)$$

Jeżeli wprowadzimy pojęcie tensorów naprężenia błonowego $\bar{\tau}^{ij}$, naprężenia błonowo-zgięciowego $\hat{\tau}^{ij}$ i naprężenia zgięciowego $\tilde{\tau}^{ij}$, określonych związkami [9]:

$$\bar{\tau}^{ij} = \lambda^* A g^{ij} + 2\mu \gamma^{ij}, \quad (4.4)$$

$$\hat{\tau}^{ij} = \lambda^* B g^{ij} + 2\mu \rho^{ij}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\tau}^{ij} = \lambda^* C g^{ij} + 2\mu \vartheta^{ij}, \quad (4.6)$$

oraz przyjmiemy do opisu tensorów kontrawariantnych G^{ij} wersję uśrednioną (2.58) to można wyrażeniu (4.1) nadać postać:

$$\tau^{ij} = \frac{I}{Z^2} \left[\bar{\tau}^{ij} - 2u^3 \hat{\tau}^{ij} + (u^3)^2 \tilde{\tau}^{ij} \right]. \quad (4.7)$$

Skalary A , B , C są sumami:

$$A = g^{ij} \gamma_{ij}, \quad (4.8)$$

$$B = g^{ij} \rho_{ij}, \quad (4.9)$$

$$C = g^{ij} \vartheta_{ij}, \quad (4.10)$$

a u^3 , jak wspomniano w drugim rozdziale, odległością danej warstwy od powierzchni środkowej powłoki.

Jak wspomniano wcześniej dla cienkiej powłoki składniki wyrażen zawierających kwadraty odległości u^3 są pomijalne. Posługiwać się będziemy uproszczonym związkiem:

$$\tau^{ij} = \frac{1}{Z^2} \left(\bar{\tau}^{ij} - 2u^3 \hat{\tau}^{ij} \right). \quad (4.11)$$

4.2 Siły wewnętrzne

W powłoce wszystkie wielkości odnosimy do powierzchni środkowej. Całkując naprężenia po grubości powłoki, czego szczegółowy wywód można znaleźć w pracach [7, 8, 9], otrzymujemy kontrawariantne tensory uogólnionych sił wewnętrznych. Tensor N^{ij} zwany siłami przekrojowymi działającymi w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej powłoki otrzymujemy z całki:

$$N^{ij} = \int_{-h}^h \sqrt{\frac{G}{g}} \left(\delta_k^j - u^3 b_k^j \right) \tau^{ik} du^3. \quad (4.12)$$

Tensor momentów przekrojowych M^{ij} , zginających i skręcających, wyraża się następująco:

$$M^{ij} = \int_{-h}^h \sqrt{\frac{G}{g}} \left(\delta_k^j - u^3 b_k^j \right) \tau^{ik} u^3 du^3. \quad (4.13)$$

Wektor (tensor o walencji 1) sił poprzecznych (tnących) działających prostopadle do powierzchni środkowej otrzymujemy po scałkowaniu:

$$Q^j = \int_{-h}^h \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{i3} du^3. \quad (4.14)$$

Podstawiając do (4.12) i (4.13) τ^{ij} z (4.11), G z (2.55) oraz Z z (2.59) otrzymujemy po scałkowaniu [7, 8, 9]:

$$N^{ij} = \bar{N}^{ij} + \left(2H \delta_k^j - b_k^j \right) \hat{M}^{ik}, \quad (4.15)$$

$$M^{ij} = \hat{M}^{ij} + \frac{h^2}{3} \left(2H \delta_k^j - b_k^j \right) \bar{N}^{ik}, \quad (4.16)$$

gdzie tensory \bar{N}^{ij} i \hat{M}^{ij} są związane z naprężeniami błonowymi $\bar{\tau}^{ij}$ oraz błonowo-zgięciowymi w następujący sposób:

$$\bar{N}^{ij} = 2 h \bar{\tau}^{ij}, \quad (4.17)$$

$$\hat{M}^{ij} = -\frac{4}{3} h^3 \hat{\tau}^{ij}. \quad (4.18)$$

Wykorzystując związki (4.4) i (4.5) można powiązać składowe uogólnionych sił przekrojowych ze składowymi tensorów odkształcenia:

$$\bar{N}^{ij} = \frac{2 E h}{1 - \nu^2} [(1 - \nu) \gamma^{ij} + \nu A g^{ij}], \quad (4.19)$$

$$\hat{M}^{ij} = -\frac{4 E h^3}{3(1 - \nu^2)} [(1 - \nu) \rho^{ij} + \nu B g^{ij}], \quad (4.20)$$

gdzie:

E - moduł sprężystości Younga,

ν - współczynnik odkształcalności poprzecznej Poissona,

lub w postaci odwrotnej:

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2 E h} [(1 - \nu) \bar{N}^{ij} - \nu \bar{N} g^{ij}], \quad (4.21)$$

$$\rho^{ij} = \frac{-3}{4 E h^3} [(1 - \nu) \hat{M}^{ij} - \nu \hat{M} g^{ij}], \quad (4.22)$$

gdzie niezmienniki \bar{N} i \hat{M} są sumami:

$$\bar{N} = g_{ij} \bar{N}^{ij}, \quad (4.23)$$

$$\hat{M} = g_{ij} \hat{M}^{ij}. \quad (4.24)$$

4.3. Związki fizyczne dla powłok obrotowych

Dla powłoki obrotowej zależności (4.17) i (4.18) wyrażają się, po rozpisaniu, następująco:

$$N^{11} = \bar{N}^{11} + \varepsilon \hat{M}^{11}, \quad (4.25)$$

$$N^{21} = \bar{N}^{12} + \varepsilon \hat{M}^{12}, \quad (4.26)$$

$$N^{12} = \bar{N}^{12} + \bar{\varepsilon} \hat{M}^{12}, \quad (4.27)$$

$$N^{22} = \bar{N}^{22} + \bar{\varepsilon} \hat{M}^{22}, \quad (4.28)$$

$$M^{21} = \hat{M}^{12} + \frac{h^2}{3} \varepsilon \bar{N}^{12}, \quad (4.30)$$

$$M^{12} = \hat{M}^{12} + \frac{h^2}{3} \varepsilon \bar{N}^{12}, \quad (4.31)$$

$$M^{22} = \hat{M}^{22} + \frac{h^2}{3} \varepsilon \bar{N}^{22}. \quad (4.32)$$

Wielkości (4.19) i (4.20) rozpisane dla powłoki obrotowej, po obniżeniu wskaźników tensorów odkształceń, wyglądają następująco:

$$\bar{N}^{11} = \frac{2 E h}{1 - \nu^2} \left[\frac{\gamma_{11}}{(g_{11})^2} + \nu \frac{\gamma_{22}}{g} \right], \quad (4.33)$$

$$\bar{N}^{22} = \frac{2 E h}{1 - \nu^2} \left[\frac{\gamma_{22}}{(g_{22})^2} + \nu \frac{\gamma_{11}}{g} \right], \quad (4.34)$$

$$\bar{N}^{12} = \frac{2 E h}{1 + \nu} \frac{\gamma_{12}}{g}, \quad (4.14)$$

$$\hat{M}^{11} = \frac{-4 E h^3}{3(1 - \nu^2)} \left[\frac{\rho_{11}}{(g_{11})^2} + \nu \frac{\rho_{22}}{g} \right], \quad (4.35)$$

$$\hat{M}^{22} = \frac{-4 E h^3}{3(1 - \nu^2)} \left[\frac{\rho_{22}}{(g_{22})^2} + \nu \frac{\rho_{11}}{g} \right], \quad (4.36)$$

$$\hat{M}^{12} = \frac{-4 E h^3}{3(1 + \nu)} \frac{\rho_{12}}{g}. \quad (4.37)$$

lub w formie odwrotnej (4.21) i (4.22):

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2 E h} \left[\bar{N}^{11} (g_{11})^2 - \nu \bar{N}^{22} g \right], \quad (4.38)$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{2 E h} \left[\bar{N}^{22} (g_{22})^2 - \nu \bar{N}^{11} g \right], \quad (4.39)$$

$$\gamma_{12} = \frac{(1 + \nu)}{2 E h} \bar{N}^{12} g, \quad (4.40)$$

$$\rho_{11} = \frac{-3}{4 E h^3} \left[\hat{M}^{11} (g_{11})^2 - \nu \hat{M}^{22} g \right], \quad (4.41)$$

$$\rho_{22} = \frac{-3}{4 E h^3} \left[\hat{M}^{22} (g_{22})^2 - \nu \hat{M}^{11} g \right], \quad (4.42)$$

$$\rho_{12} = \frac{-3(1 + \nu)}{4 E h^3} \hat{M}^{12} g. \quad (4.43)$$

5. Równania równowagi

5.1. Równania równowagi powłoki dowolnej

Równania równowagi są to warunki, jakie powinny spełniać tensory sił wewnętrznych N^{ij} , M^{ij} , Q^i opisujące pewien stan naprężenia w powłoce.

Jeśli na płat powłoki określony przez płat powierzchni środkowej działa siła wypadkowa od przyjętego obciążenia zewnętrznego \vec{P} rozłożonego na jednostkę tej powierzchni:

$$\vec{P} = P^i \vec{r}_i + P^3 \vec{m}, \quad (5.1)$$

to będzie on w równowadze jeśli sumy wypadkowych sił i momentów będą w równowadze. Rozważania te prowadzą, patrz [7, 8, 9] do następującego układu równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{cases} N^{ij}|_i - Q^i b_i^j + P^j = 0, \\ N^{ij} b_j^i + Q^j|_j + P^3 = 0, \\ M^{ij}|_i + Q^j = 0, \\ \varepsilon_{ij} (N^{ij} - M^{ik} b_k^j) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Ostatnie równanie układu (5.2) jest spełnione tożsamościowo. Może ono posłużyć do oceny dokładności obliczenia całek z równań (4.12) i (4.13). Występujący w tym równaniu obiekt ε_{ij} jest równy:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{g} e_{ij}, \quad (5.3)$$

gdzie antysymetryczny obiekt e_{ij} przyjmuje wartości:

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

5.2. Równania równowagi powłoki obrotowo-symetrycznej

Rozpisane równania równowagi (5.2) dla powłoki obrotowo-symetrycznej przyjmą po uporządkowaniu postać:

$$\begin{cases}
 (g_{11} \sqrt{g_{22}} N^{11})_{,1} + g_{11} \sqrt{g_{22}} N^{21}_{,2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{2} g_{22,1} N^{22} + \\
 -\sqrt{g_{22}} b_{11} Q^1 + g_{11} \sqrt{g_{22}} P^1 = 0, \\
 (\sqrt{g} N^{12})_{,1} + \sqrt{g} N^{22}_{,2} + \sqrt{g} \frac{g_{22,1}}{2 g_{22}} (N^{12} + N^{21}) + \\
 -\sqrt{g} b_2^2 Q^2 + \sqrt{g} P^2 = 0, \\
 b_{11} N^{11} + b_{22} N^{22} + \sqrt{g} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} Q^1 \right)_{,1} + Q^2_{,2} + P^3 = 0, \\
 (g_{11} \sqrt{g_{22}} M^{11})_{,1} + g_{11} \sqrt{g_{22}} M^{21}_{,2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{2} g_{22,1} M^{22} + \\
 -g_{11} \sqrt{g_{22}} Q^1 = 0, \\
 (\sqrt{g} M^{12})_{,1} + \sqrt{g} M^{22}_{,2} + \sqrt{g} \frac{g_{22,1}}{2 g_{22}} (M^{12} + M^{21}) + \\
 -\sqrt{g} Q^2 = 0.
 \end{cases} \tag{5.5}$$

5.3. Siły fizyczne

Podobnie jak dla przemieszczeń (porównaj rozdział 3.3.) również siły wewnętrzne i obciążenia fizyczne otrzymujemy przez przemnożenie odpowiednich wielkości tensorowych przez pewne wielkości geometryczne według formuł:

$$N_{ij}^- = \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ii}}} N^{ij}, \tag{5.6}$$

$$M_{i1}^- = -\sqrt{\frac{g_{ij} g^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, \tag{5.7}$$

$$M_{i2}^{-} = \sqrt{\frac{g_{i2} g^{22}}{g_{ii}}} M^{i1}, \quad (5.8)$$

$$Q_i^{-} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} Q^i, \quad (5.9)$$

$$P_i^{-} = \sqrt{g_{ii}} P^i, \quad (5.10)$$

$$P_3^{-} = P^3. \quad (5.11)$$

Uwaga ! Po “i” nie sumować. Symbol “ \rightarrow ” oznacza współrzędną fizyczną.

6. Rozdzielenie zmiennych

6.1. Obciążenia powłoki obrotowo-symetrycznej

Z uwagi na obrotową symetrię można każde obciążenie powłoki, będące funkcją dwóch zmiennych niezależnych u^1 i u^2 przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego [16, 17, 31, 36, 40] względem u^2 o następującej postaci:

$$\begin{cases} P^1(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{P}^1(u^1) \cos(\theta u^2), \\ P^2(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{P}^2(u^1) \sin(\theta u^2), \\ P^3(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{P}^3(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.1)$$

Występujące tu funkcje oznaczone tu nadkreśleniem "˜" są dla każdego θ funkcją tylko zmiennej u^1 .

6.2. Rozdzielenie zmiennych dla wielkości wewnętrznych

Analizując kształt równań równowagi, związków fizycznych i geometrycznych (liniowych) można dojść do wniosku, że również pozostałe wielkości można przedstawić w podobnej postaci. I tak kolejno otrzymujemy:

- siły przekrojowe:

$$\begin{cases} N^{11}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{N}^{11}(u^1) \cos(\theta u^2), \\ N^{12}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{N}^{12}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ N^{21}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{N}^{21}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ N^{22}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{N}^{22}(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases}$$

- momenty zginające i skręcające:

$$\begin{cases} M^{11}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{M}^{11}(u^1) \cos(\theta u^2), \\ M^{12}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{M}^{12}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ M^{21}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{M}^{21}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ M^{22}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{M}^{22}(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.3)$$

- siły poprzeczne:

$$\begin{cases} Q^1(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{Q}^1(u^1) \cos(\theta u^2), \\ Q^2(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{Q}^2(u^1) \sin(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.4)$$

- składowe tensora odkształcenia błonowego:

$$\begin{cases} \gamma_{11}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\gamma}_{11}(u^1) \cos(\theta u^2), \\ \gamma_{12}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\gamma}_{12}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ \gamma_{22}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\gamma}_{22}(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.5)$$

- składowe tensora odkształcenia błonowo-zgięciowego:

$$\begin{cases} \rho_{11}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\rho}_{11}(u^1) \cos(\theta u^2), \\ \rho_{12}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\rho}_{12}(u^1) \sin(\theta u^2), \\ \rho_{22}(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \bar{\rho}_{22}(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.6)$$

- składowe wektora przemieszczeń:

$$\begin{cases} w^1(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{w}^1(u^1) \cos(\theta u^2), \\ w^2(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{w}^2(u^1) \sin(\theta u^2), \\ w^3(u^1, u^2) = \sum_{\theta=0}^n \tilde{w}^3(u^1) \cos(\theta u^2). \end{cases} \quad (6.7)$$

W tej samej postaci wyrażają się też pozostałe wielkości tensorowe i fizyczne.

W rozwinięciu wektora obciążenia w szeregi trygonometryczne (6.1) szczególne znaczenie mają pierwsze dwa wyrazy każdego z tych szeregów. Pierwszy dla $\theta=0$ odpowiada obciążeniu osiowo-symetrycznemu powłoki, drugi natomiast obciążeniu antysymetrycznemu, $\theta = l$. Obie te składowe obciążenia charakteryzują się tym, że nie są, w przeciwieństwie do wyższych składowych periodycznych szeregów, samozrównoważone i wobec tego wywołują w powłoce największe siły i przemieszczenia. Przedstawione w pracy rozwiązanie powłoki wychylonej od pionu składa się, jak pokazano w dalszej części pracy, wyłącznie z części osiowo-symetrycznej i antysymetrycznej. Wobec tego dla skupienia uwagi odpowiednie wielkości oznaczono symbolami "sym" dla osiowej symetrii oraz "ant" dla antysymetrii poniżej znaku odpowiedniej wielkości. Przykładowo: $P_{sym}^i, P_{ant}^i, \bar{N}_{sym}^{ij}, w^i, \dots$ itd.

Przyjęta postać wielkości pozwala na przedstawienie występujących w rozwiązaniu równań różniczkowych cząstkowych przez n równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie takiego zadania jest łatwiejsze.

Należy dodać, że przedstawione zagadnienie, prowadzące do znacznych uproszczeń, występuje tylko dla liniowej fizycznie i geometrycznie teorii powłok.

7. Rozwiązanie analityczne powłok

7.1. Równanie różniczkowe rozwiązujące powłoki

Podstawiając do pierwszych dwóch równań układu (5.2) N^{ij} obliczone z (4.15) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\bar{N}^{ij}|_i + \bar{P}^i &= 0, \\ \bar{N}^{ij} b_{ij} + \bar{P}^3 &= 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

gdzie funkcje :

$$\begin{aligned}\bar{P}^j &= 2(H \hat{M}^{ij})|_i - (b_k^j \hat{M}^{ik})|_i - Q^j b_i^j + P^j, \\ \bar{P}^3 &= 2H \hat{M}^{ij} b_{ij} - b_k^j \hat{M}^{ik} b_{ij} + Q^j|_j + P^3.\end{aligned}\tag{7.2}$$

nazywamy obciążeniami wymuszającymi stan błonowy.

W prezentowanym rozwiązaniu wprowadzamy uproszczenie zakładając, że tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego (3.14) powierzchni środkowej jest równy [9]:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} w^3|_{ij}.\tag{7.3}$$

Wynika stąd, że tensor (4.20) można wyrazić jako funkcję składowej przemieszczenia w^3 :

$$\hat{M}^{ij} = -\frac{2 E h^3}{3(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) g^{il} g^{kj} w^3|_{kl} + \nu g^{ij} W \right],\tag{7.4}$$

gdzie skalar:

$$W = 2 B = g^{ij} w^3|_{ij}.\tag{7.5}$$

Składowe wektora sił poprzecznych otrzymujemy po podstawieniu do trzeciego równania (5.2) związków (4.16).

$$Q^j = \hat{M}^{ij}|_i + \frac{2h^2}{3} (H \bar{N}^{ij})|_i - \frac{h^2}{3} (b_k^j \bar{N}^{ik})|_i,\tag{7.6}$$

Po podstawieniu (7.4) oraz (7.6) do (7.2) otrzymujemy następujące uproszczone związki na obciążenie wymuszające stan błonowy:

$$\begin{aligned}\bar{P}^j &= -\frac{2 E h}{\omega^4} K b^{ij} W|_i + P^j, \\ \bar{P}^3 &= -\frac{2 E h}{\omega^4} g^{ij} W|_{ij} + P^3.\end{aligned}\tag{7.7}$$

pierwsze składniki tych wyrażeń nazwiemy obciążeniem wymuszającym stan zgięciowy:

$$\begin{aligned} \hat{P}^1 &= -\frac{2 E h}{\omega^4} K \bar{b}^{ij} W|_{,i}, \\ \hat{P}^3 &= -\frac{2 E h}{\omega^4} g^{ij} W|_{,ij}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Występujący w nich skalar wynosi:

$$\omega^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{h^2}. \tag{7.9}$$

Układ równań (7.1) można sprowadzić [9] do równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu niejednorodnego zawierającego jedynie funkcję \bar{N}^{22} :

$$g^{ij} g^{kl} g^{mn} g^{rs} N^{22}|_{rsmnklij} + \omega^4 K^2 \bar{b}^{ij} \bar{b}^{kl} N^{22}|_{klj} = -R, \tag{7.10}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R &= g^{ij} g^{kl} g^{mn} R^l|_{mnklij} + \omega^4 K \bar{b}^{ij} \left[R^2 + \frac{1}{g} P^3|_{,i} \right]|_{,j} \\ &+ \frac{1+\nu}{g} g^{ij} g^{kl} P^r|_{rklj11}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

oraz:

$$R^1 = g^{2r} P^2|_r - \frac{g_{1r}}{g} P^r|_1, \tag{7.12}$$

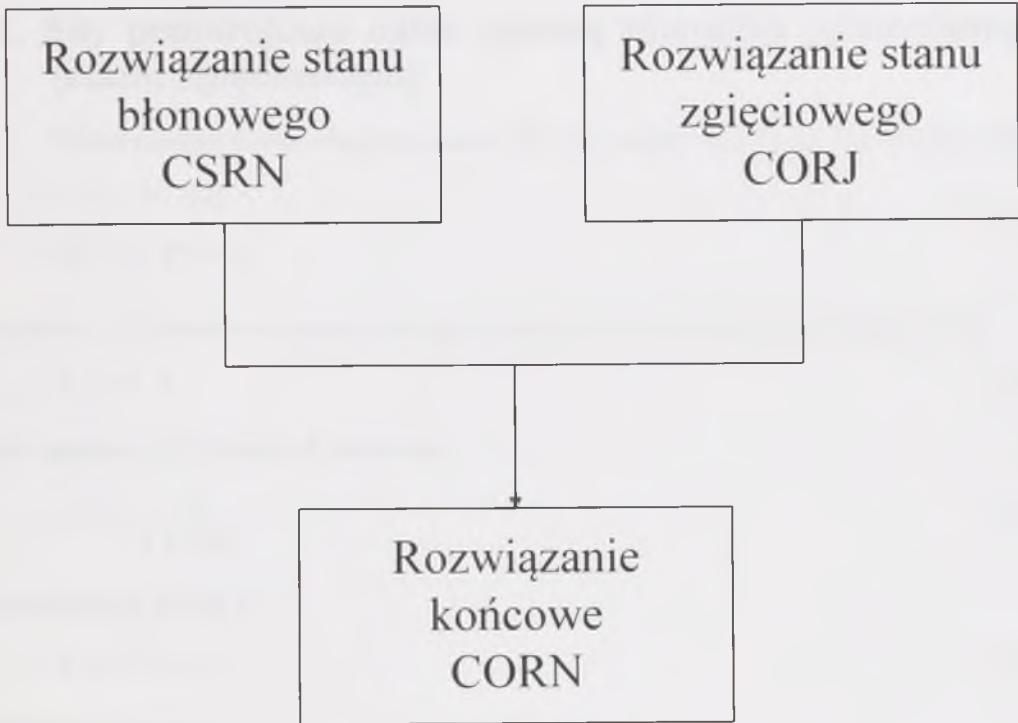
$$R^2 = K \bar{b}^{2r} P^2|_r - \frac{b_{1r}}{g} P^r|_1. \tag{7.13}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (7.10) można przedstawić w postaci sumy całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania niejednorodnego:

$$\bar{N}^{22} = \bar{N}_0^{22} + \bar{N}_1^{22}. \tag{7.14}$$

Całka ogólna \bar{N}_o^{22} realizuje tak zwany stan zgięciowy, całka szczególna \bar{N}_i^{22} umowny stan błonowy. Pełne rozwiązanie otrzymujemy sumując oba stany co przedstawia poniższy schemat:

Rozwiązanie analityczne powłoki



Rysunek 7.1.

7.2. Rozwiązanie całki ogólnej równania jednorodnego

Równanie różniczkowe jednorodne ósmego rzędu rozwiązujące stan zgięciowy ma postać:

$$g^{ij} g^{kl} g^{mn} g^{rs} N_o^{22} \Big|_{rsmnklij} + \omega^4 K^2 \bar{b}^{ij} \bar{b}^{kl} N_o^{22} \Big|_{klij} = 0. \quad (7.15)$$

Rozwiązaniem tego równania jest szereg hipertrygonometryczny postaci:

$$S = \sum_{mn} (C_{1kl} \sin \omega z_j u^j + C_{2kl} \cos \omega z_j u^j), \quad (7.16)$$

gdzie argument zespolony można zapisać w postaci:

$$z_j = n_j + i \varepsilon_k m_j, \quad (7.17)$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} +1 & \text{dla } k = 1, \\ -1 & \text{dla } k = 2. \end{cases} \quad (7.18)$$

Szereg (7.16) jest sumowany dwójako: nieskończony ze względu na n_i , czego wyrazem jest suma \sum_{mn} oraz tensorowy ze względu na wskaźniki k i l .

7.3. Siły przekrojowe całki ogólnej równania jednorodnego (stanu zgięciowego)

Układ równań równowagi tego stanu [9] ma zgodnie z (7.1), (7.7) i (7.14) postać:

$$\begin{aligned} \bar{N}_o^{ij} |_{,i} + \hat{P}^j &= 0, \\ \bar{N}_o^{ij} b_{ij} + \hat{P}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Zakładamy, że przemieszczenia stanu zgięciowego wyrażają się przez szereg (7.16):

$$\hat{w}^j = F S, \quad (7.20)$$

gdzie zgodnie z [9] funkcja F ma postać:

$$F = -\frac{l}{2 E h \omega^2}. \quad (7.21)$$

Wprowadzając skalar Z :

$$Z = g^{kl} z_k z_l, \quad (7.22)$$

definiujemy tensory:

$$d_{kl} = \frac{z_k z_l}{Z}, \quad (7.23)$$

$$\bar{d}^{ij} = g^{ij} - g^{ik} g^{lj} d_{kl}. \quad (7.24)$$

Zgodnie z rozważaniami pracy [9] otrzymujemy następujące wyrażenia na zespolone funkcje opisujące siły wewnętrzne stanu zgięciowego:

$$\bar{N}_o^{ij} = \frac{l}{\omega^2} \bar{d}^{ij} S, \quad (7.25)$$

$$\hat{Q}^j = -\frac{l}{\omega^3} g^{ij} z_i S, \quad (7.26)$$

$$\hat{M}^j = -i \varepsilon_k \frac{l}{\omega^4} [g^{ij} - (1-\nu) \bar{d}^{ij}] S. \quad (7.27)$$

Wybierając z powyższych wyrażeń części rzeczywiste otrzymujemy końcowe rozwiązanie tego stanu. Bliżej określimy te siły w rozdziale 9.

7.4. Siły wewnętrzne całki szczególnej równania niejednorodnego (umownego stanu błonowego)

Siły wewnętrzne umownego stanu błonowego określamy z układu równań:

$$\begin{aligned}\bar{N}_i^{ij} \Big|_i + P^j &= 0, \\ \bar{N}_i^{ij} b_{ij} + P^3 &= 0.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Porównując ten układ z (7.1) zauważamy, że siły wymuszające stan błonowy zastąpiliśmy tu obciążeniem powłoki.

W pracy [9] na podstawie pewnych rozważań przybliżonych w ogólnym przypadku, a ścisłych dla powłoki sferycznej udało się sprowadzić drugie równanie układu (5.2):

$$b_{ij} N^{ij} + Q^j \Big|_j + P^3 = 0,\tag{7.29}$$

do postaci:

$$b_{ij} \left(\bar{N}^{ij} + \varepsilon \hat{M}^{ij} \right) + (1 - \eta) P^3 = 0.\tag{7.30}$$

Występujący tu parametr η wynosi:

$$\eta = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2},\tag{7.31}$$

gdzie:

$$\zeta = \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{n}}.\tag{7.32}$$

Analizując wielkość tego parametru dla powłoki sferycznej o promieniu a i grubości h , oraz danym dla wybranego materiału współczynnikiem Poissona ν , otrzymujemy następujące wartości (patrz tabela poniżej) dla wybranych wartości parametru n .

Wartości współczynnika η w zależności od parametru n i rodzaju powłoki-przykład

Warianty powłok	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Powłoka betonowa $a=5\text{m}, 2h=25\text{cm}, \nu=1/6$	0.00021	0.01443	0.05646
Powłoka stalowa $a=1\text{m}, 2h=2\text{cm}, \nu=0.3$	0.00003	0.00602	0.03214

Okazuje się, że dla powłoki sferycznej, która jest szczególnym przypadkiem rozważanych tu powłok obrotowych, wartość tego parametru nie przekracza kilku procent. Zatem w rozważaniach inżynierskich wpływ ten może być pominięty z korzyścią dla bezpieczeństwa.

Rozwiązanie całki szczególnej nazwalimy umownym stanem błonowym. Stanowi temu towarzyszą bowiem momenty, które obliczamy ze wzoru:

$$\bar{M}^{ij} = (2H\delta_k^j - b_k^j) \bar{N}^{ik}, \quad (7.33)$$

który wynika z (4.16).

7.5. Przemieszczenia powłok

Podobnie jak to czyniliśmy dla sił również przemieszczenia powłoki rozdzielamy na dwa stany:

$$w^i = \bar{w}^i + \hat{w}^i, \quad (7.34)$$

$$w^3 = \bar{w}^3 + \hat{w}^3. \quad (7.35)$$

Mając dane siły przekrojowe stanu błonowego obliczamy składowe tensora odkształcenia błonowego:

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2Eh} \left[(1+\nu)\bar{N}_s^{ij} - \nu \bar{N}_s^{kl} g_{kl} g^{ij} \right]. \quad (7.36)$$

Z układu równań związków geometrycznych:

$$\bar{w}^k \Big|_j g_{ik} + \bar{w}^k \Big|_i g_{kj} - 2b_{ij} \bar{w}^3 = 2\gamma_{ij}, \quad (7.37)$$

wyznaczamy przemieszczenia stanu błonowego.

Zgodnie z wyprowadzonymi w [9] zależnościami przemieszczenia stanu zgięciowego obliczamy ze wzorów:

$$\hat{w}^j = -\frac{l}{2 E h \varepsilon \omega^2} S, \quad (7.38)$$

$$\hat{w}^k = -\frac{l}{2 E h \varepsilon \omega^2} \left[\frac{2 H}{\varepsilon} - (1 - \nu) \right] g^{kl} z_l S, \quad (7.39)$$

określających funkcje zespolone. Wybierając z powyższych zależności części rzeczywiste, o czym bliżej powiemy w rozdziale 9, otrzymujemy rozwiązanie dla przemieszczeń stanu zgięciowego.

7.6. Metodyka rozwiązania analitycznego powłok

Metodykę rozwiązania analitycznego powłok przedstawia schemat na rysunku 7.2., który krótko tu omówimy.

1. W pierwszej kolejności wyznaczamy z układu równań (7.28) składowe tensora \bar{N}_s^{ij} , a z równania (7.33) momenty stanu błonowego.
2. Następnie wyznaczamy składowe tensora odkształcenia błonowego (7.36) oraz z układu (7.37) składowe wektora przemieszczenia.
3. W trakcie działań staramy się spełnić przynajmniej część warunków brzegowych zadania.
4. Warunki brzegowe, których nie jesteśmy w stanie spełnić w ramach całki szczególnej zadania wypełniamy na etapie całki ogólnej.
5. Otrzymane wielkości pochodzące z rozwiązania całki ogólnej i szczególnej sumujemy otrzymując siły wewnętrzne:

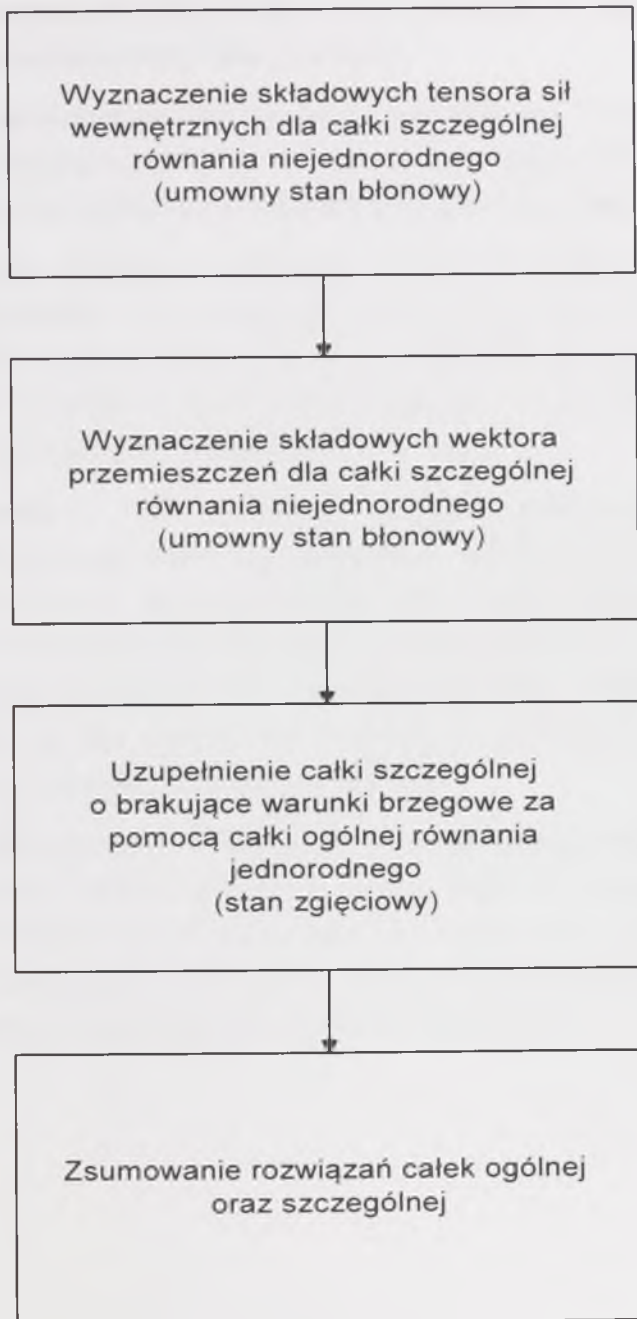
$$N^{ij} = \bar{N}_s^{ij} + \bar{N}_o^{ij} + (2H \delta_k^j - b_k^j) \hat{M}^{ij}, \quad (7.40)$$

$$M^{ij} = \hat{M}^{ij} + \frac{h^2}{3} (2H \delta_k^j - b_k^j) (\bar{N}_s^{ij} + \bar{N}_o^{ij}), \quad (7.41)$$

$$Q^j = M^{ij} |_{,i}. \quad (7.42)$$

Przemieszczenia sumujemy według (7.34), (7.35).

Rozwiązanie analityczne powłok



Rysunek 7.2.

7.7. Analiza uproszczeń metody analitycznej

Zaprezentowana powyżej metoda analityczna bazuje na kilku uproszczeniach. Do zasadniczych uproszczeń metody należy zaliczyć.

1. Rozdzielenie rozważań na stan zgięciowy i stan błonowy. Rozdzielenie rozważań na dwa stany jest podejściem przybliżonym. Wynika ono z faktu, że w powłokach cienkich decydujący wpływ na odkształcenia i pole naprężeń mają siły przekrojowe.

Rozważania dotyczące umownego stanu błonowego sprowadzić można w ogólnym przypadku do rozwiązania równań różniczkowych rzędu drugiego. Rozwiązanie tego typu równań na drodze numerycznej nie napotyka na większe trudności, a dla wielu klas powłok można uzyskać je, co pokażemy w dalszej części pracy, w postaci jawnej - całek równania różniczkowego.

Rozwiązaniem całki ogólnej (stanu zgięciowego) są szeregi hipertrygonometryczne charakteryzujące się tym, że zanikają szybko oraz mają charakter oscylujący. Wpływ zatem stanu zgięciowego ma charakter lokalny i ogranicza się do pewnej strefy w okolicach zaburzenia jakim jest brzeg powłoki, punkt przyłożenia siły skupionej, załamanie powłoki lub inny podobnego typu wpływ. Jeżeli zasięg tego wpływu nie rozciąga się na całą powłokę to stosowanie przedstawionej metody opartej na wspomnianym uproszczeniu jest w pełni uzasadnione.

2. Obliczanie sił wewnętrznych umownego stanu błonowego dla obciążenia pełnego - bez pomniejszenia o wpływ nieznanych na tym etapie momentów zginających i sił poprzecznych. Prowadzi to do oszacowania sił wewnętrznych i składowych wektora przemieszczenia tego stanu z niewielkim nadmiarem. Nadmiar ten, co należy podkreślić, jest z punktu widzenia inżynierskiego zjawiskiem korzystnym.

8. Rozwiązanie całki szczególnej powłok obrotowych

8.1. Siły wewnętrzne umownego stanu błonowego

W ramach uproszczonej teorii jaką przyjęliśmy w rozdziale 7 układ równań równowagi na etapie rozwiązania całki szczególnej równania różniczkowego rozwiązującego (tzw. umowny stan błonowy) sprowadza się do układu równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{cases} \bar{N}^i|_i + P^i = 0, \\ \bar{N}^{ij} b_{ij} + P^3 = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

który dla powłok obrotowych po rozpisaniu i uporządkowaniu przyjmuje postać:

$$\begin{cases} (g_{11} \sqrt{g_{22}} \bar{N}^{11})_{,1} + g_{11} \sqrt{g_{22}} \bar{N}^{12}_{,2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{2} g_{22,1} \bar{N}^{22} + g_{11} \sqrt{g_{22}} P^1 = 0, \\ (g_{22} \sqrt{g} \bar{N}^{12})_{,1} + g_{22} \sqrt{g} \bar{N}^{22}_{,2} + g_{22} \sqrt{g} P^2 = 0, \\ b_{11} \bar{N}^{11} + b_{22} \bar{N}^{22} + P^3 = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Jest to zatem układ 3 równań o trzech niewiadomych, z których dwa pierwsze są równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Dla dowolnego stanu obciążenia układ ten, po rozdzieleniu zmiennych (6.1) i (6.2) można sprowadzić do n układów równań. W każdym z tych układów (8.3) dwa pierwsze są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, a trzecie algebraicznym:

$$\begin{cases} \left(g_{11} \sqrt{g_{22}} \tilde{\bar{N}}^{11} \right)_{,1} + \theta g_{11} \sqrt{g_{22}} \tilde{\bar{N}}^{12}_{,2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{2} g_{22,1} \tilde{\bar{N}}^{22} + g_{11} \sqrt{g_{22}} \tilde{P}^1 = 0, \\ \left(\sqrt{g} \tilde{\bar{N}}^{12} \right)_{,1} - \theta \sqrt{g} \tilde{\bar{N}}^{22}_{,2} + 2 \sqrt{g} \frac{g_{22,1}}{2 g_{22}} \tilde{\bar{N}}^{12} + \sqrt{g} \tilde{P}^2 = 0, \\ b_{11} \tilde{\bar{N}}^{11} + b_{22} \tilde{\bar{N}}^{22} + \tilde{P}^3 = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Z trzeciego równania (8.2), po uwzględnieniu (2.24) i (2.25), obliczymy:

$$\bar{N}^{22} = \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} \bar{N}^{11} - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} P^3. \quad (8.4)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do dwóch pierwszych równań (8.2), porównaj [37], otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych z dwoma niewiadomymi \bar{N}^{11} i \bar{N}^{12} :

$$\begin{cases} (\sqrt{g} \bar{N}^{11})_{,1} + \sqrt{g} \bar{N}^{12}_{,2} + \sqrt{g} P^1 + \sqrt{g_{22,1}} \sqrt{g_{22}} P^3 = 0, \\ (g_{22} \sqrt{g} \bar{N}^{12})_{,1} + \sqrt{g_{22,11}} \sqrt{g} g_{22} \bar{N}^{11}_{,2} + g_{22} \sqrt{g} P^2 - g P^3_{,2} = 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

Analogicznie dla układu (8.3) otrzymamy:

$$\begin{cases} (\sqrt{g} \tilde{N}^{11})_{,1} + \theta \sqrt{g} \tilde{N}^{12} + \sqrt{g} \tilde{P}^1 + \sqrt{g_{22,1}} \sqrt{g_{22}} \tilde{P}^3 = 0, \\ (g_{22} \sqrt{g} \tilde{N}^{12})_{,1} - \theta \sqrt{g_{22,11}} \sqrt{g} g_{22} \tilde{N}^{11} + g_{22} \sqrt{g} \tilde{P}^2 + \theta g \tilde{P}^3 = 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

8.2. Siły wewnętrzne przy obciążeniu osiowo-symetrycznym

Rozwiązanie stanu osiowo-symetrycznego jest stosunkowo proste. Wówczas $\theta=0$ i układ równań (8.6) rozdziela się:

$$\begin{cases} (\sqrt{g} \bar{N}_{sym}^{11})_{,1} + \sqrt{g} \bar{P}_{sym}^1 + \sqrt{g_{22,1}} \sqrt{g_{22}} \bar{P}_{sym}^3 = 0, \\ (g_{22} \sqrt{g} \bar{N}_{sym}^{12})_{,1} + g_{22} \sqrt{g} \bar{P}_{sym}^2 = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Wobec tego określenie wielkości sił wewnętrznych może napotkać trudności tylko w zakresie obliczania całek:

$$\bar{N}_{sym}^{11} = \frac{-1}{\sqrt{g}} \int (\sqrt{g} \bar{P}_{sym}^1 + \sqrt{g_{22,1}} \sqrt{g_{22}} \bar{P}_{sym}^3) du^1 + C_1, \quad (8.8)$$

$$\bar{N}_{sym}^{12} = \frac{-I}{g_{22}\sqrt{g}} \int g_{22}\sqrt{g} P^2 du^1 + C_2, \quad (8.9)$$

$$\bar{N}_{sym}^{22} = \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} \bar{N}_{sym}^{11} - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} P^3. \quad (8.10)$$

8.3. Siły wewnętrzne przy obciążeniu nieosiowo-symetrycznym

W tym przypadku rozwiązanie nieco się komplikuje. Jednak $\epsilon > 0$ i z pierwszego równania (8.6) możemy wyznaczyć:

$$\tilde{N}^{12} = -\frac{\frac{I}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \tilde{N}^{11} \right)_{,1} + \tilde{P}^1 + \tilde{P}^3 \frac{\sqrt{g_{22,1}}}{\sqrt{g_{11}}}}{\theta}, \quad (8.11)$$

lub w rozwiniętej postaci:

$$\tilde{N}^{12} = -\frac{\tilde{N}^{11}_{,1} + \tilde{N}^{11} \frac{\sqrt{g_{22,1}} (\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22,11}} + g_{11})}{\sqrt{g_{11}g}} + \tilde{P}^1 + \tilde{P}^3 \frac{\sqrt{g_{22,1}}}{\sqrt{g_{11}}}}{\theta}, \quad (8.12)$$

Podstawiając powyższe do równania drugiego (8.6) otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu drugiego o współczynnikach funkcyjnych

$$\tilde{N}^{11}_{,11} + p(u^1) \tilde{N}^{11}_{,1} + q(u^1) \tilde{N}^{11} = \tilde{P}(u^1), \quad (8.13)$$

Pierwszy współczynnik funkcyjny można zapisać w postaci:

$$p(u^1) = \frac{2\sqrt{g_{22,1}} (\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22,11}} + 2g_{11})}{\sqrt{g}}, \quad (8.14)$$

lub:

$$p(u^1) = \frac{2(g_{22} \sqrt{g_{11}})_{,1}}{g_{22} \sqrt{g_{11}}}, \quad (8.15)$$

Drugi współczynnik funkcyjny ma postać:

$$q(u') = \frac{2g_{11}f_{,1} + f f_{,11}(1 + \theta^2) + 2(3 + \theta^2)f(f_{,1})^2 f_{,11}}{g g_{11}} + \frac{(5 + \theta^2)f(f_{,1})^4 f_{,11} + g_{22}f_{,11}(1 + f_{,1}g_{11})}{g g_{11}}, \quad (8.16)$$

lub:

$$q(u') = \frac{(g_{22}\sqrt{g_{11}})_{,11}}{g_{22}\sqrt{g_{11}}} + \frac{(\theta^2 - 1)\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (8.17)$$

Prawa strona równania jest funkcją obciążenia powłoki:

$$\tilde{P}(u') = \frac{-\tilde{P}^1 f_{,1}(3g_{11} + f f_{,11})}{f g_{11}} - \tilde{P}^1_{,1} + \theta \tilde{P}^2 + \frac{\tilde{P}^3 [3(f_{,1})^2 - \theta^2 g_{11} + f f_{,11}]}{f\sqrt{g_{11}}} - \frac{\tilde{P}^3_{,1} f_{,1}}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (8.18)$$

8.4 Metoda rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego

Zgodnie z Kamke [24] rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego rzędu drugiego:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (8.19)$$

można przedstawić w postaci:

$$y(x) = v(x) \left(C_1 + \int \frac{u(x)r(x)}{w(x)} dx \right) + u(x) \left(C_2 + \int \frac{v(x)r(x)}{w(x)} dx \right). \quad (8.20)$$

gdzie $u(x)$ i $v(x)$ są to dwa niezależne rozwiązania równania różniczkowego jednorodnego:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (8.21)$$

a $w(x)$ jest wronskianem obliczonym dla $u(x)$ i $v(x)$:

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} u & v \\ \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Rozwiązanie powyższego problemu znaleziono w module ODE2.MTH systemu komputerowego *Derive* [16]. Zgodnie z przedstawioną tam metodą rozwiązanie równania (8.19) istnieje w postaci zamkniętej (8.20) o ile jest spełniona następująca zależność:

$$\varpi = \frac{[p(x)]^2}{4} - q(x) + \frac{p'(x)}{2} = \text{const}. \quad (8.23)$$

Wtedy funkcja $u(x)$ zależy od wartości i znaku stałej ϖ oraz od funkcji $p(x)$ oraz zmiennej x :

$$\begin{cases} u(x) = e^{-\frac{\int p(x) dx}{2}} \sin(\sqrt{-\varpi} x) & \text{dla } \varpi < 0, \\ u(x) = e^{-\frac{\int p(x) dx}{2}} & \text{dla } \varpi = 0, \\ u(x) = e^{\sqrt{\varpi} x - \frac{\int p(x) dx}{2}} & \text{dla } \varpi > 0. \end{cases} \quad (8.24)$$

Funkcja $v(x)$ zależy dodatkowo od funkcji $u(x)$:

$$v(x) = u(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[u(x)]^2} dx. \quad (8.25)$$

8.5. Rozwiązanie równania drugiego rzędu sił całki szczególnej dla obciążenia nieosiowo-symetrycznego

Podstawiając do (8.22) funkcje (8.15) i (8.17) otrzymujemy następujące wyrażenie na funkcję testową:

$$\bar{\omega} = \frac{p(u')^2}{4} - q(u') + \frac{p(u')_{,1}}{2} = \frac{(1 - \theta^2)\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (8.26)$$

Zatem rozwiązanie zamknięte zadania w postaci (8.20) istnieje o ile:

$$\frac{(1 - \theta^2)\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} = \text{const.} \quad (8.27)$$

Zachodzi to w następujących czterech przypadkach:

8.5.1. Przypadek 1. Obciążenie antysymetryczne.

$$\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{\omega} = 0.$$

Jest to przypadek obciążenia antysymetrycznego z punktu widzenia inżynierskiego, najbardziej interesujący. Obciążenie antysymetryczne nie jest samorzównoważone i wobec tego wywołuje w powłoce największe siły wewnętrzne i przemieszczenia. Rozwiązanie powłoki wychylonej od pionu o kąt prosty można sprowadzić do tego przypadku.

8.5.2. Przypadek 2. Walec i stożek obrotowy

$$f(u') = a u' + b \rightarrow \bar{\omega} = 0.$$

Rozwiązanie obejmuje jako szczególne przypadki powłokę walcową i stożkową- południk powierzchni środkowej opisany jest funkcją liniową. Jest to trywialny przypadek rozwiązywanego zadania, który można otrzymać także na drodze całkowania równań równowagi (8.6).

Układ ten w tym przypadku sprowadza się do postaci:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{g} \tilde{N}'' \right)_{,1} + \theta \sqrt{g} \tilde{N}'^2 + \sqrt{g} \tilde{P}' + \sqrt{g_{22},1} \sqrt{g_{22}} \tilde{P}^3 = 0, \\ \left(g_{22} \sqrt{g} \tilde{N}'^2 \right)_{,1} + g_{22} \sqrt{g} \tilde{P}^2 + \theta g \tilde{P}^3 = 0, \end{cases} \quad (8.28)$$

Układ równań rozdziela się i wyznaczenie całek nie nastęrcza trudności:

$$\tilde{N}''^2 = \frac{-1}{g_{22} \sqrt{g}} \int \left(g_{22} \sqrt{g} \tilde{P}^2 + \theta g \tilde{P}^3 \right) du' + C_1, \quad (8.29)$$

$$\tilde{N}''^1 = \frac{-1}{\sqrt{g}} \int \left(\theta \sqrt{g} \tilde{N}''^2 + \sqrt{g} \tilde{P}' + \sqrt{g_{22},1} \sqrt{g_{22}} \tilde{P}^3 \right) du' + C_2. \quad (8.30)$$

Prócz tych dwóch przypadków rozwiązanie w postaci zamkniętej zadania istnieje dla dwóch szerokich klas powłok, które omówimy poniżej.

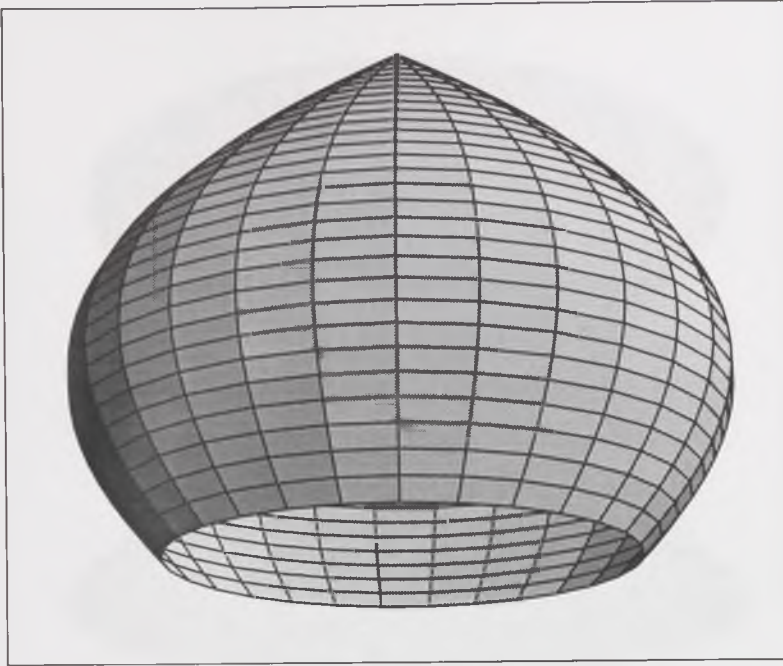
8.5.3. Przypadek 3. Powłoki o dodatniej krzywiznie Gaussa.

$$\theta > 1 \quad \wedge \quad f(u') = a \sin(c(u' + d)) + b \cos(c(u' + d)) \quad \rightarrow \varpi = c^2(\theta^2 - 1) > 0.$$

Funkcja f jest kombinacją liniową funkcji *sinus* i *cosinus*, a , b , c , d są stałymi. Stała ϖ jest dodatnia dla każdego $\theta > 0$. Rozwiązanie zadania istnieje dla wszystkich składowych rozwinięcia funkcji obciążenia w szereg Fouriera. Przykładowa powierzchnia opisana równaniem:

$$f(u') = a \left[\cos\left(\frac{u'}{a}\right) + \sin\left(\frac{u'}{a}\right) \right], \quad (8.31)$$

przedstawiona jest na rysunku 8.1.



Rysunek 8.1. Powierzchnia o dodatniej krzywiznie Gaussa

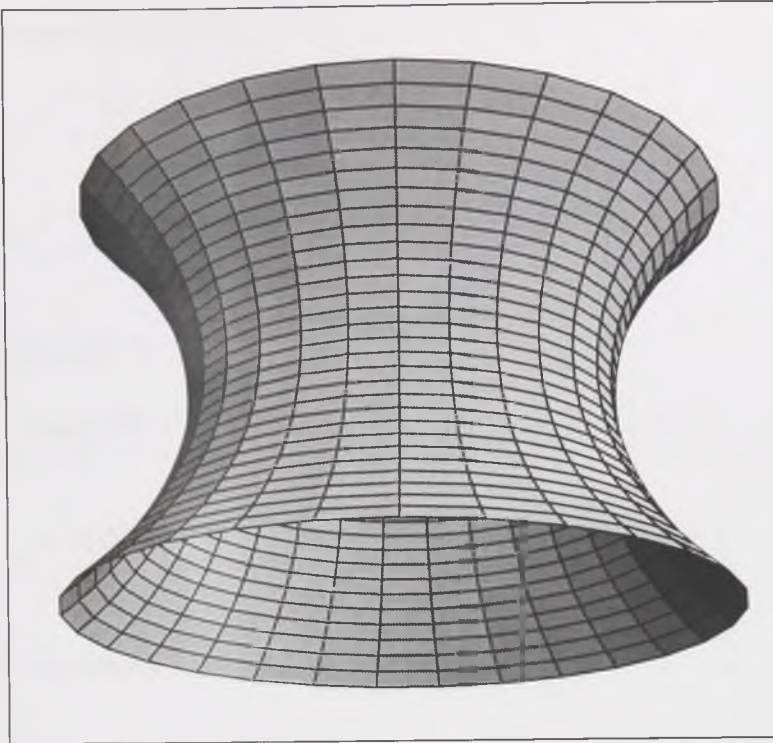
8.5.4. Przypadek 4. Powłoki o ujemnej krzywiznie Gaussa.

$$\theta > 1 \wedge f(u^I) = a e^{c(u^I+d)} + b e^{-c(u^I+d)} \quad \rightarrow \varpi = c^2(1-\theta^2) < 0.$$

Funkcja f jest kombinacją liniową funkcji wykładniczych lub równoważnie *sinusa hiperbolicznego* i *cosinusa hiperbolicznego*, a , b , c , d są stałymi. Stała ϖ jest ujemna dla każdego $\theta > 1$. Rozwiązanie zadania istnieje dla wszystkich składowych rozwinięcia funkcji obciążenia w szereg Fouriera. Przykładowa powierzchnia opisana równaniem:

$$f(u^I) = a \cosh\left(\frac{1}{a}\left(u^I - \frac{l}{2}\right)\right), \quad (8.32)$$

przedstawiona jest na rysunku 8.2.



Rysunek 8.2. Powierzchnia o ujemnej krzywiznie Gaussa- katenoida

8.5.5. Funkcje rozwiązujące równanie drugiego rzędu sił stanu błonowego.

Funkcje rozwiązujące równanie (8.13) zależą od znaku stałej ϖ . Poniżej przedstawiamy formy wzorów dla poszczególnych przypadków.

Jeżeli $\varpi=0$ (przypadek 1 i 2) :

$$\begin{aligned} \tilde{N}'' = & \frac{\left(C_1 + \int u' g_{22} \sqrt{g_{11}} \tilde{P}(u') du' \right)}{g_{22} \sqrt{g_{11}}} + \\ & - \frac{u' \left(C_2 + \int g_{22} \sqrt{g_{11}} \tilde{P}(u') du' \right)}{g_{22} \sqrt{g_{11}}}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Jeżeli $\varpi > 0$ (przypadek 3) :

$$\begin{aligned} \bar{N}'' = & \frac{e^{\sqrt{\varpi} u'} \left(C_1 + \int e^{-\sqrt{\varpi} u'} g_{22} \sqrt{g_{11}} \bar{P}(u') du' \right) +}{2 \sqrt{\varpi} g_{22} \sqrt{g_{11}}} + \\ & - \frac{e^{-\sqrt{\varpi} u'} \left(C_2 + \int e^{\sqrt{\varpi} u'} g_{22} \sqrt{g_{11}} \tilde{P}(u') du' \right)}{2 \sqrt{\varpi} g_{22} \sqrt{g_{11}}}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Jeżeli $\varpi < 0$ (przypadek 4) :

$$\begin{aligned} \bar{N}'' = & \frac{\sin(\sqrt{-\varpi} u') \left(C_1 + \int \cos(\sqrt{-\varpi} u') g_{22} \sqrt{g_{11}} \tilde{P}(u') du' \right) +}{\sqrt{-\varpi} g_{22} \sqrt{g_{11}}} + \\ & - \frac{\cos(\sqrt{-\varpi} u') \left(C_2 + \int \sin(\sqrt{-\varpi} u') g_{22} \sqrt{g_{11}} \bar{P}(u') du' \right)}{\sqrt{-\varpi} g_{22} \sqrt{g_{11}}}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Pozostałe siły wewnętrzne obliczamy ze wzorów (8.4) i (8.11).

8.6. Związki geometryczne umownego stanu błonowego

Znając siły wewnętrzne możemy z odwrotnych związków fizycznych (4.18), (4.19) i (4.20) wyznaczyć odkształcenia. Z kolei dokonując rozdzielania zmiennych otrzymujemy wzór (3.16) w następującej postaci:

$$\begin{cases} \sqrt{g_{11}} \left(\sqrt{g_{11}} \bar{\bar{w}}' \right)_{,1} - b_{11} \bar{\bar{w}}^3 = \bar{\gamma}_{11}, \\ - \theta g_{11} \bar{\bar{w}}' + g_{22} \bar{\bar{w}}^2_{,1} = 2 \bar{\gamma}_{12}, \\ \frac{1}{2} g_{22,1} \bar{\bar{w}}' + \theta g_{22} \bar{\bar{w}}^2 - b_{22} \bar{\bar{w}}^3 = \bar{\gamma}_{22}. \end{cases} \quad (8.36)$$

Jest to układ 3 równań różniczkowych zwyczajnych o trzech niewiadomych. Przemieszczenia wyznaczamy dla każdej składowej rozwinięcia obciążenia w szereg Fouriera.

8.7. Przeszyczenia przy obciążeniu osiowo-symetrycznym

Przy obciążeniu osiowo-symetrycznym, podobnie jak dla sił układ (8.36) upraszcza się:

$$\begin{cases} \gamma_{sym}^{11} = \sqrt{g_{11}} \left(\sqrt{g_{11}} \bar{w}_{sym}^{\prime} \right)_{,1} - b_{11} \bar{w}_{sym}^{\prime 2}, \\ 2 \gamma_{sym}^{12} = 2 \gamma_{sym}^{21} = g_{22} \bar{w}_{sym}^{\prime 2}, \\ \gamma_{sym}^{22} = \frac{1}{2} g_{22,1} \bar{w}_{sym}^{\prime} - b_{22} \bar{w}_{sym}^{\prime 2}. \end{cases} \quad (8.37)$$

Otrzymujemy następujące wzory na obliczenie przeszczeń:

$$\bar{w}_{sym}^{\prime} = \frac{1}{g_{11}} \int \left(\gamma_{sym}^{11} + \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} \gamma_{sym}^{22} \right) du^1 + \tilde{C}_1, \quad (8.38)$$

$$\bar{w}_{sym}^2 = -2 \int \frac{\gamma_{sym}^{12}}{g_{22}} du^1 + \tilde{C}_2, \quad (8.39)$$

$$\bar{w}_{sym}^3 = \frac{\frac{1}{2} \bar{w}_{sym}^{\prime} - \gamma_{sym}^{22}}{b_{22}}. \quad (8.40)$$

8.8. Przeszyczenia przy obciążeniu nieosiowo-symetrycznym

Dla obciążenia nieosiowo-symetrycznego z drugiego równania (8.36) wyznaczamy:

$$\tilde{\tilde{w}}^{\prime} = \frac{g_{22} \tilde{\tilde{w}}^2_{,1} - 2 \tilde{\gamma}_{12}}{\theta g_{11}}. \quad (8.41)$$

Z trzeciego równania z kolei:

$$\bar{w}^2 = \frac{\frac{1}{2} g_{22',1} \bar{w}' + \theta g_{22} \bar{w}^2 - \tilde{\gamma}_{22}}{b_{22}}. \quad (8.42)$$

Podstawiając powyższe do równania pierwszego (8.36) dostajemy równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego o współczynnikach funkcyjnych:

$$\bar{w}^2{}_{,11} + \bar{p}(u') \bar{w}^2{}_{,1} + \bar{q}(u') \bar{w}^2 = \bar{\gamma}(u'), \quad (8.43)$$

Pierwszy współczynnik ma postać:

$$\bar{p}(u') = \frac{2 \sqrt{g_{22',11}}}{\sqrt{g_{22}}}, \quad (8.44)$$

drugi:

$$\bar{q}(u') = \frac{\theta^2 \sqrt{g_{22',11}}}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (8.45)$$

Prawa strona równania (8.43):

$$\bar{\gamma}(u') = \frac{-\theta \left(\tilde{\gamma}_{11} + \tilde{\gamma}_{22} \frac{\sqrt{g_{22',11}}}{\sqrt{g_{22}}} \right) - 2 \tilde{\gamma}_{12',1}}{g_{22}}. \quad (8.46)$$

Okazuje się, że w przypadku przemieszczeń funkcja testowa w (8.23) ma taką samą postać wynikową jak dla sił (8.26).

$$w = \frac{\bar{p}(u')^2}{4} - \bar{q}(u') + \frac{\bar{p}(u')_{,1}}{2} = \frac{(1 - \theta^2) \sqrt{g_{22',11}}}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (8.47)$$

Wobec tego funkcja ta przyjmuje wartości stałe dla tych samych przypadków jakie zostały opisane w podrozdziale 8.4. W zależności od znaku stałej w otrzymujemy:

dla $\varpi=0$:

$$\begin{aligned} \bar{w}^2 = & \frac{\left(\bar{C}_1 + \int u' \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{\sqrt{g_{22}}} + \\ & - \frac{u' \left(\bar{C}_2 + \int \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{\sqrt{g_{22}}}, \end{aligned} \quad (8.48)$$

dla $\varpi>0$:

$$\begin{aligned} \bar{w}^2 = & \frac{e^{\sqrt{\varpi} u'} \left(\bar{C}_1 + \int e^{-\sqrt{\varpi} u'} \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{2 \sqrt{\varpi} \sqrt{g_{22}}} + \\ & - \frac{e^{-\sqrt{\varpi} u'} \left(\bar{C}_2 + \int e^{\sqrt{\varpi} u'} \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{2 \sqrt{\varpi} \sqrt{g_{22}}}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

dla $\varpi<0$:

$$\begin{aligned} \bar{w}^2 = & \frac{\sin(\sqrt{-\varpi} u') \left(\bar{C}_1 + \int \cos(\sqrt{-\varpi} u') \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{\sqrt{-\varpi} \sqrt{g_{22}}} + \\ & - \frac{\cos(\sqrt{-\varpi} u') \left(\bar{C}_2 + \int \sin(\sqrt{-\varpi} u') \sqrt{g_{22}} \tilde{\gamma}(u') du'\right)}{\sqrt{-\varpi} \sqrt{g_{22}}}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Pozostałe przemieszczenia wyznaczamy ze wzorów (8.42) i (8.43).

8.9. Warunki brzegowe umownego stanu błonowego

Występujące we wzorach na siły i przemieszczenia stałe całkowania obliczamy z warunków brzegowych. Stałe C_1 i C_2 otrzymujemy, w szczególności dla rozpatrywanego w dalszej części pracy przypadku powłoki wychylonej, z warunku zerowania się sił na brzegu swobodnym:

$$\bar{N}^{11}(l) = 0, \quad (8.51)$$

$$\bar{N}^{12}(l) = 0. \quad (8.52)$$

Z kolei stałe \bar{C}_1 i \bar{C}_2 otrzymujemy z warunku zerowania się przemieszczeń na brzegu podpartym:

$$\bar{w}_1(l_0) = 0, \quad (8.53)$$

$$\bar{w}_2(l_0) = 0. \quad (8.54)$$

Oczywiście warunki brzegowe mogą być zadane w inny sposób na przykład może być zadana niezerowa wartość danego przemieszczenia lub danej siły albo warunki mieszane.

8.10. Momenty przekrojowe umownego stanu błonowego

Rozwiązanie całki szczególnej nazywamy umownym stanem błonowym, gdyż towarzyszą mu niewielkie momenty (7.33) związane z tensorem odkształcenia błonowego. Wynoszą one po rozpisaniu:

$$\bar{M}^{11} = \frac{h^2}{3} \varepsilon \bar{N}^{11}, \quad (8.55)$$

$$\bar{M}^{21} = \frac{h^2}{3} \varepsilon \bar{N}^{12}, \quad (8.56)$$

$$\bar{M}^{12} = \frac{h^2}{3} \bar{\varepsilon} \bar{N}^{12}, \quad (8.57)$$

$$\bar{M}^{22} = \frac{h^2}{3} \bar{\varepsilon} \bar{N}^{22}. \quad (8.58)$$

Z uwagi na występujący mnożnik: $\frac{h^2}{3} \varepsilon$ lub $\frac{h^2}{3} \bar{\varepsilon}$ otrzymane wielkości są na ogół małe i nie mają istotnego wpływu na wymiarowanie. Dodane jednak do składowych tensora \hat{M}^y mogą, jak okazało się na przedstawionych w dalszej części pracy przykładach, istotnie wpłynąć na wartość sumarycznych składowych tensora momentów oraz z uwagi na różnicę między (8.57) i (8.58) wywołać istotną niesymetryczność tego tensora. Oczywiście momentom stanu błonowego towarzyszą niewielkie siły poprzeczne, których wartości otrzymać możemy z (7.42).

9. Rozwiązanie całki ogólnej powłok obrotowych

9.1. Współczynniki szeregu hipertrygonometrycznego

W ramach rozważań prowadzonych w pracy [9] okazało się, że jest praktyczniej dla obliczeń przedstawić szereg (7.16) w postaci:

$$S = S^1 + i \varepsilon_k S^2, \quad (9.1)$$

gdzie szeregi S^l są szeregami rzeczywistymi:

$$\begin{cases} S^1 = e^{\omega m_j u^j} (C_{1kl} \sin \omega n_j u^j + C_{2kl} \cos \omega n_j u^j), \\ S^2 = e^{\omega m_j u^j} (C_{1kl} \cos \omega n_j u^j - C_{2kl} \sin \omega n_j u^j). \end{cases} \quad (9.2)$$

Dla powłok obrotowych współczynniki n_j , m_j szeregu zgodnie z [9] dla rozpatrywanego brzegu gdzie określona jest współrzędna u^j wynoszą:

$$n_j = m_j \cos \varphi, \quad (9.3)$$

$$m_j = \varepsilon_k \frac{\sqrt{g} n_2}{g_{22} \sin \varphi}. \quad (9.4)$$

Na danym brzegu znamy funkcję przebiegu warunków brzegowych. Wobec tego przyjmujemy:

$$m_2 = 0. \quad (9.5)$$

W ogólności zakładamy, że n_2 dobieramy tak aby szereg (7.16) spełniał warunki brzegowe. W przypadku powłok obrotowych podpartych w sposób ciągły na brzegu otrzymujemy.

$$n_2 = \frac{\theta}{\omega}, \quad (9.6)$$

występujące w (9.3) i (9.4) wielkości obliczamy ze wzorów:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{1 + \alpha^2} - 1), \quad (9.7)$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\sqrt{1 + \alpha^2} - 1}, \quad (9.8)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{\varepsilon g_{22}}{(n_2)^2}. \quad (9.9)$$

Dla $\theta = 0$, czyli stanu obciążenia osiowo-symetrycznego jak łatwo zauważyć otrzymujemy, we wzorze (9.3) symbol nieokreślony. Rozwiązanie otrzymujemy jednak stosując przejście graniczne:

$$m_l = n_l = \frac{\varepsilon_k \sqrt{\varepsilon g}}{\sqrt{2} g_{22}} = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}. \quad (9.10)$$

Szereg (9.1) jest szeregiem zespolonym. Jako rozwiązanie zadania wybieramy jedynie część rzeczywistą rozwiązania.

9.2. Zestawienie wzorów rozwiązania całki ogólnej

Odpowiednie wzory [9] na rzeczywistą część rozwiązania całki ogólnej (stanu zgięciowego) mają, dla powłok obrotowych, postać:

$$N^{11} = C_{kl}^1 S^{kl}, \quad (9.11)$$

$$N^{12} = -\frac{m_1}{n_2} (C_{kl}^1 \cos \varphi - \bar{C}_{kl}^2) S^{kl}, \quad (9.12)$$

$$N^{22} = -\frac{g_{11}}{g_{22}} N^{11} - \frac{g_{11} \varepsilon}{(n_2)^2} \bar{C}_{kl}^2 S^{kl}, \quad (9.13)$$

$$Q^1 = \frac{\alpha}{\omega} m_1 (\bar{C}_{kl}^2 \cos \varphi + C_{kl}^1) S^{kl}, \quad (9.14)$$

$$Q^2 = \frac{\alpha n_2}{\omega g_{22}} C_{kl}^2 S^{kl}, \quad (9.15)$$

$$M^{11} = -\frac{1}{\omega^2} [C_{kl}^2 (1-\nu) - \bar{C}_{kl}^1 \alpha] S^{kl}, \quad (9.16)$$

$$M^{12} = -\frac{1-\nu}{\omega^2} \frac{m_1}{n_2} (C_{kl}^2 \cos \varphi - \bar{C}_{kl}^1) S^{kl}, \quad (9.17)$$

$$M^{22} = -\frac{g_{11}}{g_{22}} M^{11} - \frac{(1+\nu)\alpha}{\omega^2 g_{22}} \bar{C}_{kl}^1 S^{kl}, \quad (9.18)$$

$$w^3 = \frac{\alpha}{2 E h \varepsilon} \bar{C}_{kl}^2 S^{kl}, \quad (9.19)$$

$$w^j = \frac{l}{2 E h \varepsilon} \left[\frac{2 H}{\varepsilon} - (1-\nu) \right] Q^j. \quad (9.20)$$

Występujące tu funkcje mają postać:

$$S^{kl} = \begin{cases} S^{11} = e^{\omega m_1 u^1} \sin \omega n_1 u^1 \sin \omega n_2 u^2, \\ S^{12} = e^{\omega m_1 u^1} \sin \omega n_1 u^1 \cos \omega n_2 u^2, \\ S^{21} = e^{\omega m_1 u^1} \cos \omega n_1 u^1 \sin \omega n_2 u^2, \\ S^{22} = e^{\omega m_1 u^1} \cos \omega n_1 u^1 \cos \omega n_2 u^2. \end{cases} \quad (9.21)$$

9.3. Warunki brzegowe całki ogólnej

Rozwiązując powłokę staramy się spełnić warunki brzegowe, o ile można, na etapie rozwiązania całki szczególnej. Dopiero pozostałe brakujące, spełniamy na etapie rozwiązania całki ogólnej (stanem zgięciowym).

Równanie różniczkowe (7.15) jest ósmego rzędu. Na brzegu swobodnym gdzie dane są warunki brzegowe w siłach, mamy do zdjęcia pięć wielkości: $\overset{\circ}{N}_{11}$, $\overset{\circ}{N}_{12}$, $\overset{\circ}{M}_{11}$, $\overset{\circ}{M}_{12}$, $\overset{\circ}{Q}_1$.

Do dyspozycji mamy, na tym brzegu, jedynie cztery stałe całkowania. Podobnie jak dla płyt [25] wprowadzamy pojęcie zastępczej siły poprzecznej [9], za pomocą której wyrugujemy moment skręcający. Określamy ją ze wzoru:

$$V^1 = Q^1 + M^{12} \Big|_2. \quad (9.22)$$

Wobec tego siły na brzegu swobodnym winny spełniać następujące warunki:

$$\overset{\circ}{N}_{11} = \overset{\circ}{N}_{11}, \quad (9.23)$$

$$\overset{\circ}{N}_{12} = \overset{\circ}{N}_{12}, \quad (9.24)$$

$$\overset{\circ}{M}_{12} = \overset{\circ}{M}_{12}, \quad (9.25)$$

$$\overset{\circ}{V}_1 = \overset{\circ}{V}_1. \quad (9.26)$$

Oznaczając:

$$A = \overset{\circ}{N}_{11} \cos \varphi + \overset{\circ}{N}_{12} \sin \varphi, \quad (9.27)$$

$$B = -\frac{\alpha}{1-\nu} \left(\overset{\circ}{N}_{11} + A \cos \varphi \right) + \frac{\omega}{(1-\nu) m_1} \overset{\circ}{V}_1, \quad (9.28)$$

otrzymujemy następujące formuły na określenie stałych całkowania na brzegu swobodnym [9]:

$$C_{kl}^1 S^{kl} = \overset{\circ}{N}_{11}, \quad (9.29)$$

$$C_{kl}^2 S^{kl} = A, \quad (9.30)$$

$$\bar{C}_{kl}^2 S^{kl} = \frac{I}{\sqrt{I + \alpha^2 - \nu}} \left(\alpha B - \omega^2 \overset{\circ}{M}_{12} \right), \quad (9.31)$$

$$\bar{C}_{kl}^1 S^{kl} = \frac{1}{\sqrt{I + \alpha^2 - \nu}} \left((1 - \nu) B - \cos \varphi \omega^2 \overset{\circ}{M}_{12} \right). \quad (9.32)$$

Z kolei na brzegu podpartym mamy do zdjęcia odpowiednie przemieszczenia i obroty:

$$\bar{w}_3 = \overset{\circ}{w}_3, \quad (9.33)$$

$$\bar{w}_2 = \overset{\circ}{w}_2, \quad (9.34)$$

$$\bar{d}_1 = \overset{\circ}{d}_1, \quad (9.35)$$

$$\bar{d}_2 = \overset{\circ}{d}_2. \quad (9.36)$$

Stałe całkowania w tym przypadku otrzymujemy z zależności [9]:

$$\alpha C_{kl}^1 S^{kl} = \frac{2 E h \varepsilon}{\omega n_2} g_{22} \overset{\circ}{d}^2, \quad (9.37)$$

$$\alpha C_{kl}^2 S^{kl} = \frac{2 E h \varepsilon \omega g_{22}}{\left[\frac{2 H}{\varepsilon} - (1 - \nu) \right] n_2} \overset{\circ}{w}^2, \quad (9.38)$$

$$\alpha \bar{C}_{kl}^1 S^{kl} = \frac{2 E h \varepsilon m_1}{n_1} \left(\overset{\circ}{w}^3 + \frac{1}{\omega m_1} g_{11} \overset{\circ}{d}^1_{,1} \right), \quad (9.39)$$

$$\alpha \bar{C}_{kl}^2 S^{kl} = 2 E h \varepsilon \overset{\circ}{w}^3. \quad (9.40)$$

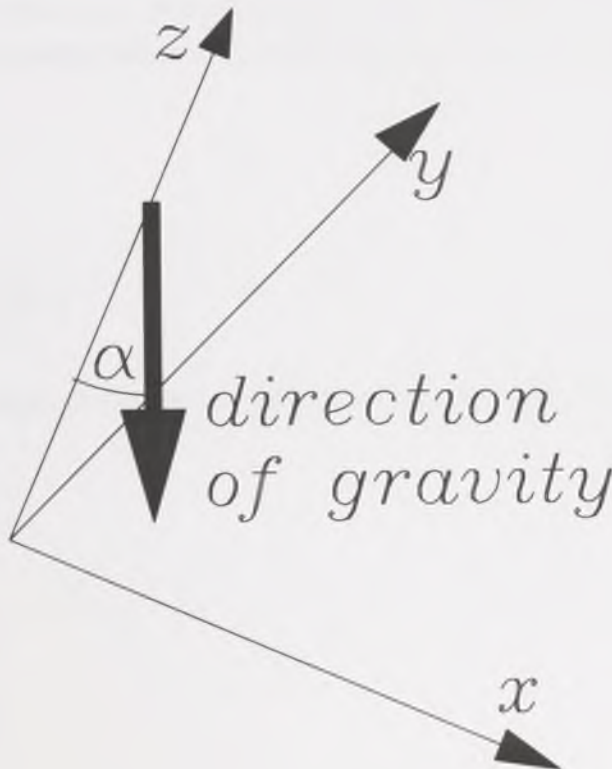
10. Rozwiązanie powłoki wychylonej od pionu

Przejdziemy teraz do rozwiązania powłoki obrotowej wychylonej od pionu. Uwagę skupimy tu na rozwiązaniu całki szczególnej zadania. Rozwiązanie przedstawione w tym rozdziale wystarczy uzupełnić o spełnienie warunków brzegowych przedstawionych w poprzednim rozdziale, wynikających z rozwiązania całki ogólnej zadania.

10.1. Wektor obciążenia

Wektor obciążenia powłoki rozkładamy na składowe w bazie kowariantnej:

$$\vec{P} = P^1 \vec{r}_1 + P^3 \vec{m}. \quad (10.1)$$



Rysunek 10.1. Wektor obciążenia płata powłoki wychylonej od pionu.
direction of gravity - kierunek grawitacji.

Zgodnie z rysunkiem 10.1. wektor obciążenia powłoki wychylonej od pionu o kąt α można przedstawić w postaci:

$$\vec{P} = \vec{i} q \sin \alpha + \vec{j} 0 - \vec{k} q \cos \alpha. \quad (10.2)$$

Czyniąc odpowiednie porównania (10.1) i (10.2) otrzymujemy następujące wyrażenia na składowe wektora obciążenia:

$$\begin{cases} P^1 = \frac{-q \cos \alpha}{g_{11}} + \frac{q \sqrt{g_{22,1}} \sin \alpha}{g_{11}} \cos(u^2), \\ P^2 = 0 - \frac{q \sin \alpha}{\sqrt{g_{22}}} \sin(u^2), \\ P^3 = \frac{-q \sqrt{g_{22,1}} \cos \alpha}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{q \sin \alpha}{\sqrt{g_{11}}} \cos(u^2), \end{cases} \quad (10.3)$$

gdzie q jest to ciężar powłoki w odniesieniu na jednostkę powierzchni.

Zatem składowe wektora obciążenia mają postać szeregu Fouriera o dwóch wyrazach. Można wobec tego traktować przypadek wychylenia powłoki jako złożenie obciążenia osiowo-symetrycznego, $\theta=0$, przy pionowym ustawieniu powłoki:

$$\begin{cases} P^1_{sym} = \frac{-q}{g_{11}}, \\ P^2_{sym} = 0, \\ P^3_{sym} = \frac{-q \sqrt{g_{22,1}}}{\sqrt{g_{11}}}, \end{cases} \quad (10.4)$$

oraz antysymetrycznego, $\theta=1$, gdy powłoka ustawiona jest wspornikowo w stosunku do kierunku grawitacji:

$$\begin{cases} P^1_{ant} = \frac{q \sqrt{g_{22,1}}}{g_{11}}, \\ P^2_{ant} = \frac{-q}{\sqrt{g_{22}}}, \\ P^3_{ant} = \frac{-q}{\sqrt{g_{11}}}. \end{cases} \quad (10.5)$$

10.2. Rozwiązanie powłoki ustawionej równoległe do kierunku grawitacji

Podstawiając (10.4) do (8.8), (8.9) i (8.10) otrzymujemy następujące wzory na siły błonowe występujące w powłoce obciążonej osiowo-symetrycznie ciężarem własnym:

$$\bar{N}_{sym}^{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{u^1} q \sqrt{g} du^1, \quad (10.6)$$

$$\bar{N}_{sym}^{12} = 0, \quad (10.7)$$

$$\bar{N}_{sym}^{22} = \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} \bar{N}_{sym}^{11} + \frac{q \sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (10.8)$$

Następnie wyznaczamy z (4.38), (4.39) i (4.40) składowe tensora odkształcenia i podstawiając do (8.38), (8.39) i (8.40) obliczamy przemieszczenia przy czym mamy oczywiście z uwagi na (10.6):

$$\bar{w}_{sym}^2 = 0. \quad (10.9)$$

10.3. Rozwiązanie powłoki ustawionej prostopadle do kierunku grawitacji-wspornikowo

Podstawiając (10.5) do wyrażenia (8.18) definiującego prawą stronę równania (8.13) otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\tilde{P}(u^1) = \frac{-2q}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (10.10)$$

Stąd podstawiając powyższe do (8.33) dostajemy następujące wyrażenie rozwiązujące równanie (8.13) w danym przypadku:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ant}^{11} = & \frac{(C_1 - 2 \int u^1 \sqrt{g} q(u^1) du^1)}{g_{22} \sqrt{g_{11}}} + \\ & - \frac{u^1 (C_2 - 2 \int \sqrt{g} q(u^1) du^1)}{g_{22} \sqrt{g_{11}}}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Dalej ponieważ:

$$P_{ant}^1 + P_{ant}^3 \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{11}}} \equiv 0, \quad (10.12)$$

otrzymujemy z (8.12):

$$\bar{N}_{ant}^{12} = - \left(\bar{N}_{ant}^{11} + \bar{N}_{ant}^{11} \frac{\sqrt{g_{22,1}} (\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22,11}} + g_{11})}{\sqrt{g_{11}g}} \right), \quad (10.13)$$

a z (8.4) po podstawieniu trzeciego wyrażenia (10.5):

$$\bar{N}_{ant}^{22} = \frac{\sqrt{g_{22,11}}}{\sqrt{g_{22}}} \bar{N}_{ant}^{11} - \frac{q}{\sqrt{g_{22}}}. \quad (10.14)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków (8.51) i (8.52).

Następnie podobnie jak to czyniliśmy dla stanu osiowo-symetrycznego obliczamy przemieszczenia: \bar{w}_{ant}^2 ze wzoru (8.48) \bar{w}_{ant}^1 z (8.41) a po wyznaczeniu stałych całkowania \bar{w}_{ant}^3 z (8.42).

10.4. Rozwiązanie powłoki ustawionej ukośnie do kierunku grawitacji

Mając wyznaczone funkcje sił i przemieszczeń wyznaczyć możemy odpowiednie wielkości dla dowolnego wychylenia:

$$\bar{N}^{11} = \bar{N}_{sym}^{11} \cos \alpha + \bar{N}_{ant}^{11} \cos(u^2) \sin \alpha \quad (10.15)$$

$$\bar{N}^{22} = \bar{N}_{sym}^{22} \cos \alpha + \bar{N}_{ant}^{22} \cos(u^2) \sin \alpha \quad (10.16)$$

$$\bar{N}^{12} = \bar{N}_{ant}^{12} \sin(u^2) \sin \alpha \quad (10.17)$$

$$\bar{w}^1 = \bar{w}_{sym}^1 \cos \alpha + \bar{w}_{ant}^1 \cos(u^2) \sin \alpha \quad (10.18)$$

$$\bar{w}^2 = \bar{w}_{ant}^2 \sin(u^2) \sin \alpha \quad (10.19)$$

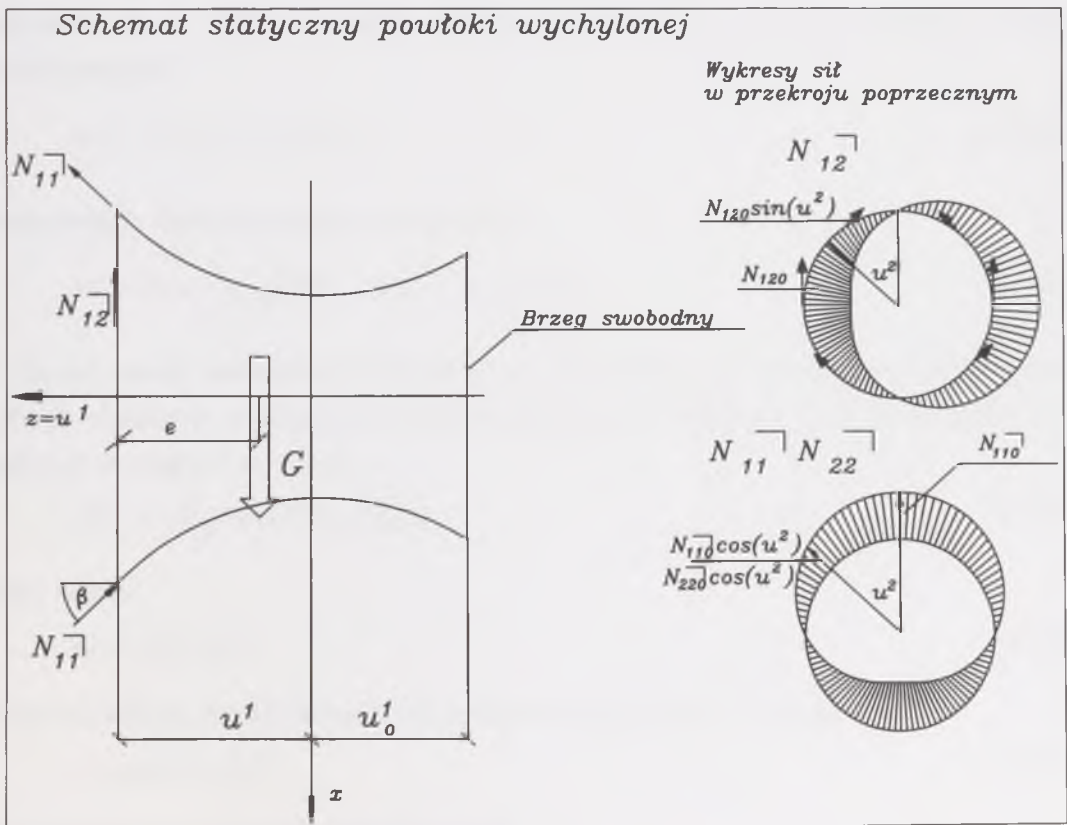
$$\bar{w}^3 = \bar{w}_{sym}^3 \cos \alpha + \bar{w}_{ant}^3 \cos(u^2) \sin \alpha \quad (10.20)$$

Podobnie obliczymy sumaryczne momenty i siły poprzeczne.

10.5. Interpretacja mechaniczna rozwiązania powłoki ustawionej prostopadle do kierunku grawitacji

Timoshenko i Woinowsky-Krieger [44] podali interpretację mechaniczną sił wewnętrznych w powłoce obrotowej obciążonej osiowo-symetrycznie. Z kolei Girkmann [18] podał rozwiązanie tą metodą obciążenia powłoki antysymetryczną składową obciążenia wiatrem. Interpretacja ta jednak nie daje odpowiedzi na pytanie jakie tym siłom towarzyszą przemieszczenia. W tym miejscu możemy stwierdzić, że przedstawione powyżej rozwiązanie powłoki wychylonej od pionu wspornikowo o kąt prosty ma interpretację mechaniczną, którą przedstawimy poniżej.

Ustawmy powłokę, jak na rysunku 10.2., prostopadle do kierunku grawitacji i dokonajmy myślowego przekroju prostopadłego do osi z . Powłoka obciążona jest masowymi siłami grawitacji. Obciążenie to równoważą błonowe siły wewnętrzne.



Rysunek 10.2. Schemat statyczny powłoki wychylonej od pionu o 90° .

Rozpatrzymy równowagę momentów względem płaszczyzny dokonanego przekroju. Moment od obciążenia siłami zewnętrznymi wynosi:

$$M = G e, \quad (10.21)$$

gdzie:

G - ciężar powłoki po prawej stronie przekroju,

e - odległość środka masy rozpatrywanej części powłoki od obranego przekroju.

Moment ten można wyrazić jako różnicę:

$$M = G u^1 - G e_0. \quad (10.22)$$

Odjemna to iloczyn ciężaru powłoki i współrzędnej u^1 danego przekroju:

$$G = 2\pi \int_{u_0^1}^{u^1} q \sqrt{g} du^1, \quad (10.23)$$

odjemnik to z kolei moment statyczny obliczony względem początku układu współrzędnych:

$$G e_0 = 2\pi \int_{u_0^1}^{u^1} u^1 q \sqrt{g} du^1. \quad (10.24)$$

Podstawiając zatem powyższe otrzymujemy:

$$M = 2\pi u^1 \int_{u_0^1}^{u^1} q \sqrt{g} du^1 - 2\pi \int_{u_0^1}^{u^1} u^1 q \sqrt{g} du^1. \quad (10.25)$$

Z drugiej strony moment ten równoważony jest przez siły przekrojowe południkowe, których składową działającą na element długości ds przekroju i rzutowaną na oś z możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$dN_z = -\bar{N}_{11}^{\gamma} \cos(u^2) \cos\beta ds. \quad (10.26)$$

Dalej mamy:

$$ds = \sqrt{g_{22}} du^2. \quad (10.27)$$

Ramię na którym działa elementarna składowa wyznaczamy ze wzoru:

$$r = \cos(u^2) \sqrt{g_{22}}. \quad (10.28)$$

Elementarna siła daje elementarny moment:

$$dM = dN_z r. \quad (10.29)$$

Całkowity moment równoważący obliczamy jako całkę z dM obliczoną po całym obwodzie przekroju:

$$M = \int_0^{2\pi} -\bar{N}_{ant}^{\gamma} \cos(u^2) \cos\beta \sqrt{g_{22}} \cos(u^2) \sqrt{g_{22}} du^2, \quad (10.30)$$

wyciągnijmy przed nawias wielkości niezależne od u^2 :

$$M = -\bar{N}_{ant}^{\gamma} \cos\beta g_{22} \int_0^{2\pi} \cos^2(u^2) du^2. \quad (10.31)$$

Z analizy geometrycznej otrzymujemy:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (10.32)$$

po podstawieniu i scałkowaniu:

$$M = -\pi \bar{N}_{ant}^{\gamma} \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (10.33)$$

Porównując (10.25) i (10.33) otrzymujemy:

$$\bar{N}_{ant}^{\gamma} = \frac{-2\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \left(u' \int_{u'_0}^{u'_1} q \sqrt{g} du' - \int_{u'_0}^{u'_1} u' q \sqrt{g} du' \right). \quad (10.34)$$

Przechodząc z wielkości fizycznych na tensorowe zgodnie z (7.9) dostajemy:

$$\bar{N}_{ant}^{11} = \frac{-2}{g_{22} \sqrt{g_{11}}} \left(u' \int_{u'_0}^{u'_1} q \sqrt{g} du' - \int_{u'_0}^{u'_1} u' q \sqrt{g} du' \right), \quad (10.35)$$

czyli wzór (10.11) tym razem w postaci całek oznaczonych.

Rozpatrzmy teraz równowagę sił. Ciężar powłoki musi być zrównoważony przez scałkowane po obwodzie składowe sił przekrojowych zrzutowane na oś y :

$$G = \int_0^{2\pi} -\bar{N}_{ant}^{\gamma} \cos(u^2) \sin\beta \sqrt{g_{22}} \cos(u^2) du^2 + \\ + \int_0^{2\pi} -\bar{N}_{ant}^{\gamma} \sin(u^2) \sqrt{g_{22}} \sin(u^2) du^2. \quad (10.36)$$

Po przeniesieniu poza całkę wielkości niezależnych od u^2 :

$$G = -\bar{N}_{11}^{-1} \sin \beta \sqrt{g_{22}} \int_0^{2\pi} \cos^2(u^2) du^2 + \\ - \bar{N}_{12}^{-1} \sqrt{g_{22}} \int_0^{2\pi} \sin^2(u^2) du^2, \quad (10.37)$$

i podstawieniu:

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{g_{22}'1}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (10.38)$$

otrzymujemy:

$$G = -\pi \sqrt{g_{22}} \left(\bar{N}_{11}^{-1} \frac{\sqrt{g_{22}'1}}{\sqrt{g_{11}}} + \bar{N}_{12}^{-1} \right), \quad (10.39)$$

stąd druga poszukiwana siła, po porównaniu z (10.23) wynosi:

$$\bar{N}_{12}^{-1} = \frac{-2}{\sqrt{g_{22}}} \int_{u_0'}^{u^1} q \sqrt{g} du^1 - \frac{g_{22}'1}{2\sqrt{g}} \bar{N}_{11}^{-1}, \quad (10.40)$$

a po przejściu na wielkości tensorowe:

$$\bar{N}_{12}^{-1} = \frac{-2}{g_{22}\sqrt{g_{11}}} \int_{u_0'}^{u^1} q \sqrt{g} du^1 - \frac{g_{22}'1}{2g_{22}} \bar{N}_{11}^{-1}. \quad (10.41)$$

Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie analogiczne do przedstawionego wcześniej na drodze poszukiwania rozwiązania układu równań różniczkowych. Należy dodać, że metodą opartą na interpretacji mechanicznej nie można znaleźć rozwiązania stanu nieskończenie małych przemieszczeń.

Obliczanie sił wewnętrznych za pomocą interpretacji mechanicznej stanowi prostą metodę kontroli poprawności wyników. Pokażemy to w dalszej części pracy na przykładzie powłoki katenoidalnej.

11. Rozwiązanie numeryczne powłoki obrotowej

11.1. Równania wyjściowe metody numerycznej

Podstawiając siły poprzeczne wyznaczone z równania czwartego i piątego układu (5.5) do trzech pierwszych oraz wykorzystując rozdzielanie zmiennych (6.1) - (6.7) a także podstawienie wyrażeń (4.13) - (4.18) otrzymujemy trzy równania różniczkowe zwyczajne.

równania pierwsze:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{g_{11',1}}{g_{11}} + \frac{g_{22',1}}{2g_{22}} \right) \left(1 - K \frac{h^2}{3} \right) - \varepsilon \left(\bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right)_{,1} \right] \tilde{N}^{11} + \\
 & + \left(1 - K \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{11}_{,1} + \theta \left(1 - K \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{12} + \\
 & - \frac{g_{22',1}}{2g_{11}} \left(1 - \bar{\varepsilon}^2 \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{22} + \\
 & + \left[\varepsilon_{,1} + \left(\frac{g_{11',1}}{g_{11}} + \frac{g_{22',1}}{2g_{22}} \right) (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \right] \tilde{M}^{11} + \\
 & + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \tilde{M}^{11}_{,1} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \theta \tilde{M}^{12} + \tilde{P}^1 = 0,
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

- równanie drugie:

$$\begin{aligned}
 & + \left[\left(\frac{g_{11',1}}{2g_{11}} + \frac{3g_{22',1}}{2g_{22}} \right) - \varepsilon \left(\bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + \left(\frac{g_{11',1}}{2g_{11}} + \frac{g_{22',1}}{g_{22}} \right) \frac{h^2}{3} + \frac{g_{22',1}}{2g_{22}} \varepsilon^2 \frac{h^2}{3} \right] \tilde{N}^{12} + \\
 & + \left(1 - K \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{12}_{,1} - \theta \left(1 - K \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{22} + \\
 & + \left[\bar{\varepsilon}_{,1} + \left(\frac{g_{11',1}}{2g_{11}} + \frac{g_{22',1}}{g_{22}} \right) (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \right] \tilde{M}^{12} + \\
 & + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \tilde{M}^{12}_{,1} + (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \theta \tilde{M}^{22} + \tilde{P}^2 = 0,
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

trzecie równanie:

$$\begin{aligned}
& \left[b_{11} + \left(\varepsilon \frac{h^2}{3} \right)_{,11} + \left(\frac{3g_{11',1} + g_{22',1}}{2g_{11} + g_{22}} \right) \left(\varepsilon \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{g_{11',11}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{11',1}}{g_{11}} \right)^2 + \frac{g_{22',11}}{2g_{22}} - \left(\frac{g_{22',1}}{2g_{22}} \right)^2 + \frac{3g_{11',1}g_{22',1}}{4g} \right) \varepsilon \frac{h^2}{3} \right] \tilde{N}^{11} + \\
& \left[2 \left(\varepsilon \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + \left(\frac{3g_{11',1} + g_{22',1}}{2g_{11} + g_{22}} \right) \left(\varepsilon \frac{h^2}{3} \right) \right] \tilde{N}^{11}_{,1} + \\
& + \varepsilon \frac{h^2}{3} \tilde{N}^{11}_{,11} + \\
& + \theta \left[\left(\varepsilon \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + \left(\bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + 2H \frac{h^2}{3} \left(\frac{g_{11',1} + g_{22',1}}{2g_{11} + g_{22}} \right) \right] \tilde{N}^{12} + \\
& + 2H\theta \frac{h^2}{3} \tilde{N}^{12}_{,1} + \\
& + \left[b_{22} + \frac{g_{22',1}}{2g_{11}} \left(\bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right)_{,1} + \left(-\theta^2 - \frac{g_{22',11}}{2g_{11}} + \frac{g_{22',1}g_{11',1}}{(2g_{11})^2} + \frac{(g_{22',1})^2}{2g} \right) \bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right] \tilde{N}^{22} + \\
& + \frac{g_{22',1}}{2g_{11}} \left(\bar{\varepsilon} \frac{h^2}{3} \right) \tilde{N}^{22}_{,1} + \\
& + \left[b_{11} \varepsilon + \frac{g_{11',11}}{g_{11}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{11',1}}{g_{11}} \right)^2 + \frac{g_{22',11}}{2g_{22}} - \left(\frac{g_{22',1}}{2g_{22}} \right)^2 + \frac{3g_{11',1}g_{22',1}}{4g} \right] \tilde{M}^{11} + \\
& + \left(\frac{3g_{11',1} + g_{22',1}}{2g_{11} + g_{22}} \right) \tilde{M}^{11}_{,1} + \\
& + \tilde{M}^{11}_{,11} + \\
& + 2\theta \left(\frac{g_{11',1} + g_{22',1}}{2g_{11} + g_{22}} \right) \tilde{M}^{12} + \\
& + 2\theta \tilde{M}^{12}_{,1} + \\
& + \left(-\theta^2 + b_{22} \bar{\varepsilon} - \frac{g_{22',11}}{2g_{11}} + \frac{g_{22',1}g_{11',1}}{(2g_{11})^2} + \frac{(g_{22',1})^2}{4g} \right) \tilde{M}^{22} + \\
& - \frac{g_{22',1}}{2g_{11}} \tilde{M}^{22}_{,1} + \\
& + \tilde{P}^3 = 0.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Przedstawione powyżej wzory otrzymano poprzez system *Mathematica* według wspomnianej procedury. Przedstawiono poniżej, dla ilustracji, postać tworzonych przez ten system wyrażeń. Przedstawienie wzorów w czytelniejszej postaci wymagało jedynie niewielkich modyfikacji. We wzorach tworzonych przez system *Mathematica* wprowadzono pewne oznaczenia dla uproszczenia zapisu, przykładowo:

$$u \quad -u'$$

$$K1[u] \quad -\bar{\varepsilon}$$

$$K2[u] \quad -\varepsilon$$

$$K1h[u] \quad -\frac{\varepsilon h^2}{3}$$

$$K2h[u] \quad -\varepsilon \frac{h^2}{3}$$

$$k \quad -\theta$$

$$g11[u] \quad -g_{11}$$

$$g22[u] \quad -g_{22}$$

$$g11'[u] \quad -g_{11}'$$

$$g22'[u] \quad -g_{22}'$$

itd...

Oto wyniki przekształceń algebraicznych uzyskanych przez system *Mathematica*. Kolejno mamy równania:

-równanie pierwsze

In[73]:= r1

```
Out[73]= (- (k K1[u]) + k K2[u]) m12[u] + (k - k K1[u] K2h[u]) n12[u] +
> P1[u] + n22[u] (----- + -----) +
                -g22'[u]   K1[u] K1h[u] g22'[u]
                2 g11[u]       2 g11[u]
> m11[u] (-(K1[u] (----- + -----)) + K2[u] (----- + -----) +
                g11'[u]   g22'[u]           g11'[u]   g22'[u]
                g11[u]     2 g22[u]       g11[u]     2 g22[u]
> K2'[u]) + n11[u] (----- + ----- +
                g11'[u]   g22'[u]
                g11[u]     2 g22[u]
```


11.2. Budowa macierzy sztywności i rozwiązanie układu równań

Aby otrzymać równania przemieszczeniowe powłok należy do równań (11.1) do (11.3) podstawić kolejno związki fizyczne (4.33) do (4.37) a następnie związki geometryczne (3.18) i (3.19). W efekcie otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych przemieszczeniowych z trzema niewiadomymi składowych wektora przemieszczenia. Rząd tych równań sięga cztery [41], z uwagi na składową \vec{w}^3 . Podstawiając do tych równań znane formuły rachunku różnicowego otrzymujemy w każdym punkcie dyskretnym układ równań liniowych postaci:

$$K w = P, \quad (11.4)$$

gdzie:

K -kwadratowa macierz sztywności,

w -wektor przemieszczenia,

P -wektor wyrazów wolnych (wpływ obciążeń mechanicznych i niemechanicznych)

Z uwagi na zawilosc wzorów (11.1) do (11.3) dalsze działania związane z budową równań przemieszczeniowych wykonywane są numerycznie. Macierz sztywności w programie budowana jest automatycznie przez podstawienie do kolejnych wyrazów równań równowagi (11.1) do (11.3) związków fizycznych, a do nich z kolei związków geometrycznych rozpisanych na różnice skończone. Kolejne sumowania prowadzą do budowy macierzy sztywności w kolejnych punktach dyskretnych na osi z . Zadanie sprowadza się teraz do obliczenia trzech składowych uogólnionych przemieszczeń, a technicznie do rozwiązania układu n równań liniowych.

Mając dane przemieszczenia ze związków geometrycznych i fizycznych obliczamy siły wewnętrzne. Jako wyniki podawane są wielkości fizyczne.

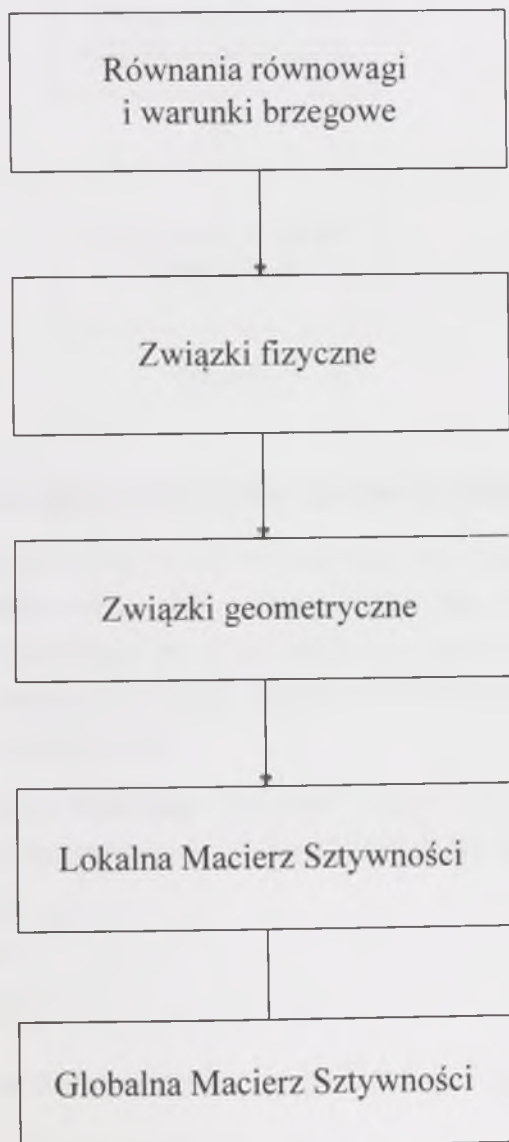
Należy wspomnieć, że macierz sztywności ma charakter pasmowy i zgodnie z twierdzeniem Bettiego jest macierzą symetryczną. Ma to istotne znaczenie na sprawne rozwiązanie układu równań liniowych. Układ ten był rozwiązywany metodą Gaussa z wyborem elementu ekstremalnego (dla każdego bieżącego równania). Zapewnia, łącznie z zastosowaniem rozszerzonej (więcej niż podwójnej) precyzji minimalizację błędu obliczeniowego.

Mimo tych środków zaradczych w rozwiązaniu układu równań liniowych o kilkuset lub kilku tysiącach niewiadomych w wynikach końcowych i wyrazach odwróconej macierzy układu kilka ostatnich cyfr jest błędnych. Są to tak zwane "śmieci".

Gdy na tych miejscach znajdują się istotne dla rozwiązania cyfry, wynik rozwiązania jest błędny. Jak się dalej okaże zjawisko to występuje w rozważanych przypadkach rozwiązania numerycznego powłok.

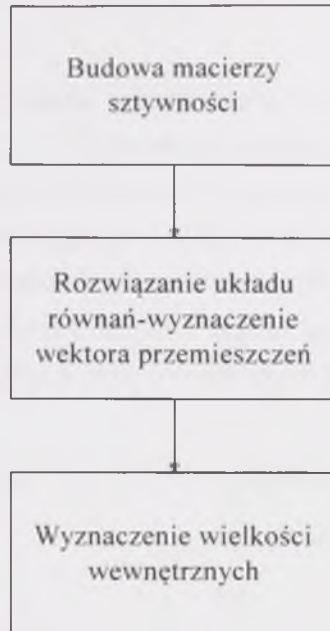
Schemat budowy macierzy sztywności przedstawiono na rysunku 11.1., a ogólną metodę rozwiązania numerycznego powłoki w wersji przemieszczeniowej na rysunku 11.2.

Budowa macierzy sztywności



Rysunek 11.1.

Rozwiązanie numeryczne powłoki



Rysunek 11.2.

11.3 Warunki brzegowe metody numerycznej

Macierz sztywności należy uzupełnić o dodatkowe równania zwane warunkami brzegowymi. Są to dodatkowe równania, które można użyć do modyfikacji macierzy sztywności lub, jak zastosowano to w tej aplikacji, uzupełnić nimi układ równań. W efekcie macierz sztywności jest trochę większa i traci cechę symetryczności, ale jest wygodniejsza dla celów badawczych.

Przyjęto na brzegu swobodnym warunki brzegowe jako zerujące się siłę N^1 , moment M^1 , zastępczą siłę poprzeczną V^1 oraz zastępczą siłę styczną H^1 [9]:

$$H^1 = N^{12} + \frac{b_{22}}{g_{22}} M^{12}, \quad (11.4)$$

$$V^1 = Q^1 + M^{12} \Big|_2. \quad (11.5)$$

Na brzegu utwierdzonym zerują się wszystkie trzy składowe przemieszczenia i składowa obrotu $w^3_{,1}$.

Możliwe są również mieszane warunki brzegowe, choć nie występują w prezentowanych przykładach obliczeniowych.

12. Przykład - Rozwiązanie analityczne powłoki hiperboloidalnej wychylonej od pionu.

W pierwszym przykładzie przedstawimy rozwiązanie powłoki hiperboloidalnej o wymiarach jak na rysunku 12.1. i zmiennej grubości. Dane te zaczerpnięto z pracy [23]. Grubość powłoki zmienia się nieliniowo. Na dole powłoka ma grubość 66 cm i maleje poprzez 18 cm do 14 cm, następnie jest stała i zwiększa się u wylotu do 28 cm (rys 12.5). Funkcję zmiany kształtu na odcinkach gdzie następuje zmiana grubości dobrano w postaci wielomianu trzeciego stopnia aby zapewnić regularność i ciągłość klasy C^2 odpowiednich funkcji potrzebną przy całkowaniu i różniczkowaniu. Pozostałe dane do obliczeń wynoszą:

Ciążar objętościowy żelbetu: $24.5 \text{ kN} / \text{m}^3$,

Moduł Younga 20.0 GPa ,

Współczynnik Poissona $1/6$.

Południk tej powłoki opisany jest równaniem:

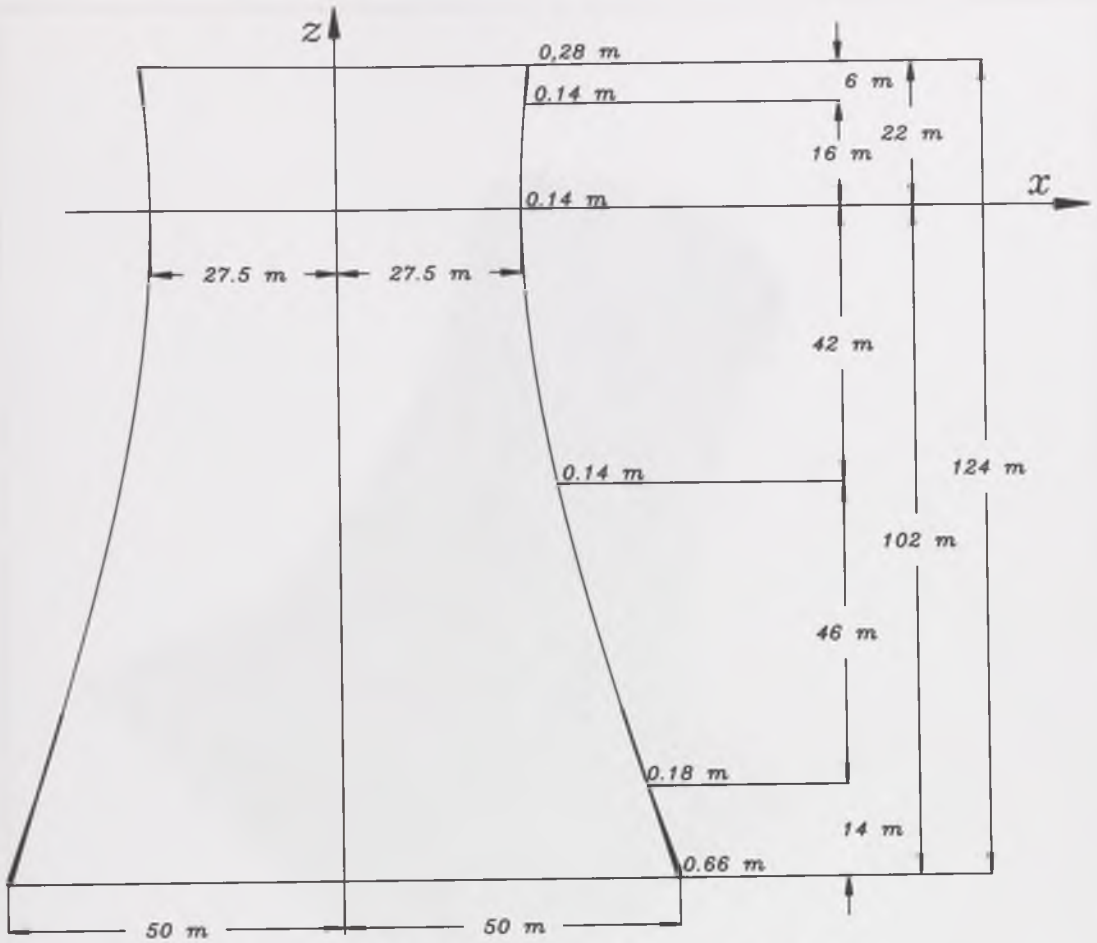
$$f(z) = a_o \sqrt{1 + \left(\frac{x}{b_o}\right)^2}$$

gdzie dla powyższych danych:

$$a_o = 27.5 \text{ m}, b_o \cong 67.17 \text{ m}$$

Wyobraźmy sobie sytuację, że oś symetrii powłoki chłodni kominowej na skutek na przykład przechodzenia pod nią niecki górniczej, nierównomiernego osiadania lub ruchów górotwórczych uległa wychyleniu o pewien kąt. Sytuacja ta przedstawiona została na rysunku 12.2.

Powłoka chłodni podparta jest na słupach ukośnych [19, 32], które zapewniają w powłoce stan błonowy. Występujące zaburzenia pochodzące od quasi-punktowego podparcia na słupach oraz ciężar i wpływ pierścienia górnego pominiemy w niniejszych rozważaniach. Zakres tych zaburzeń ogranicza się do kilku metrów [43].

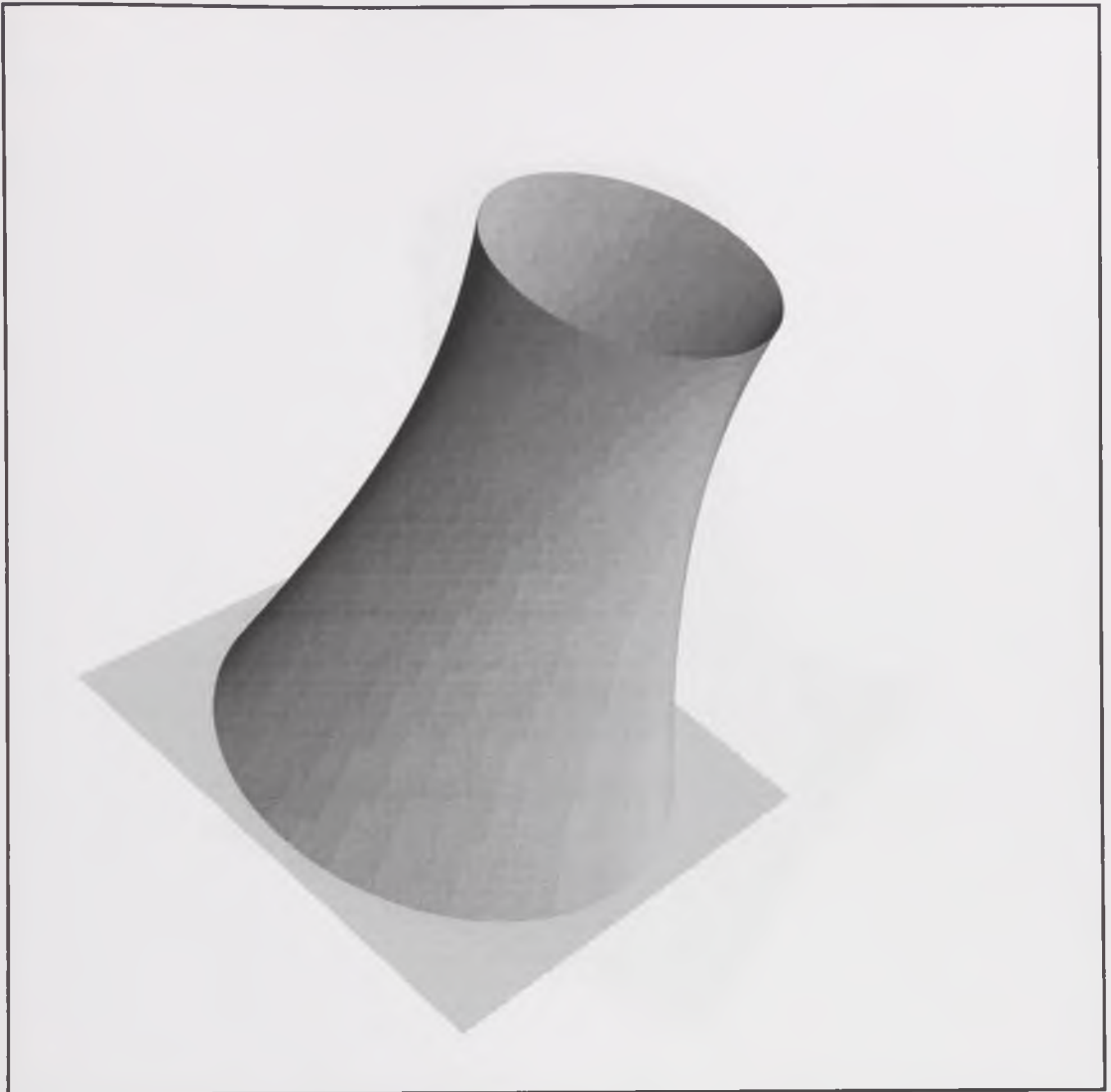


Rysunek 12.1. Geometria powłoki hiperboloidalnej

Wpływ ciężaru własnego na wielkość sił wewnętrznych, w porównaniu na przykład z wiatrem, jest najistotniejszy w powłoce chłodni [1, 19, 32]. Wychylenia od osi mogą, jak się okazuje, znacznie zwiększyć wielkość sił wewnętrznych.

Jak określono to w rozdziale 10. rozwiązanie powłoki wychylonej można złożyć z obciążenia powłoki ciężarem własnym osiowo-symetrycznie - rysunek 12.3. oraz nachylonej wspornikowo prostopadle do kierunku grawitacji - rysunek 12.4.

Z uwagi na nieliniową zmienność grubości na wysokości przedziałami, zastosowano metodę całkowania numerycznego w systemie *Mathematica*. Jednak otrzymane wyniki numeryczne interpolowane były funkcjami interpolacyjnymi [49], które mogą być różniczkowane analitycznie. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów opracowanych w ramach systemu *Mathematica*.

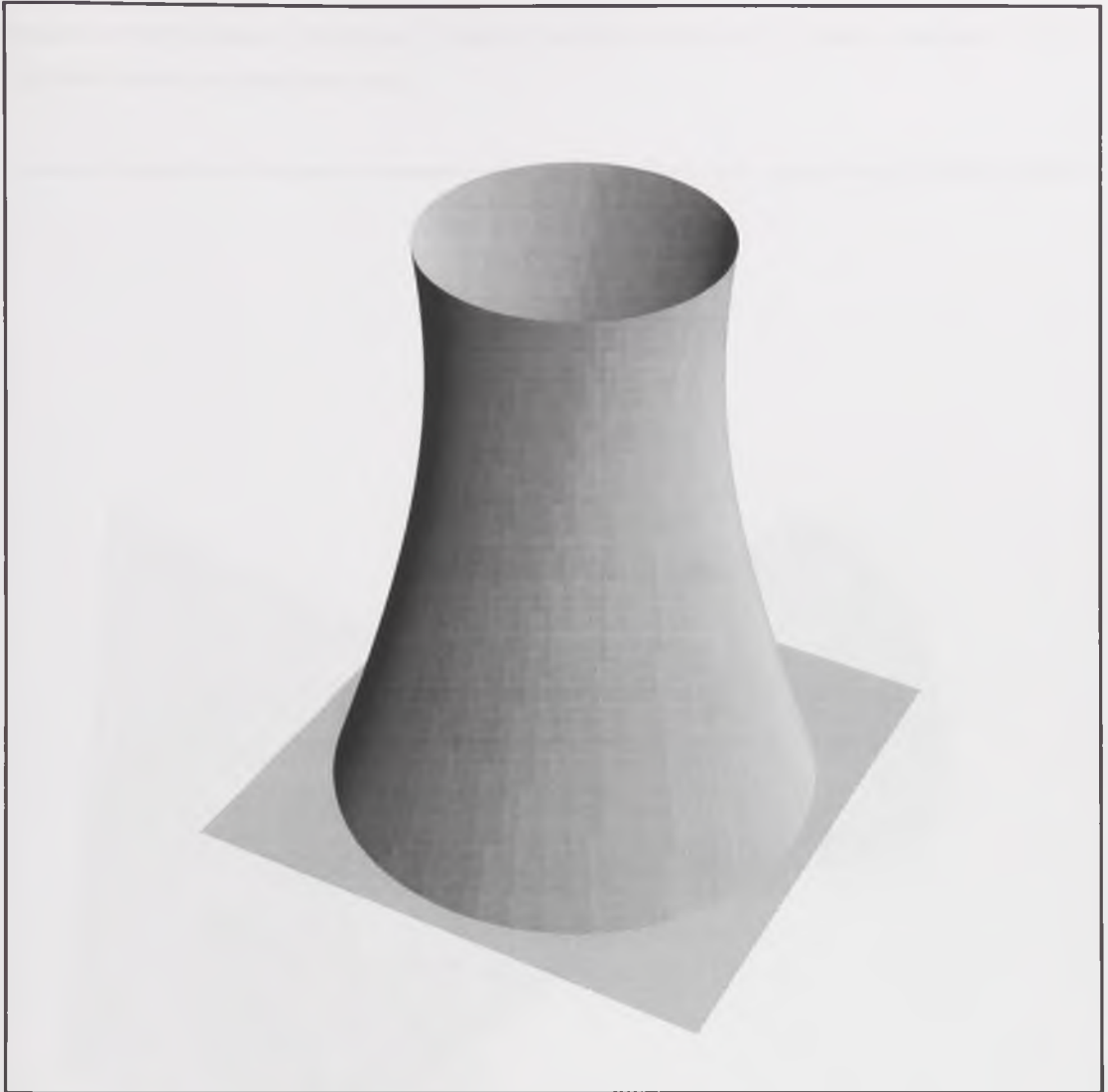


Rysunek 12.2. Powłoka hiperboloidalna wychylona od pionu

Dla obu stanów czyli osiowo symetrycznego i wspornikowego wykonano obliczenia według następującej kolejności:

I. Stan osiowo symetryczny:

1. Obliczenie siły południkowej z (10.6)
2. Obliczenie siły równoleżnikowej z (10.8)
3. Obliczenie składowych tensora odkształceń (8.37)
4. Obliczenie przemieszczeń z (8.38) i (8.40).

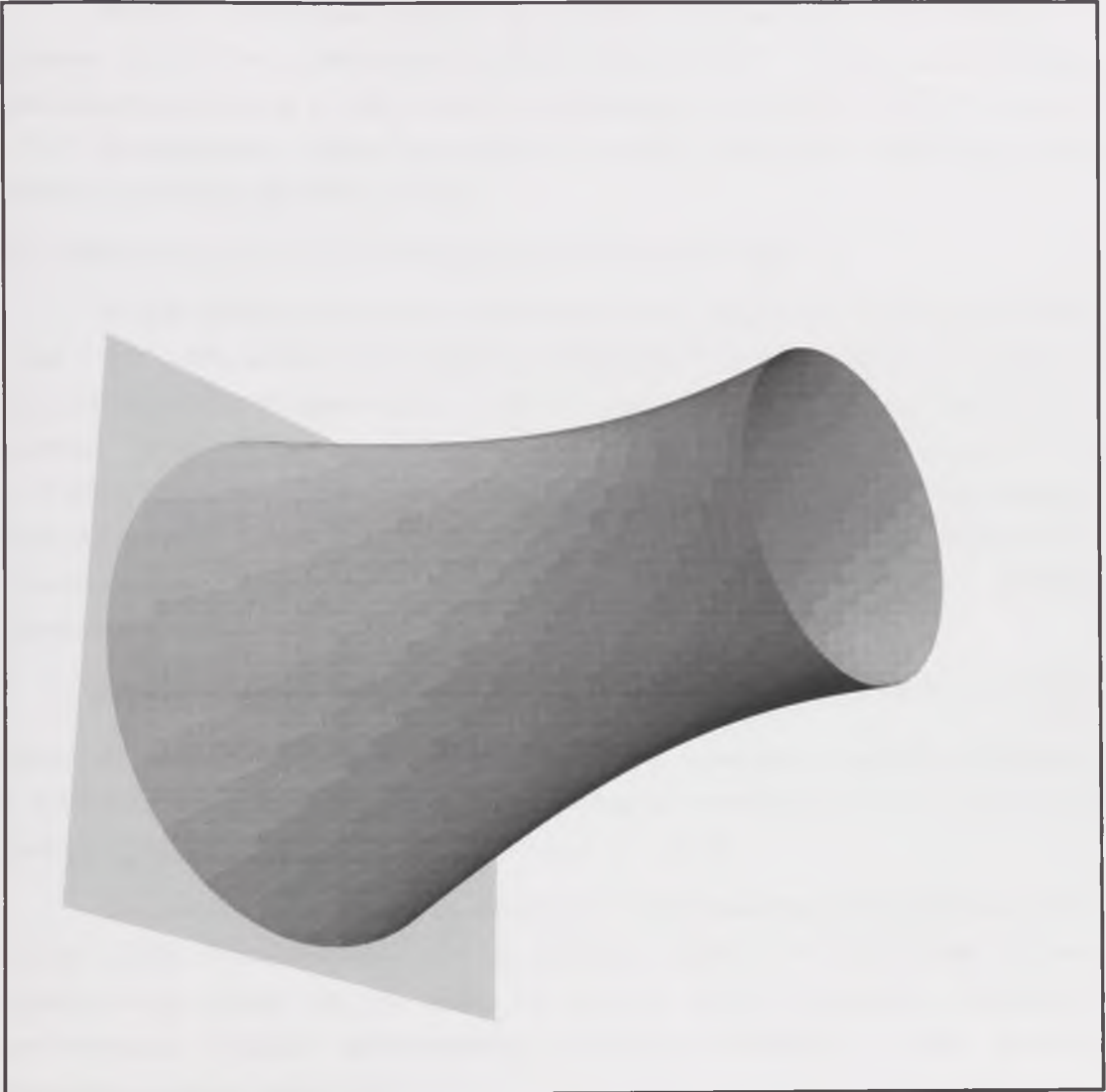


Rysunek 12.3. Powłoka hiperboloidalna obciążona osiowo-symetrycznie

Płaskie i przestrzenne wykresy sił fizycznych dla tego stanu przedstawiono na rysunku 12.6-12.8, a składowych przemieszczeń na 12.9. Wykresy deformowanej powierzchni środkowej w skali skażonej przedstawiono na rysunkach 12.10.

Jak stwierdziliśmy w rozdziale 7 rozwiązanie całki szczególnej nazywamy umownym stanem błonowym z uwagi na towarzyszące mu niewielkie momenty. Momenty te osiągają ekstremum na dole powłoki z uwagi na znaczną grubość powłoki (66 cm) w tym miejscu. Rozkład momentów południkowych na obwodzie jest analogiczny jak sił południkowych. Na rysunku 12.11. przedstawiono wykres ekstremalnych wartości momentów południkowych umownego stanu błonowego dla

osiowo-symetrycznego położenia powłoki. Pozostałe momenty są dużo mniejsze i wobec tego nie zostały tu przedstawione.



Rysunek 12.4. Powłoka hiperboloidalna obciążona antysymetrycznie

II. Stan wspornikowy:

1. Obliczenie siły południkowej z (10.11)
2. Obliczenie siły stycznej z (10.13)
3. Wyznaczenie stałych całkowania z (8.51), (8.52)
4. Obliczenie siły równoleżnikowej z (10.14)

5. Obliczenie składowych tensora odkształceń (8.36).
6. Obliczenie przemieszczeń z (8.48), (8.41) i (8.42) z uwzględnieniem warunków brzegowych (8.53) i (8.54).

Płaskie i przestrzenne wykresy sił fizycznych dla tego stanu przedstawiono na rysunku 12.12-12.14, a składowych przemieszczeń na 12.15. Wykres zdeformowanej powierzchni środkowej w skali skażonej przedstawiono na rysunku 12.16. Na rysunku 12.17. przedstawiono wykres ekstremalnych wartości momentów umownego stanu blonowego dla tego położenia powłoki.

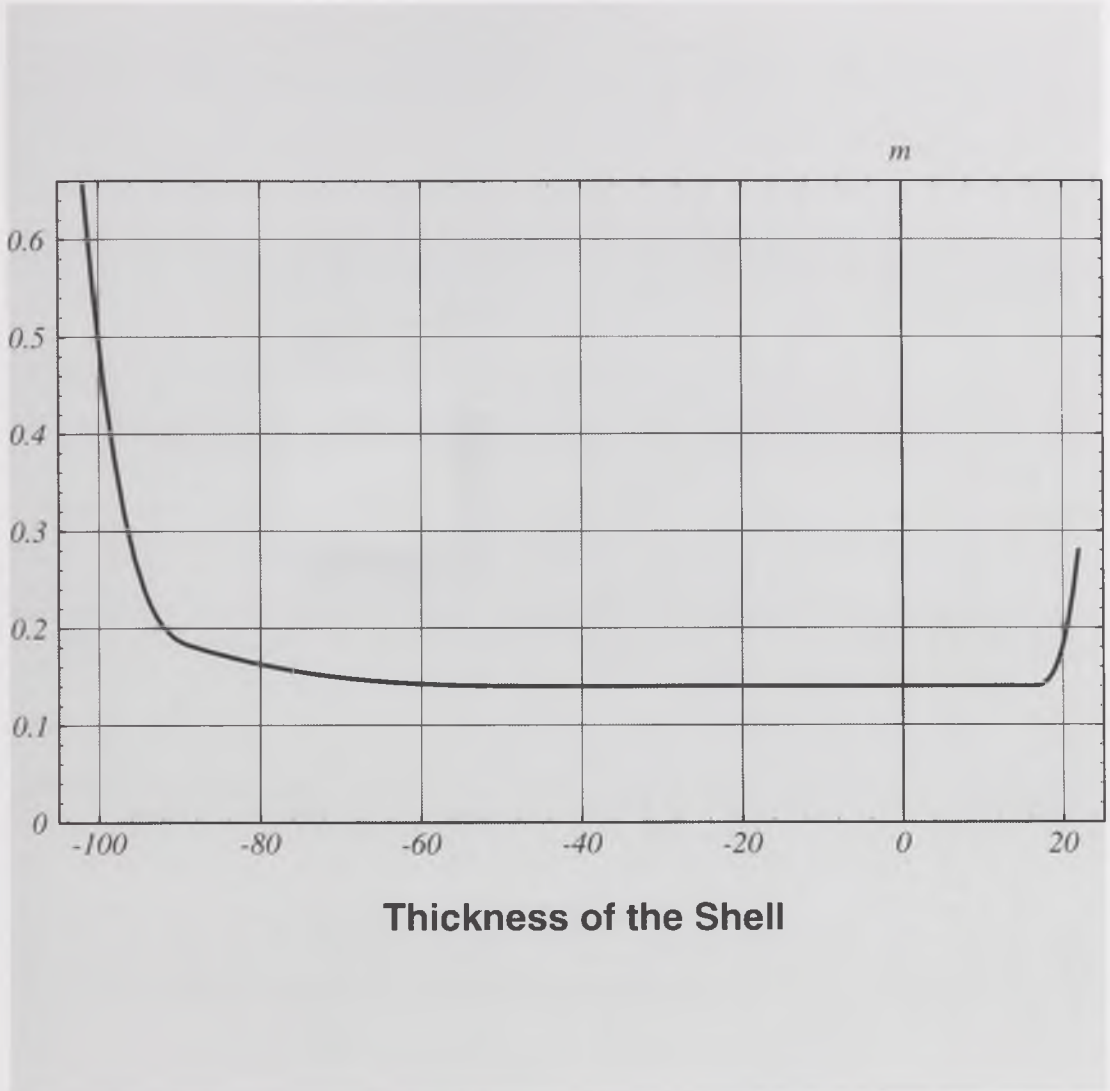
III. Superpozycja stanów I i II według wzorów (10.15) do (10.20)

Wyniki złożenia obu stanów przedstawiono dla przypadku wychylenia powłoki o kąt $\sim 24.6^\circ$. Dla takiego kąta po stronie "grzbietowej" ($u^2 = 0$) powłoki, pojawiają się siły południkowe rozciągające (rys. 12.18 i 12.19). Jednocześnie po przeciwnej stronie powłoki "spodniej" ($u^2 = \pi \approx 3.14$) siły południkowe znacznie wzrastają (rys 12.18 i 12.19), a siły równoleżnikowe są rozciągające (rys. 12.20 i 12.21) i jako takie osiągają znaczne wartości. Zatem stan niebezpieczny z uwagi na występujące rozciągające siły równoleżnikowe, w połączeniu z obciążeniem wiatrem może wystąpić w powłoce znacznie wcześniej.

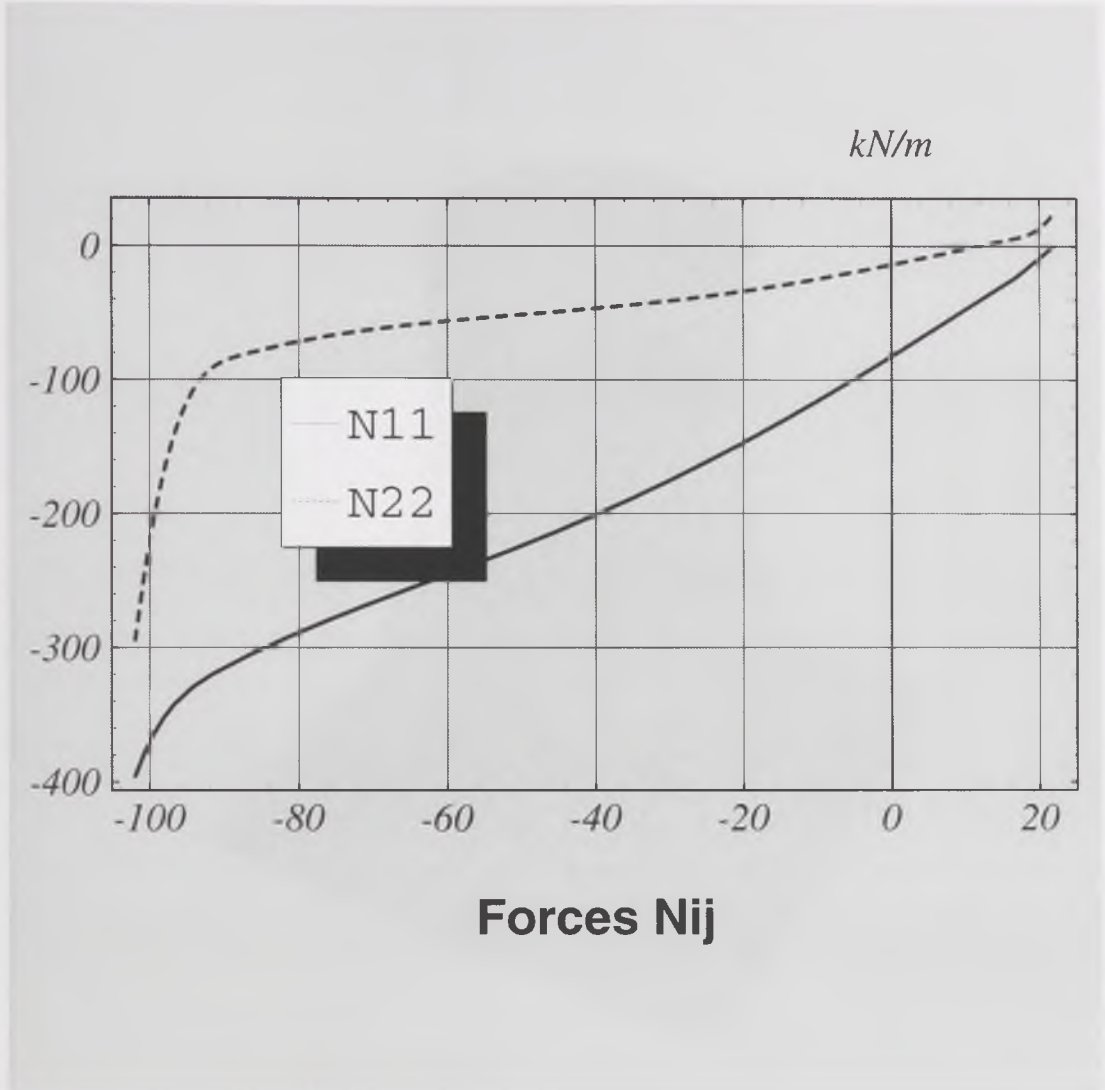
Równocześnie po bokach powłoki (dla współrzędnej $u^2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$ i $u^2 = \frac{3\pi}{2}$) występują znaczne siły styczne (rys. 12.22 i 12.24). Towarzyszą im siły południkowe i równoleżnikowe, których wartość można odczytać z wykresów 12.18 i 12.20 jako średnią z podanych wartości dla kąta $u^2 = 0$ i $u^2 = \pi \approx 3.14$.

Odpowiednie składowe przemieszczenia przedstawiono na rysunkach 12.24, 12.25, 12.26. Przemieszczenia te są znacznie większe niż dla stanu osiowo-symetrycznego jednak na tyle małe, że nie jest istotna ewentualna nieliniowość geometryczna. Wykresy zdeformowanej powierzchni środkowej w skali skażonej przedstawiono na rysunku 12.27.

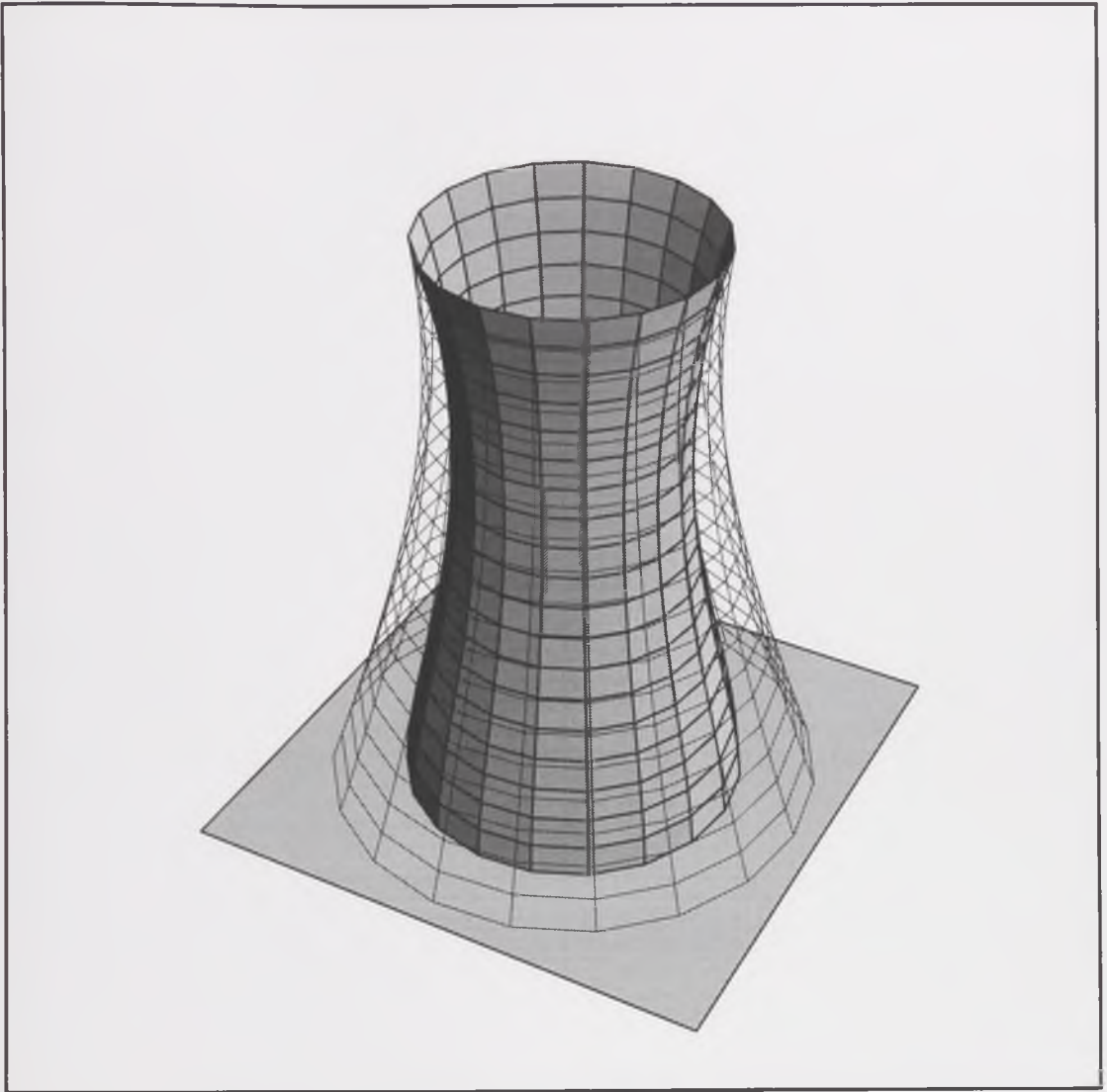
Uwaga! Na wszystkich przestrzennych wykresach sił N_{11} , N_{22} powierzchnia po stronie zewnętrznej siatki odniesienia oznacza rozciąganie, a po wewnętrznej ściskanie.



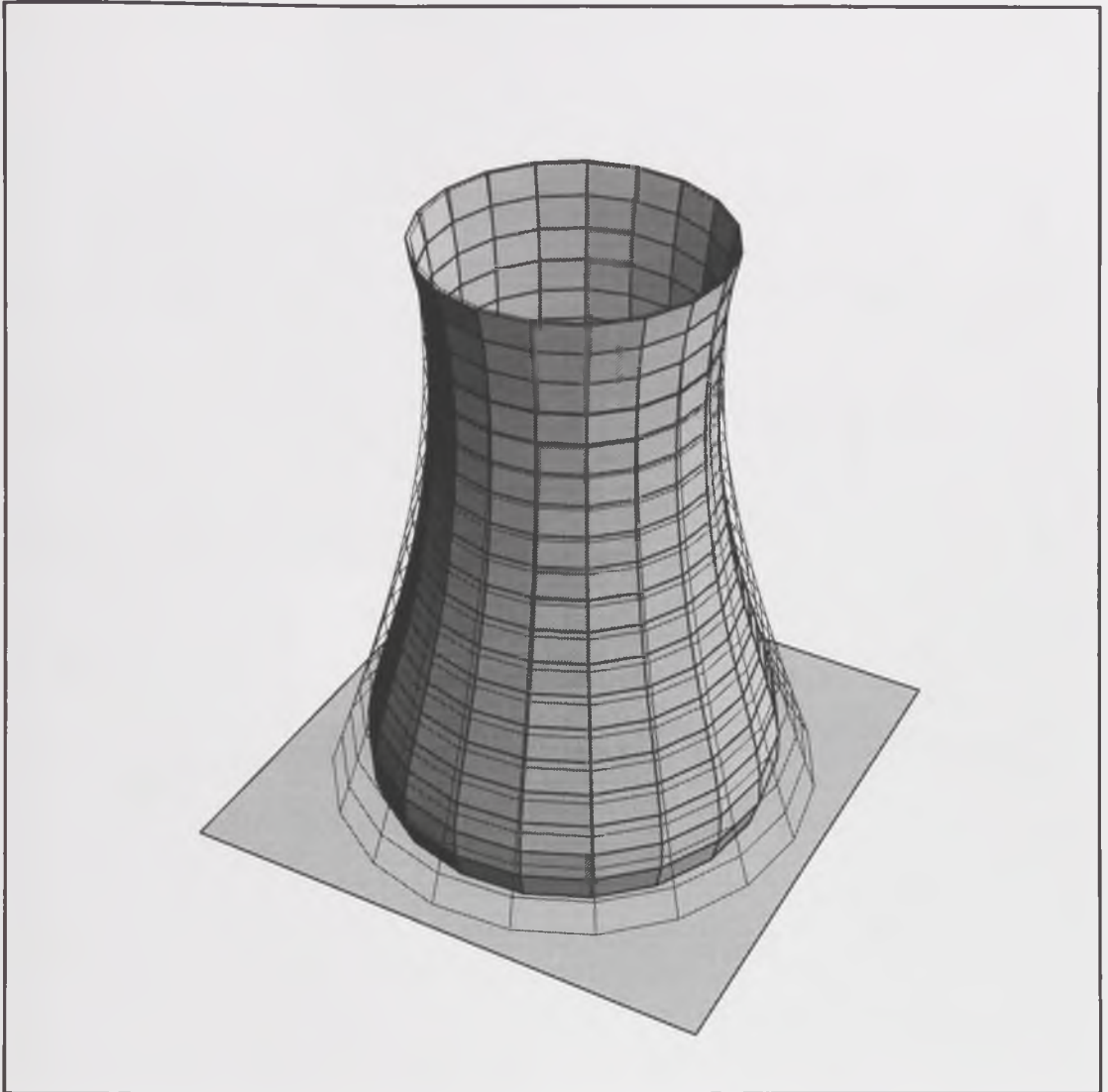
Rysunek 12.5. Wykres zmienności grubości powłoki na wysokości.



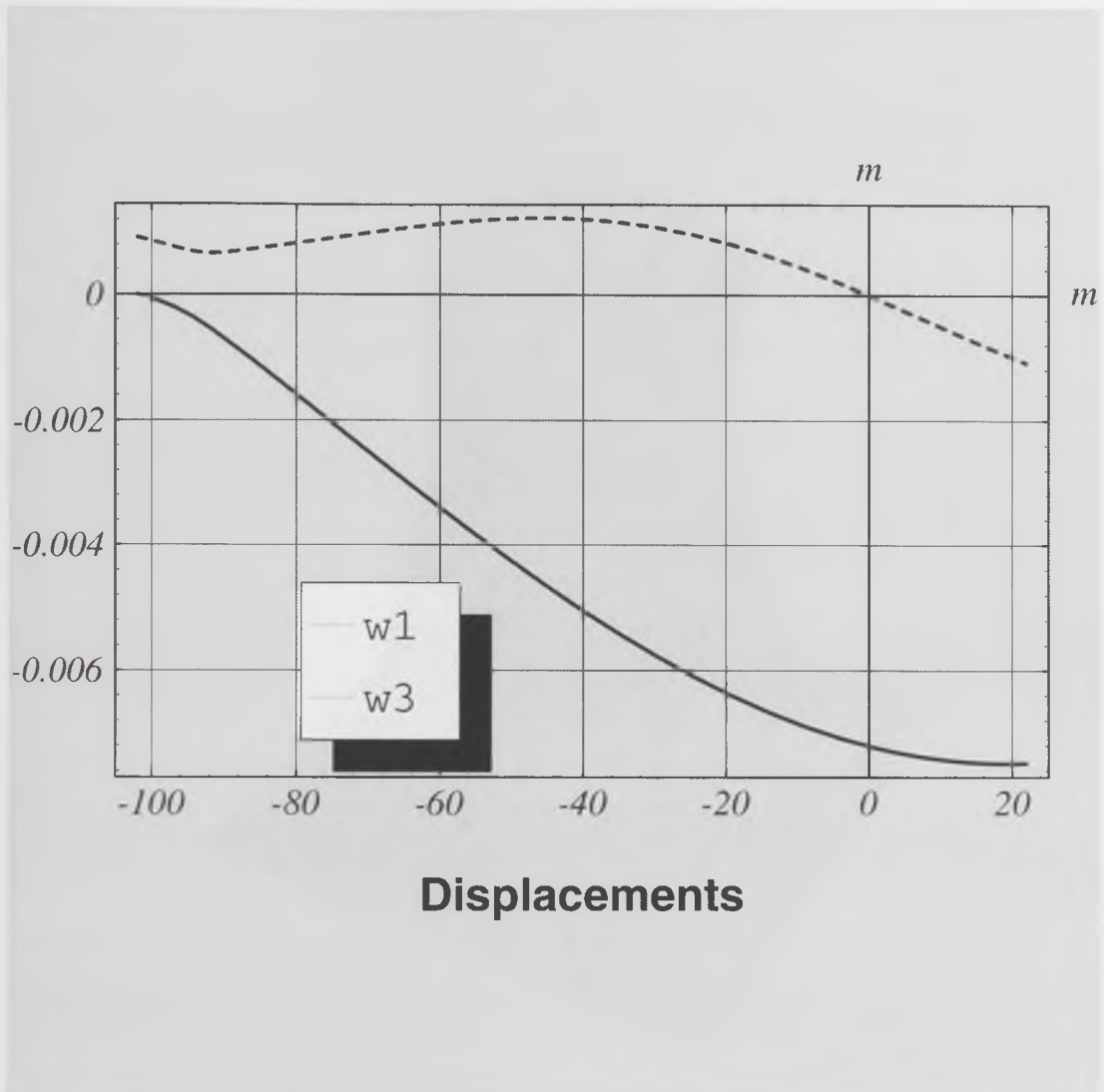
Rysunek 12.6. Wykres sił N_{11} , N_{22} w powłoce hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznym ciężarem własnym.



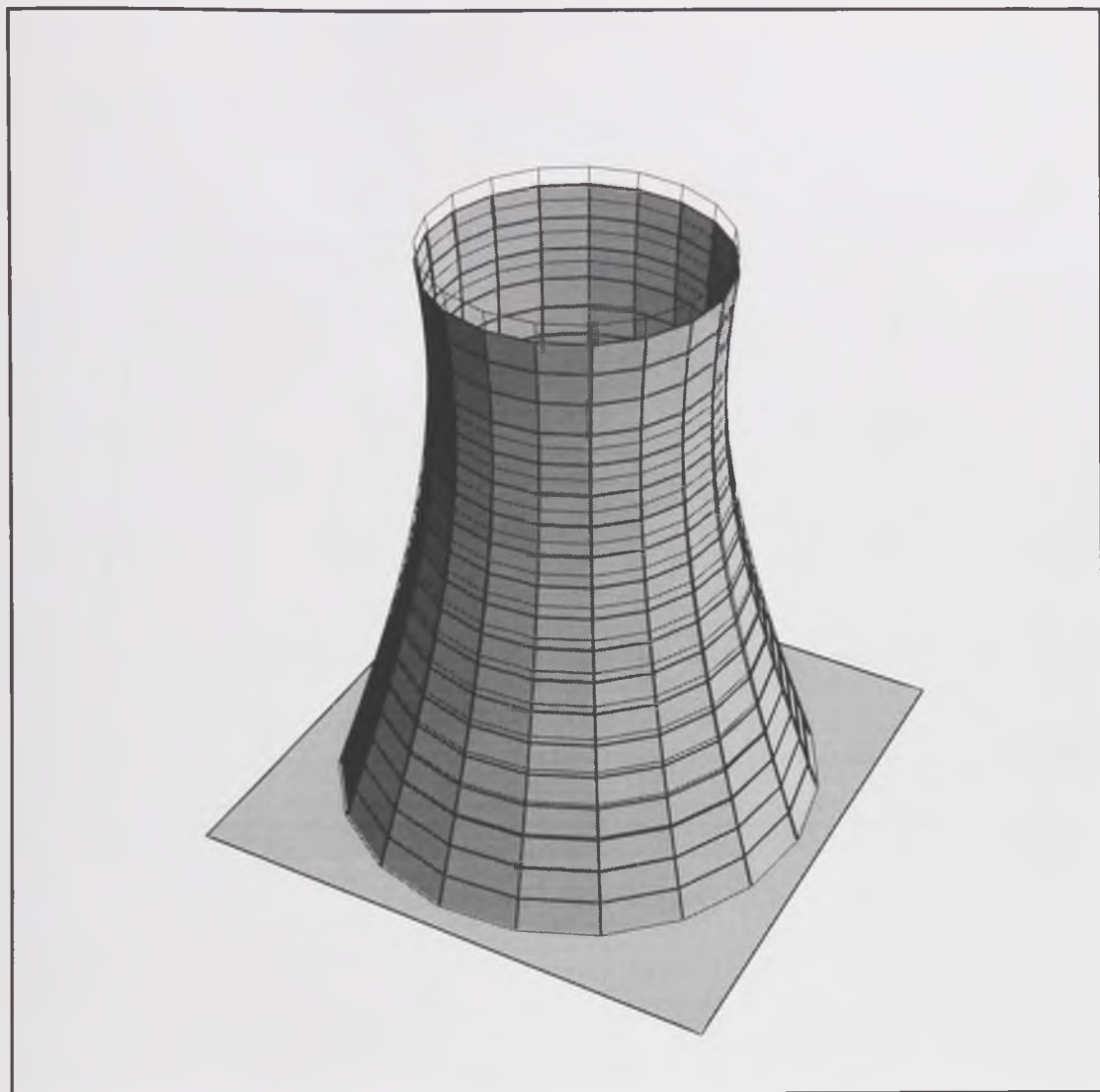
Rysunek 12.7. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{ij} w powłoce hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie ciężarem własnym.



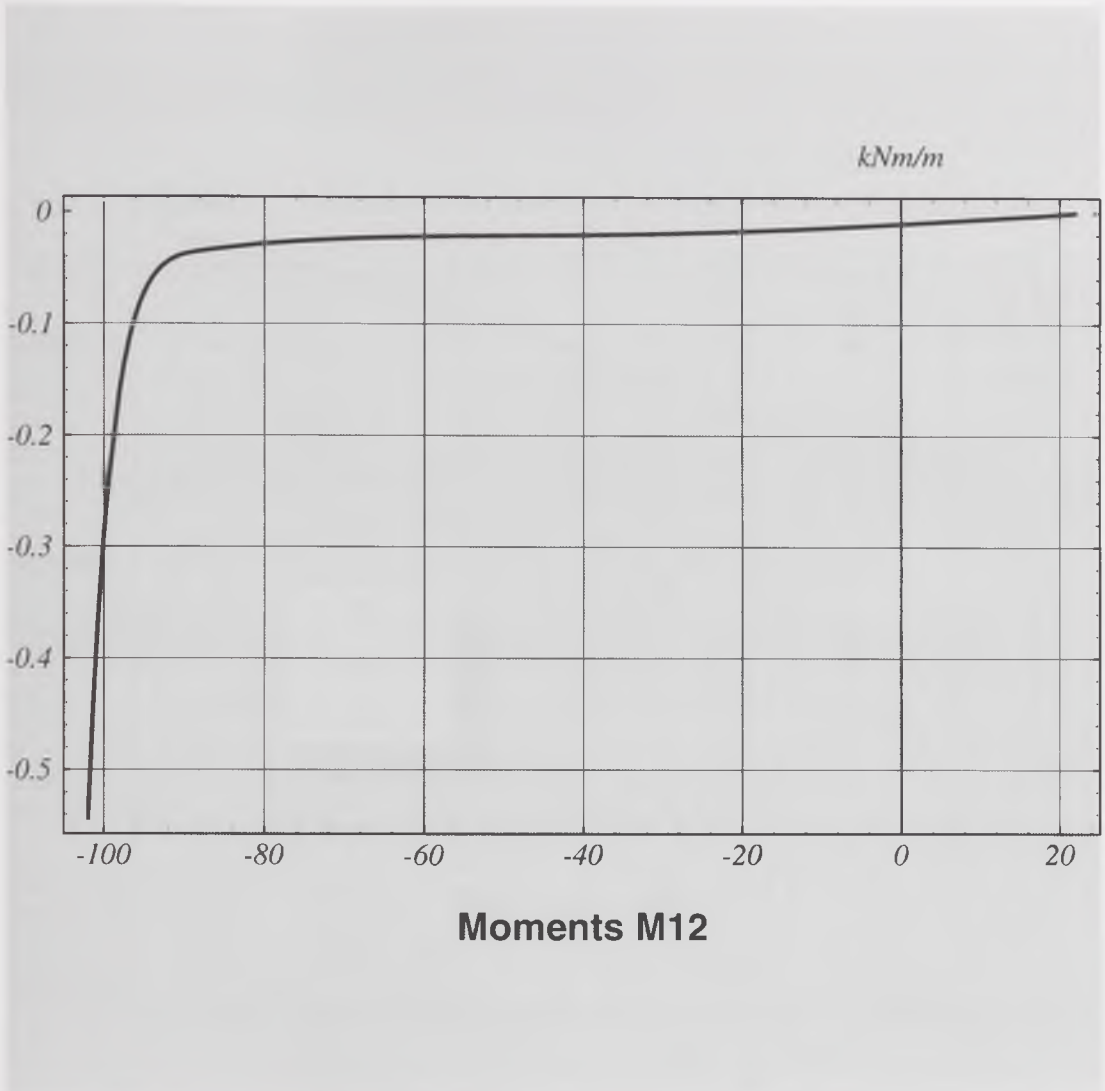
Rysunek 12.8. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{22}^+ w powłoce hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie ciężarem własnym.



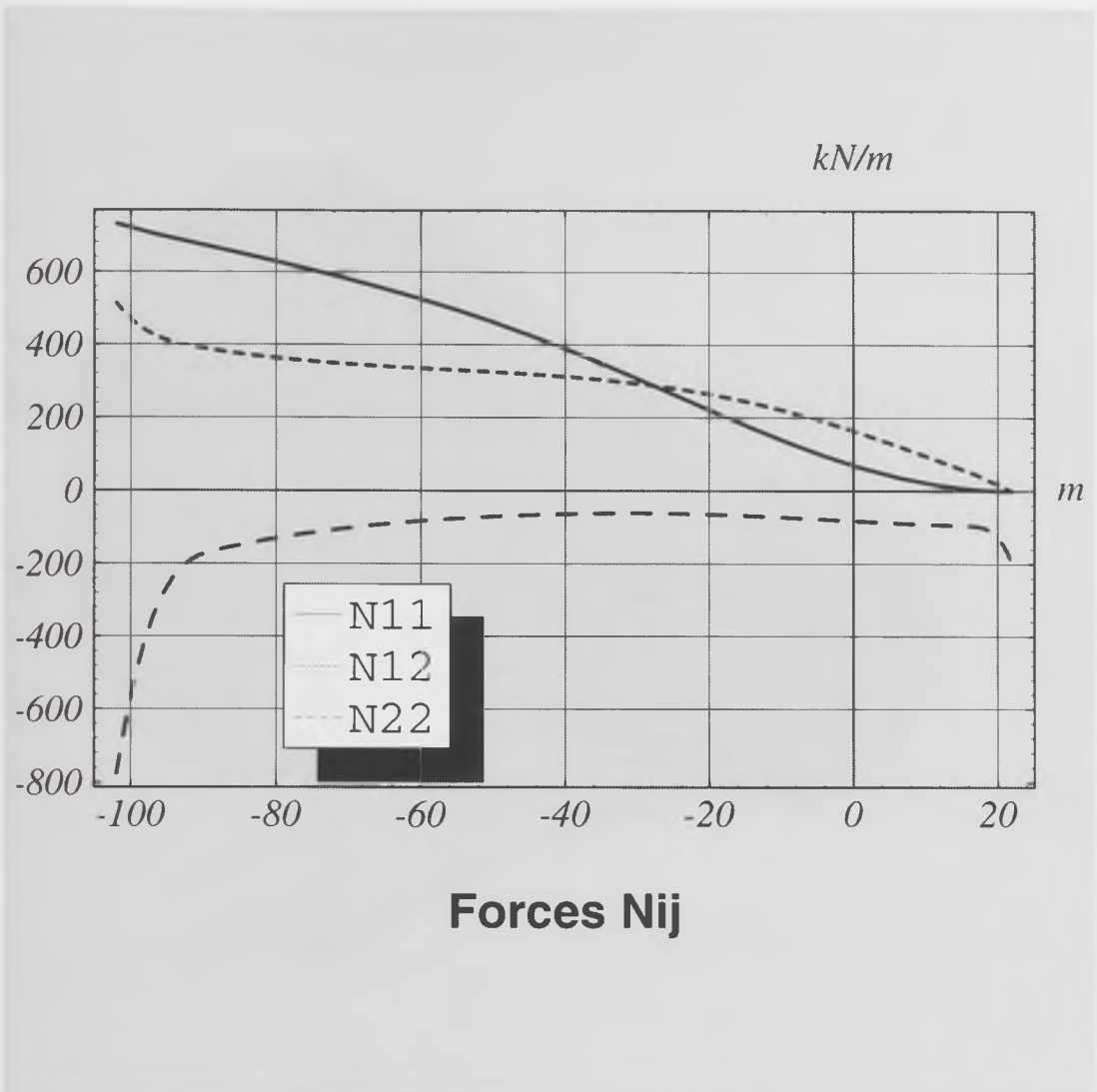
Rysunek 12.9. Wykres składowych w_1 , w_3 przemieszczenia powłoki hiperboloidalnej dla obciążenia osiowo-symetrycznego ciężarem własnym.



Rysunek 12.10. Deformacja powłoki hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie ciężarem własnym w powiększeniu 500 krotnym.



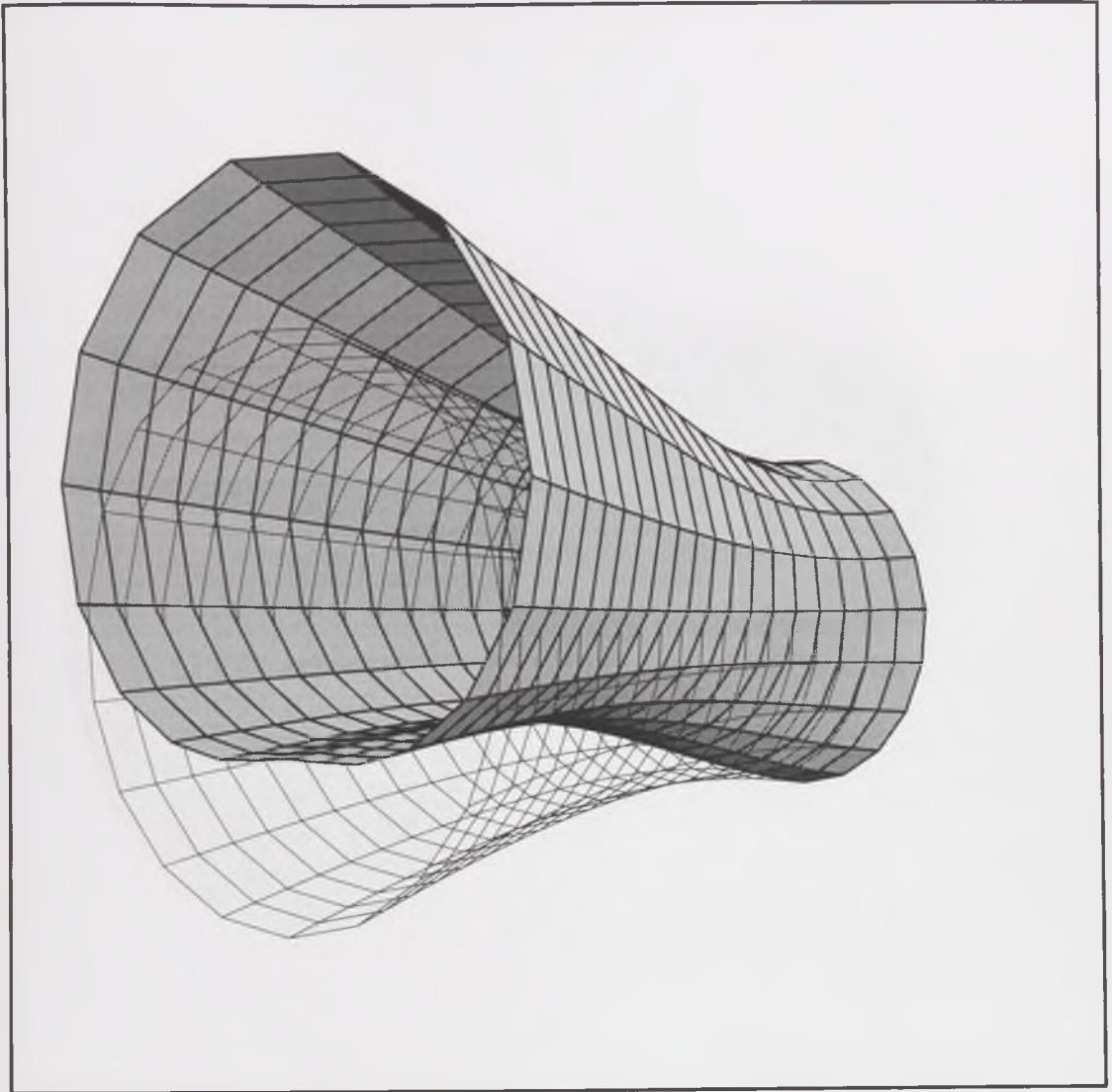
Rysunek 12.11. Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{12}^{\pm} umownego stanu błonowego dla powłoki dla osiowo symetrycznego obciążenia ciężarem własnym



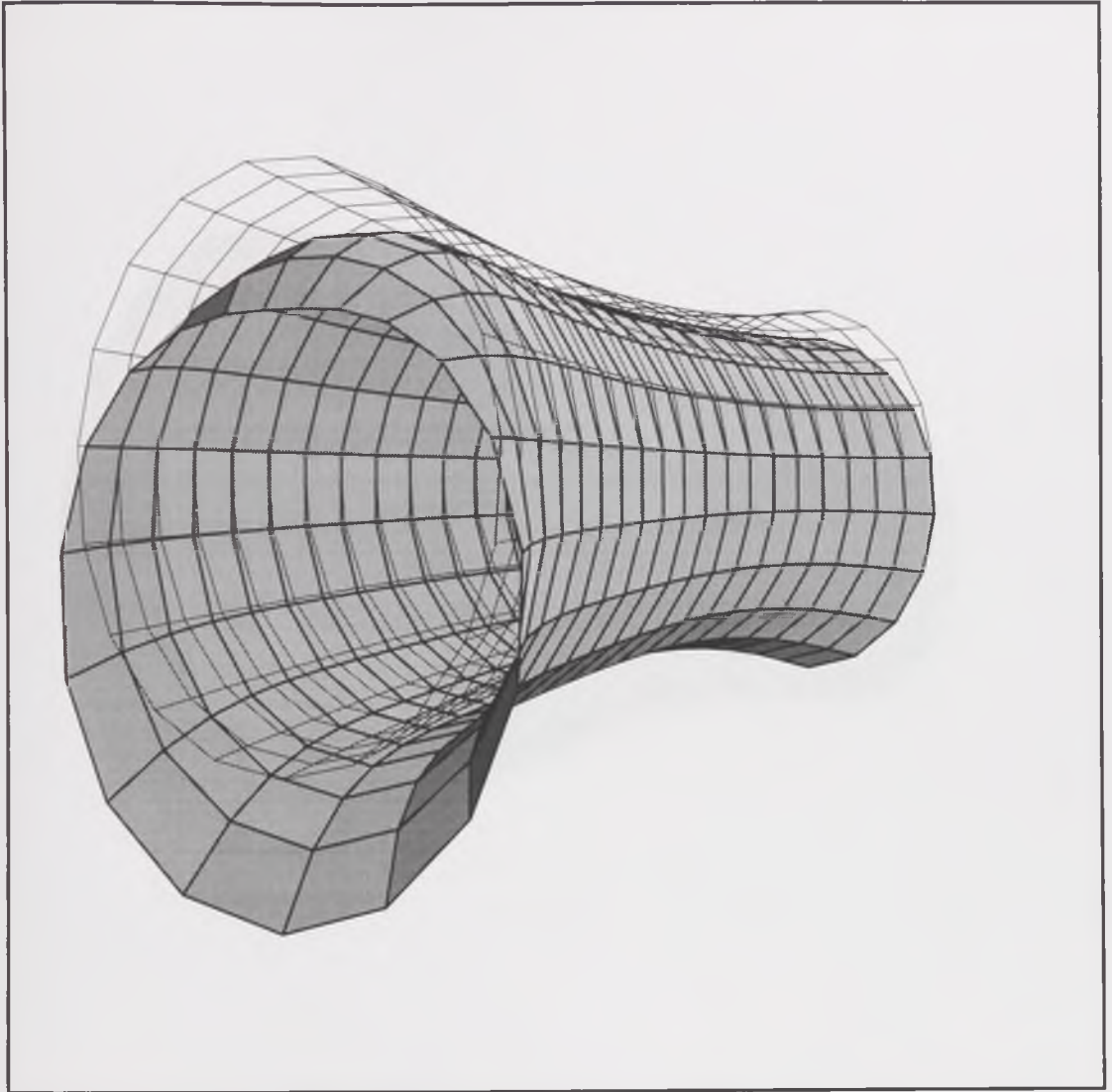
Forces N_{ij}

Rysunek 12.12. Wykres ekstremalnych wartości sił N_{11}^{\pm} , N_{22}^{\pm} , N_{12}^{\pm} na obwodzie w powłoce hiperboloidalnej obciążonej anty-symetrycznie ciężarem własnym, siły N_{11}^{\pm} , N_{22}^{\pm} osiągają ekstrema (co do wartości bezwzględnej) dla $u^2 = 0, \pi$;

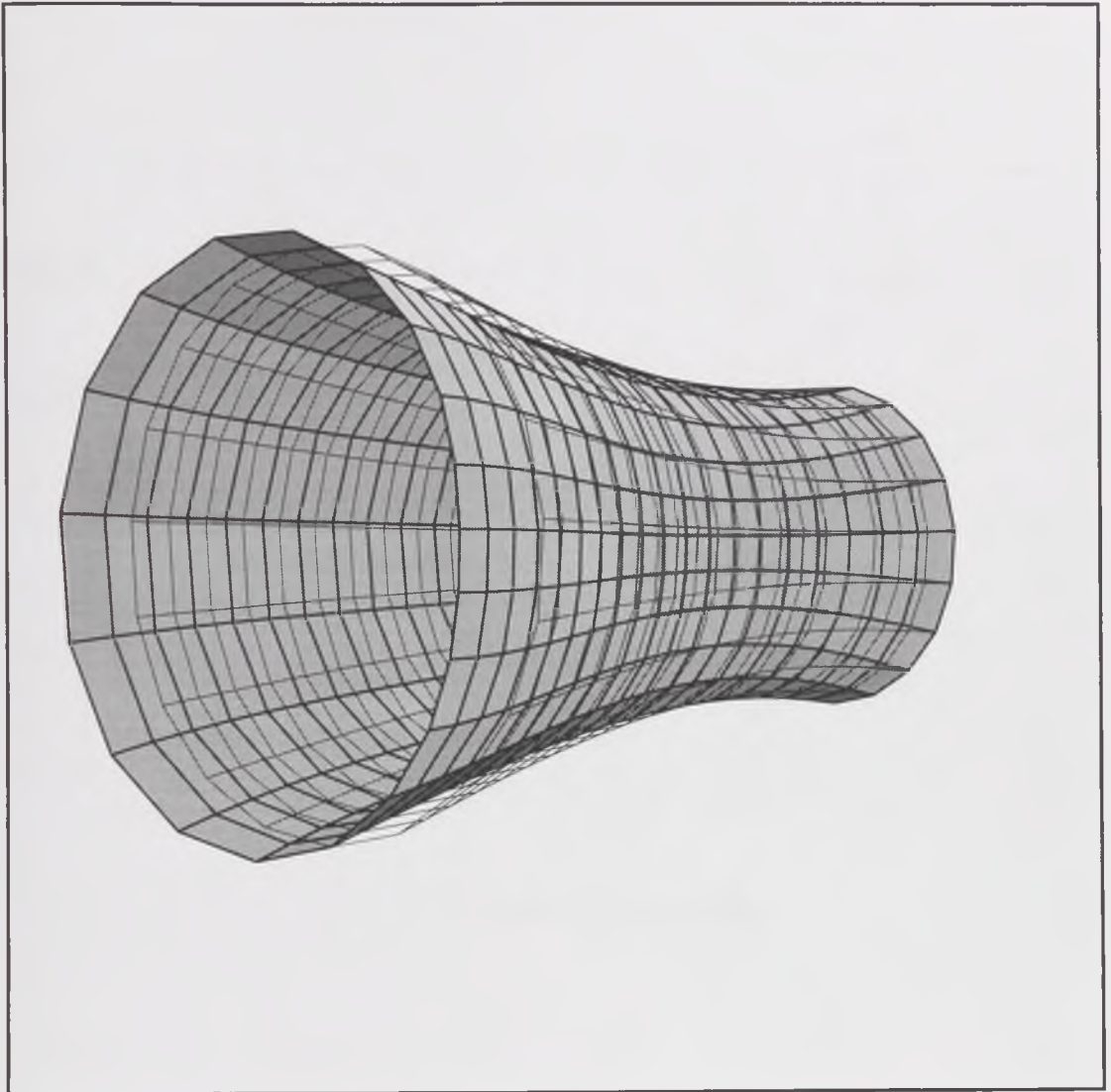
$$\text{siły } N_{12}^{\pm} \text{ dla } u^2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



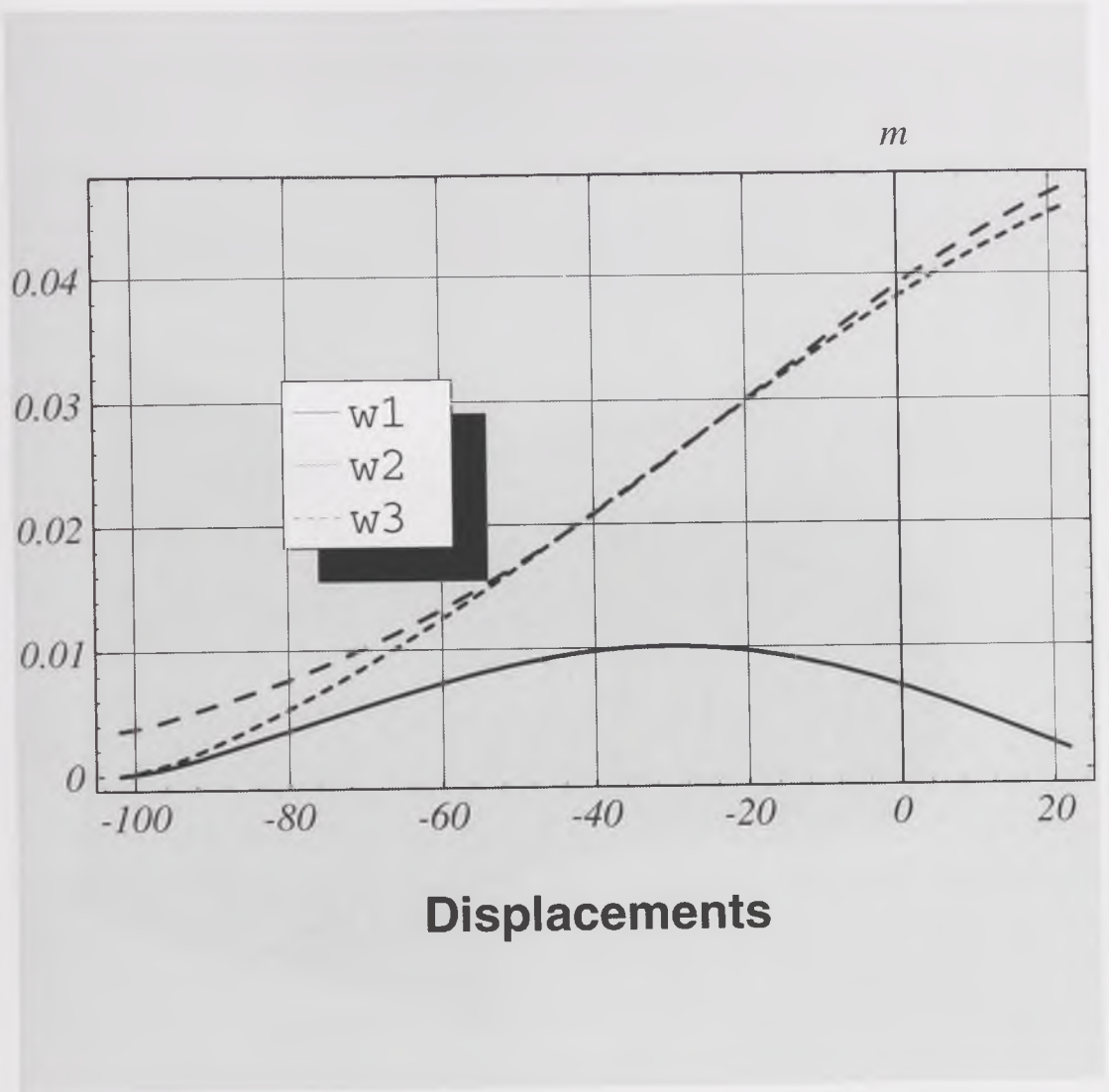
Rysunek 12.12. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{II}^- w powłoce hiperboloidalnej obciążonej anty-symetrycznie ciężarem własnym.



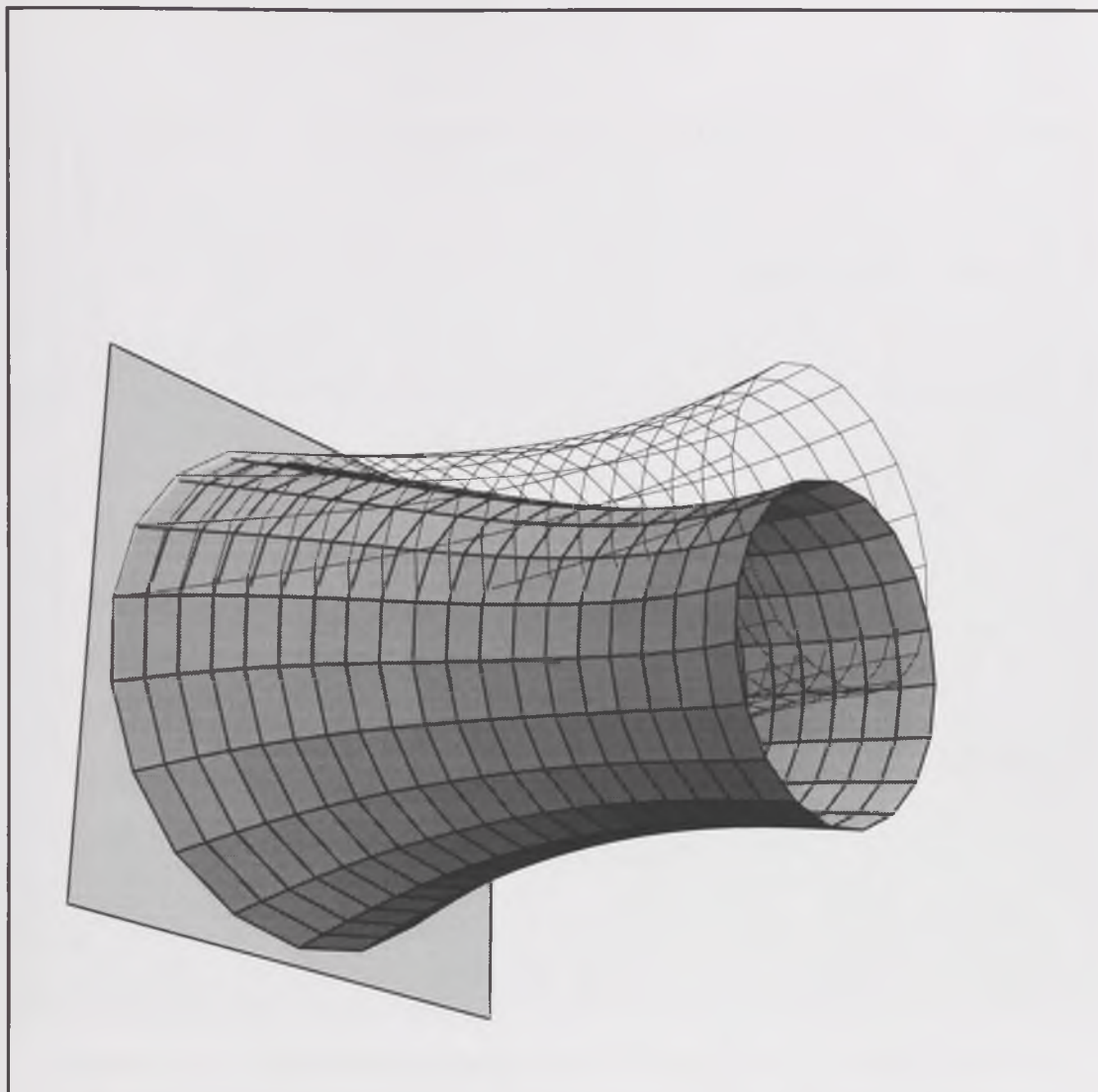
Rysunek 12.13. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{22}^* w powłoce hiperboloidalnej obciążonej anty-symetrycznie ciężarem własnym



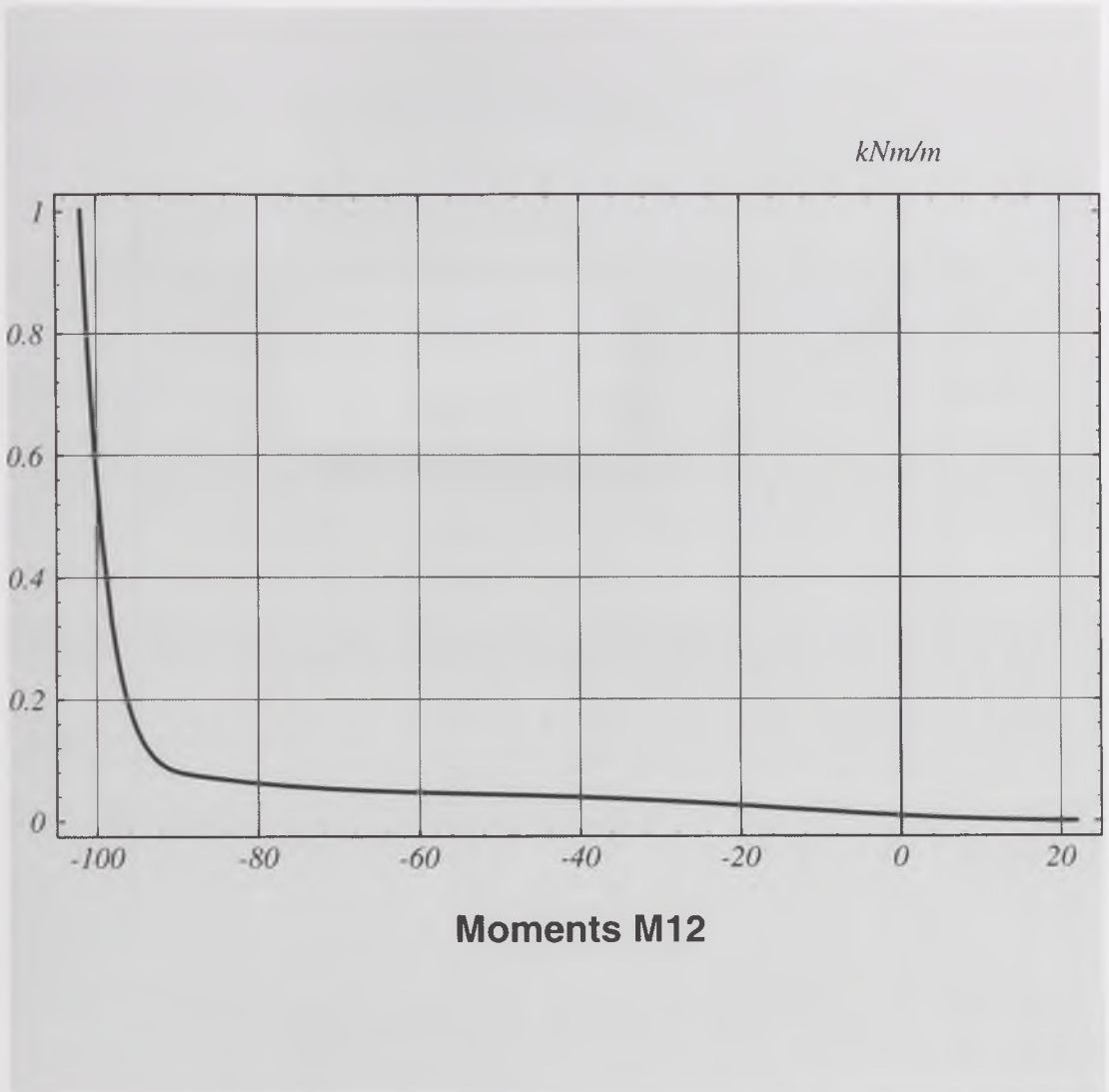
Rysunek 12.14. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{12}^{\rightarrow} w powłoce hiperboloidalnej obciążonej anty-symetrycznie ciężarem własnym.



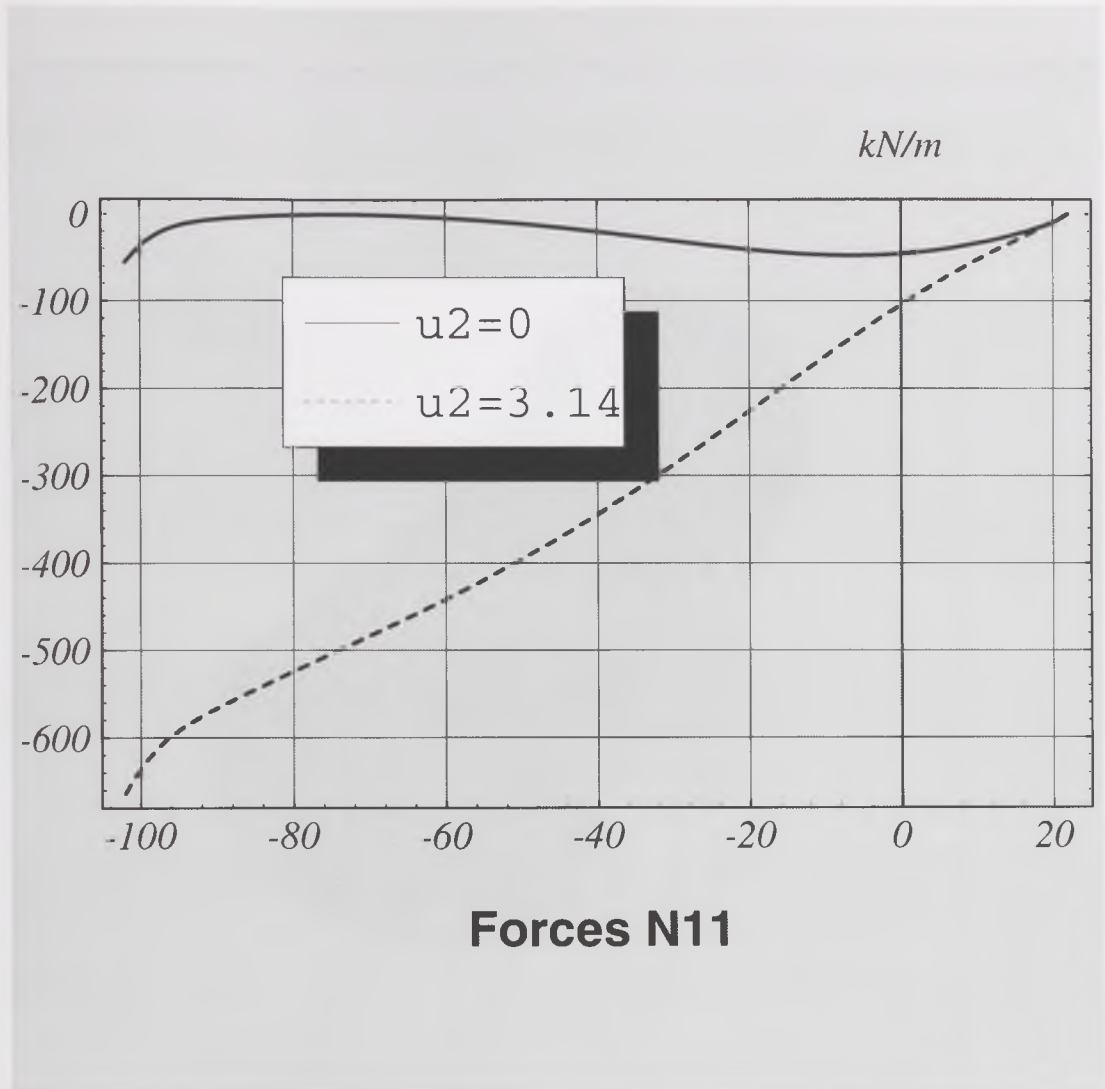
Rysunek 12.15. Wykres składowych w_1^- , w_2^- , w_3^- przemieszczenia powłoki hiperboloidalnej dla anty-symetrycznego obciążenia ciężarem własnym, składowe przemieszczenia w_1^- , w_2^- osiągają ekstrema (co do wartości bezwzględnej) dla $u^2 = 0, \pi$; składowe przemieszczenia w_2^- dla $u^2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.



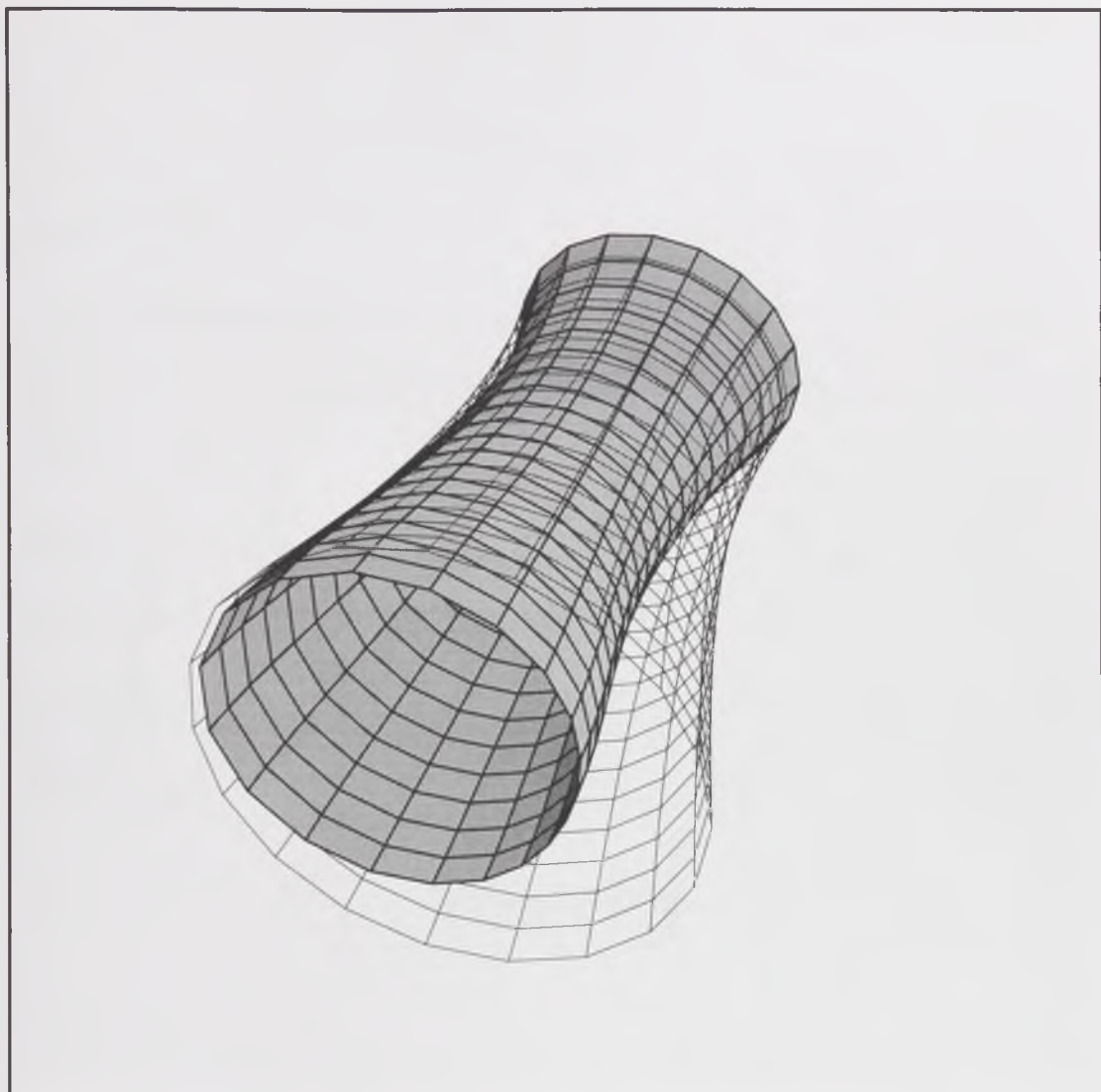
Rysunek 12.16. Deformacja powłoki hiperboloidalnej obciążonej anty-symetrycznie ciężarem własnym w powiększeniu 500 krotnym.



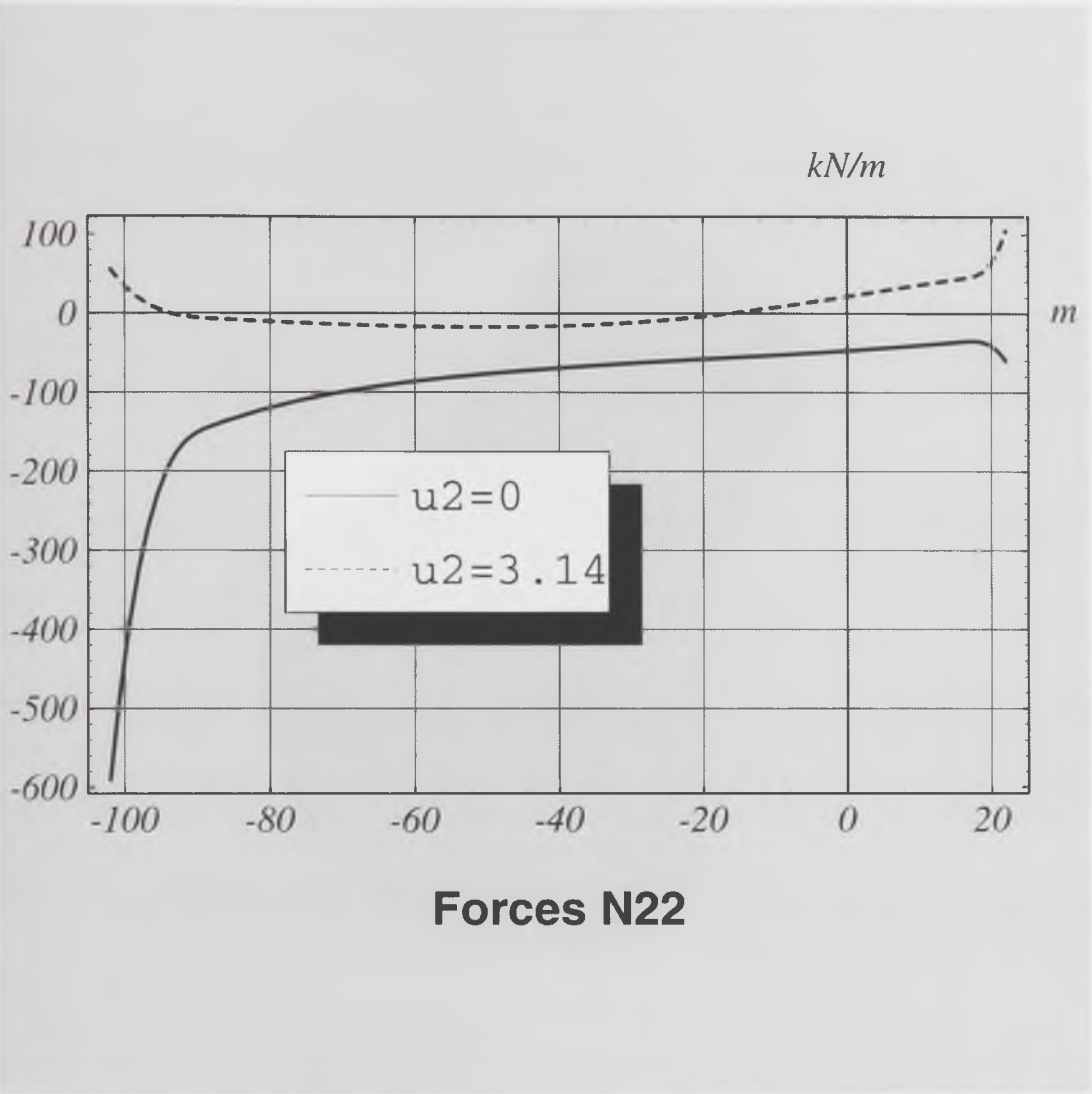
Rysunek 12.17. Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{12}^- umownego stanu błonowego dla powłoki dla anty symetrycznego obciążenia ciężarem własnym



Rysunek 12.18. Wykres ekstremalnych wartości sił N_{11} na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .

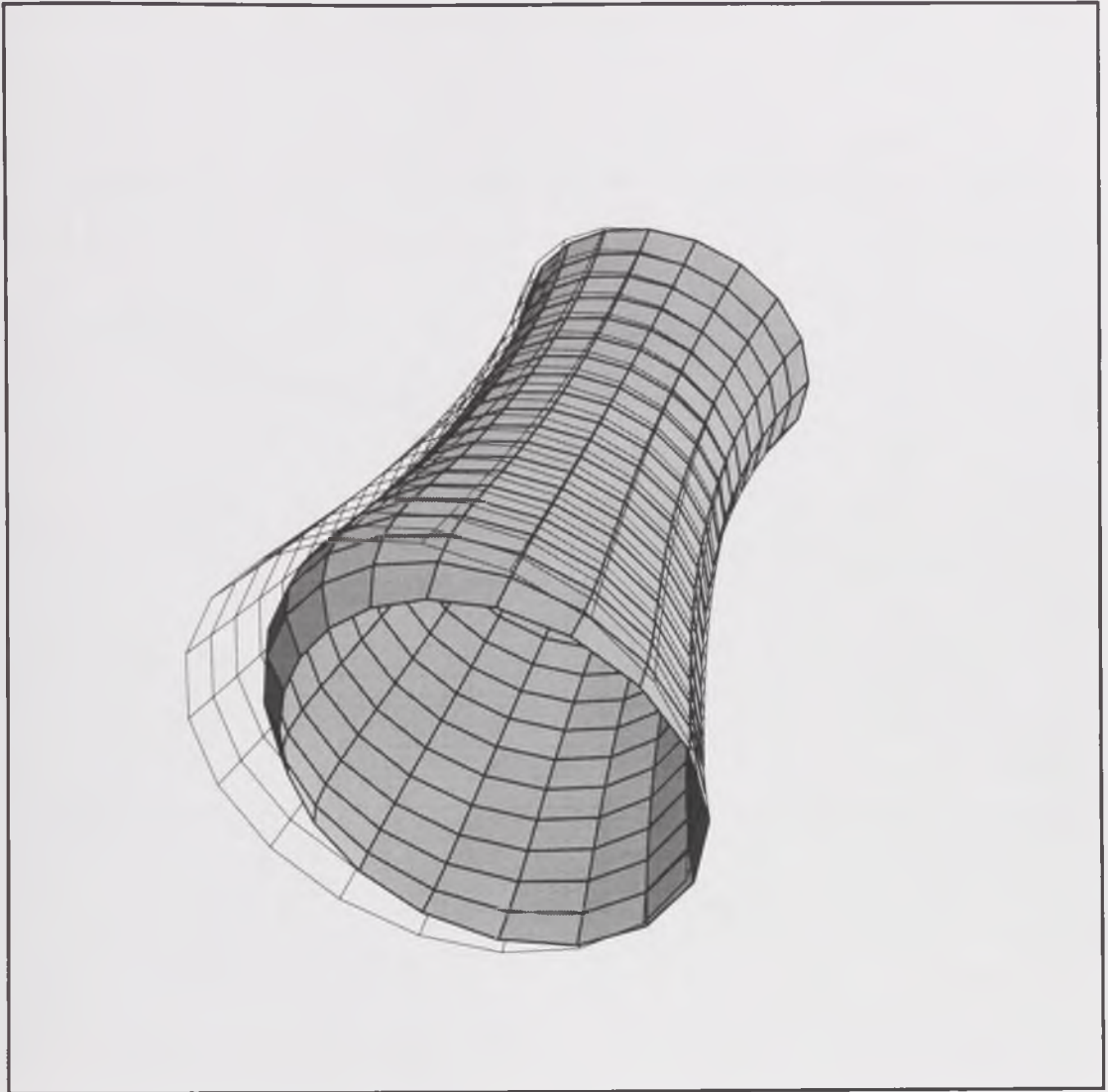


Rysunek 12.19. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{11} na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .

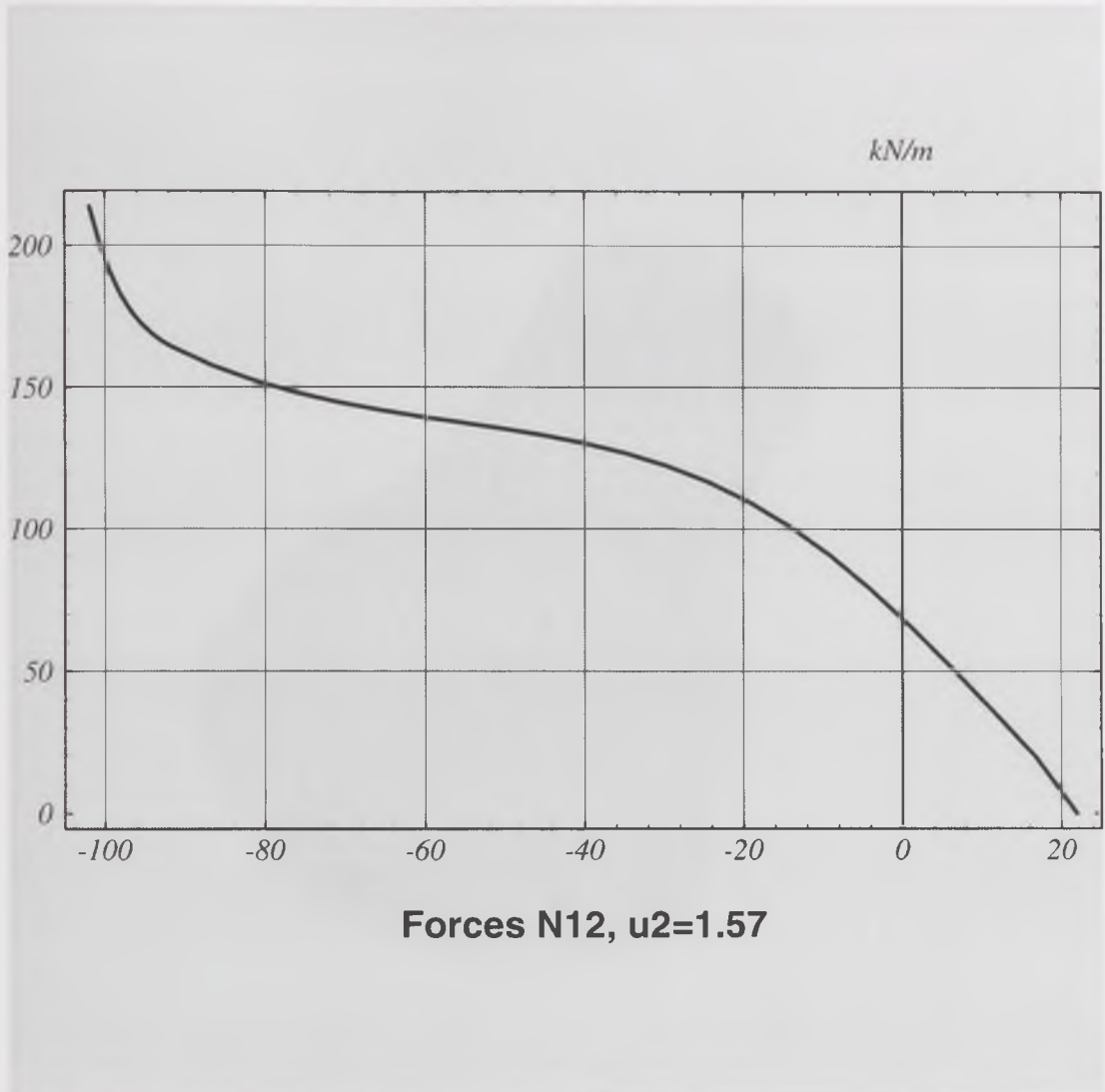


Forces N22

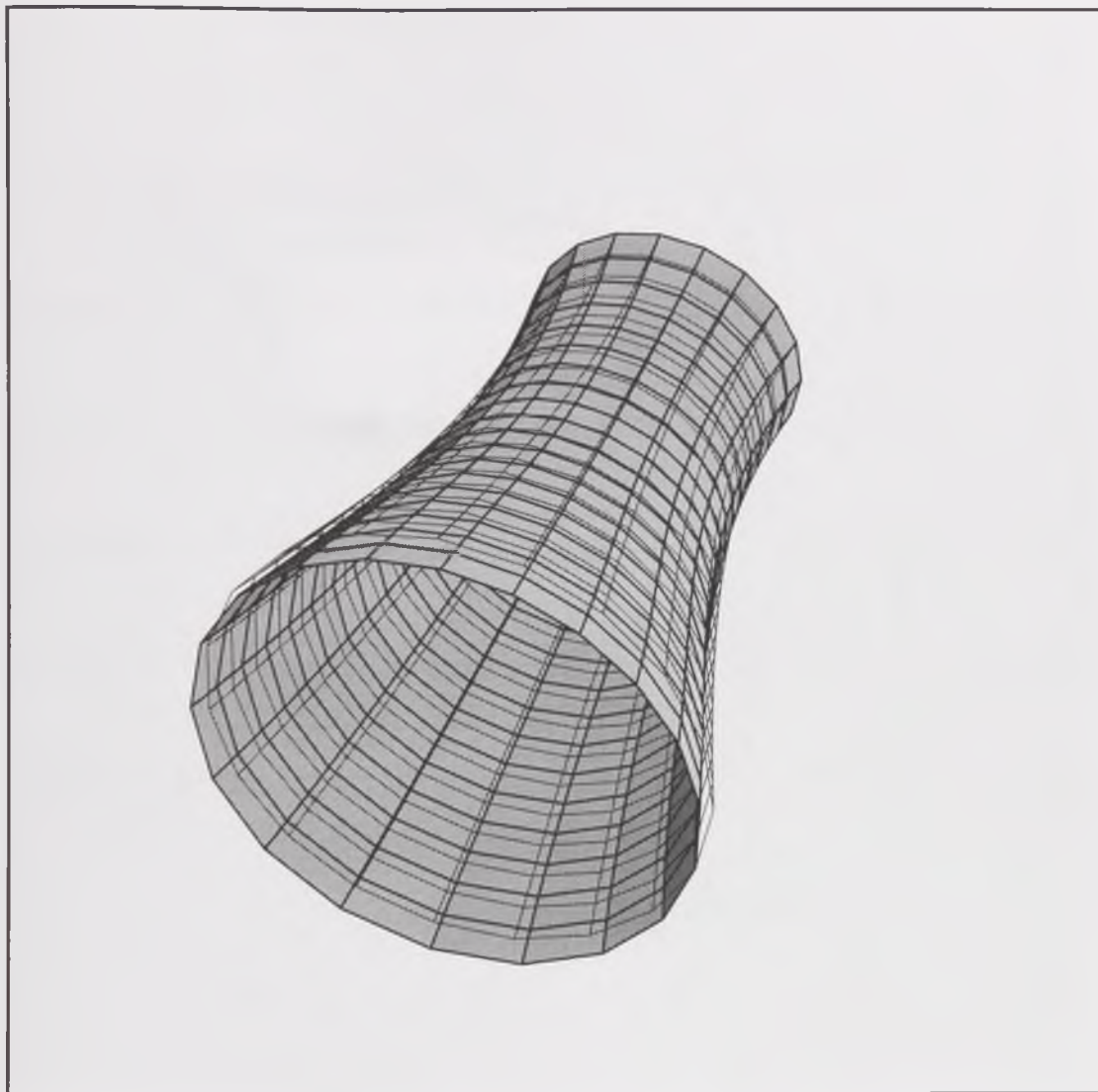
Rysunek 12.20. Wykres ekstremalnych wartości sił N_{22}^- na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



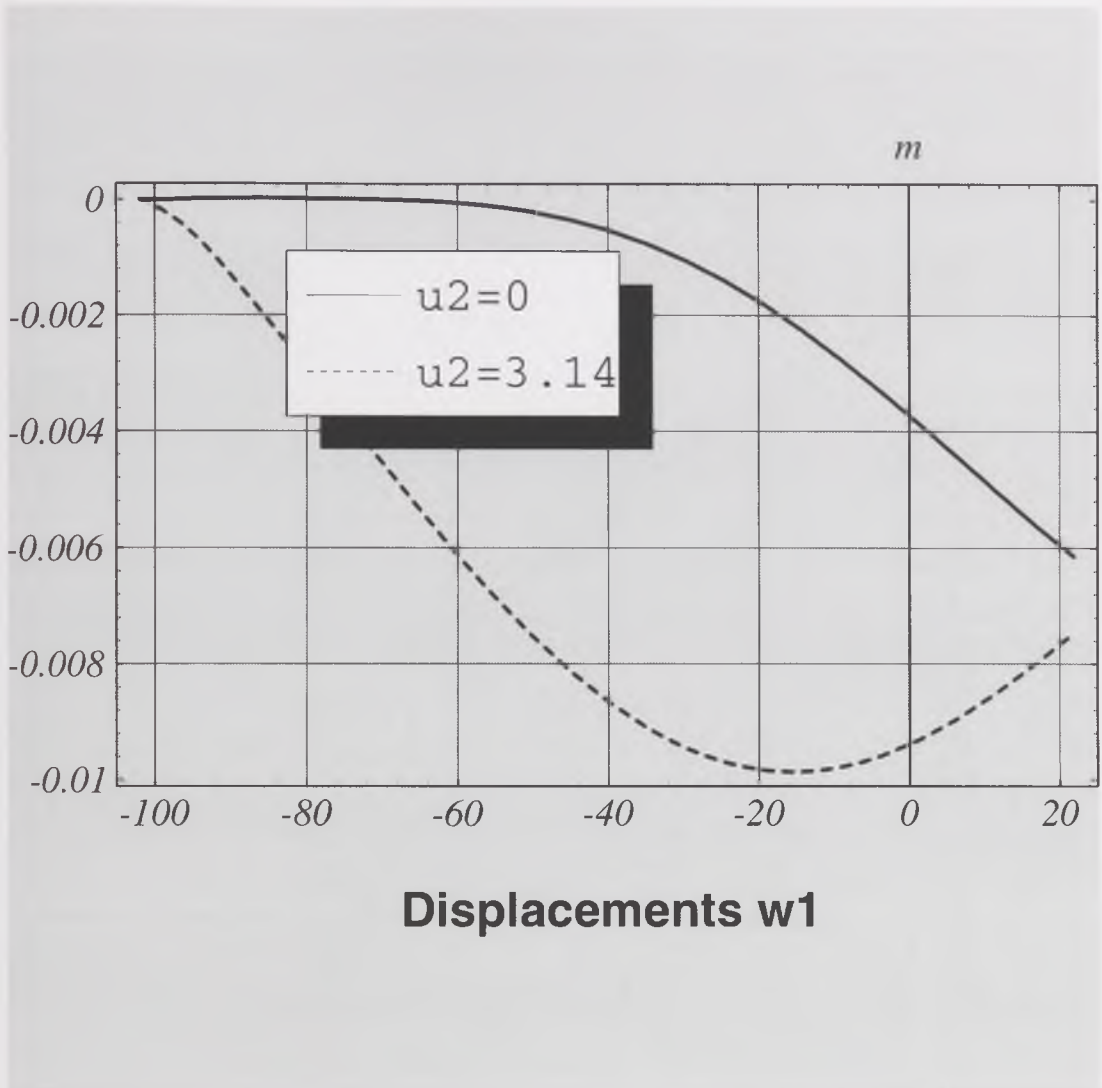
Rysunek 12.21. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{22} na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



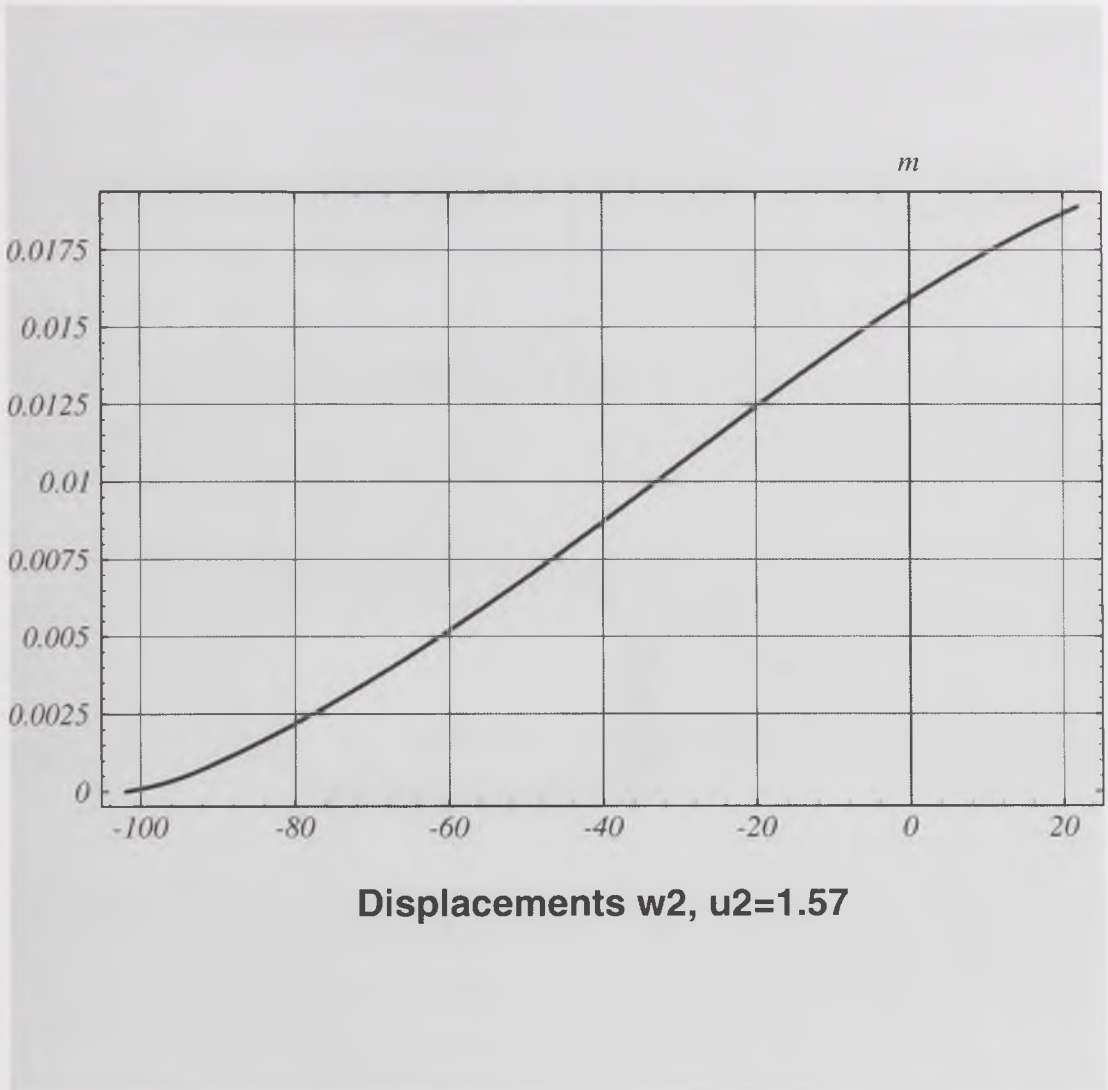
Rysunek 12.22. Wykres ekstremalnych wartości sił N_{12}^- na obwodzie powłoki w powłoce hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



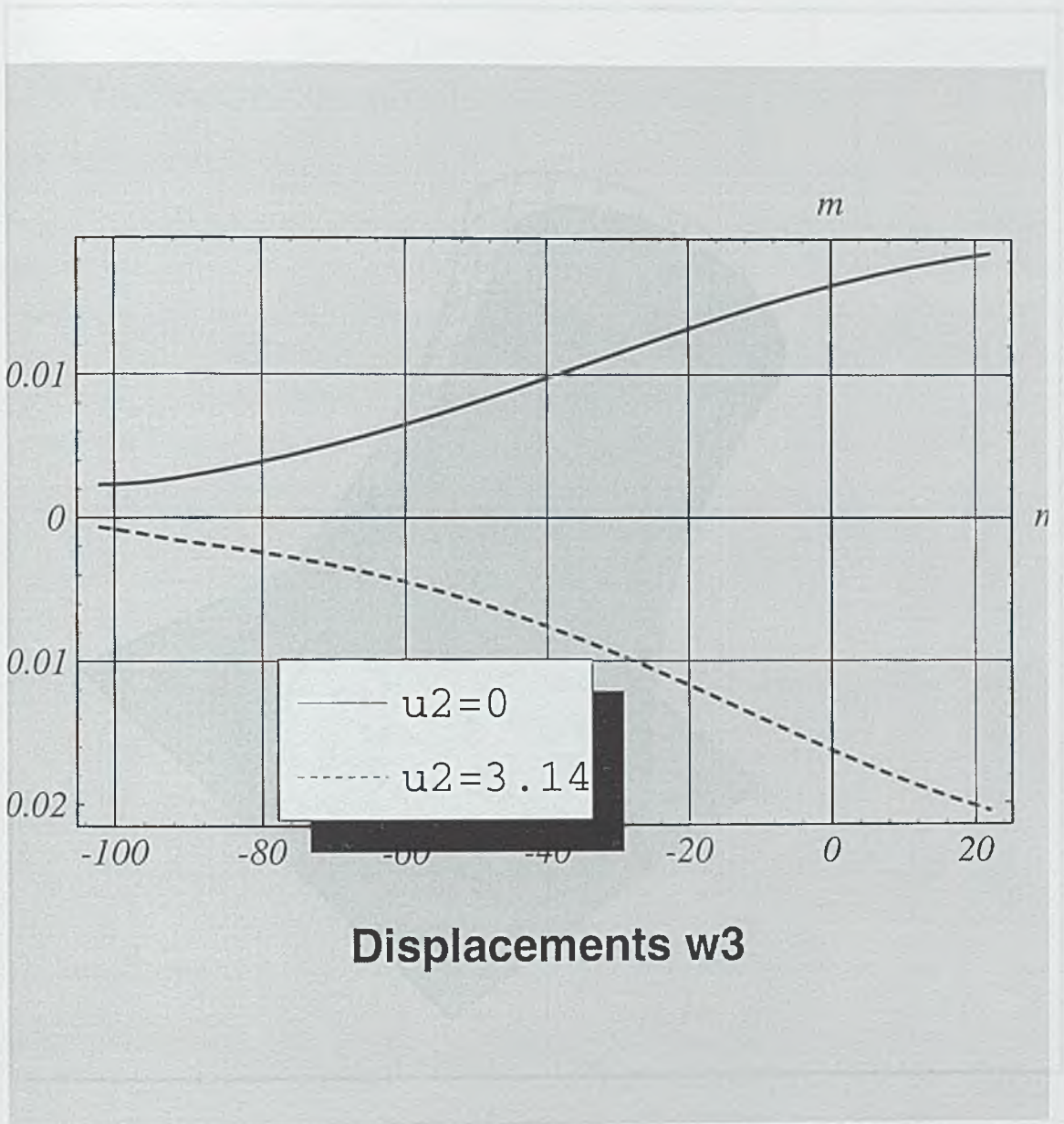
Rysunek 12.23. Przestrzenny wykres rozkładu sił N_{12}^- na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



Rysunek 12.24. Wykres ekstremalnych wartości składowych przemieszczenia \overline{w}_1 na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym wychylonej od pionu o 24.6° .

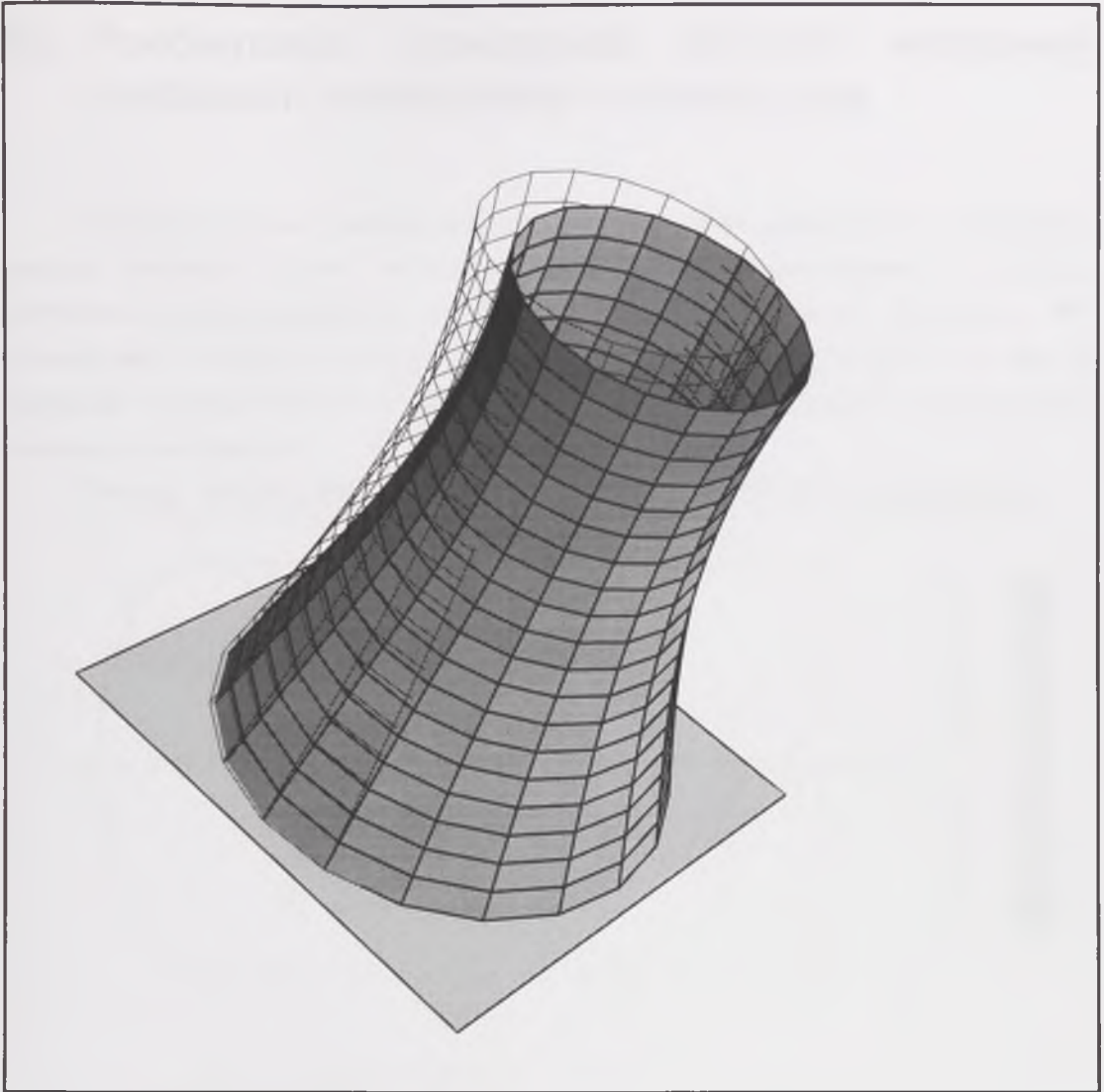


Rysunek 12.25. Wykres ekstremalnych wartości składowych przemieszczenia \bar{w}_2 na obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



Rysunek 12.26. Wykres ekstremalnych wartości składowych przemieszczenia \bar{w}_3 na

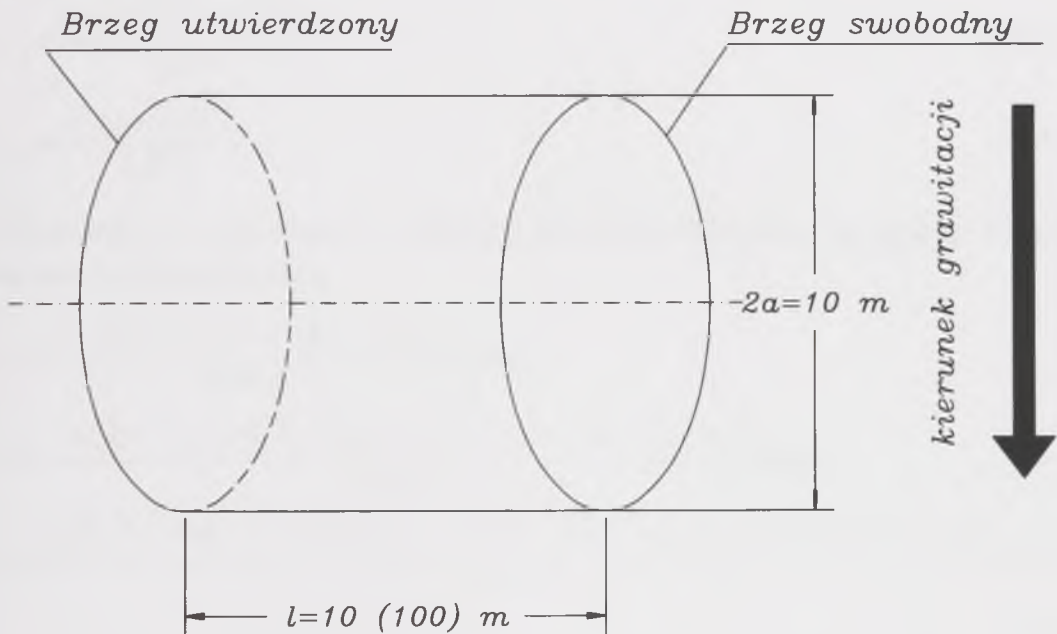
obwodzie powłoki hiperboloidalnej obciążonej ciężarem własnym - wychylonej od pionu o 24.6° .



Rysunek 12.27. Deformacja powłoki hiperboloidalnej wychylonej od pionu o 24.6° w powiększeniu 500 krotnym.

13. Porównanie rozwiązania powłoki walcowej metodami analityczną i numeryczną

Kolejny przykład poświęcimy rozwiązaniu metodą analityczną i numeryczną powłoki walcowej. Celem przykładu jest porównanie merytoryczne obu metod. Rozważania nasze ograniczymy do powłoki walcowej wychylonej od pionu o 90° utwierdzonej w miejscu podparcia i obciążonej ciężarem własnym (rys. 13.1). Jest to przypadek z punktu widzenia obliczeniowego trywialny, ale ukazujący istotne aspekty rozwiązywanych problemów.



Rys. 13.1. Szkic walca obciążonego wspornikowo ciężarem własnym

13.1. Rozwiązanie analityczne powłoki walcowej

W pierwszej kolejności zajmiemy się rozwiązaniem analitycznym. Metoda rozwiązania zadania, jak to zostało wcześniej określone, składa się z dwóch etapów: całki szczególnej zwanej umownym stanem błonowym oraz całki ogólnej zwanej w uproszczeniu stanem zgięciowym.

Z rozwiązania całki szczególnej zadania otrzymujemy dla powłoki wychylonej od pionu o 90° (wspornikowo) następujące wzory na siły przekrojowe stanu błonowego:

$$\bar{N}^{11} = \frac{q(l-u')^2}{a} \cos(u^2), \quad (13.1)$$

$$\bar{N}^{12} = \frac{2q(l-u')}{a} \sin(u^2), \quad (13.2)$$

$$\bar{N}^{22} = \frac{-q}{a} \cos(u^2). \quad (13.3)$$

Obliczając z kolei składowe tensora odkształcenia błonowego ze wzorów:

$$\gamma_{11} = \frac{\bar{N}^{11} - a^2 \nu \bar{N}^{22}}{2 E h}, \quad (13.4)$$

$$\gamma_{22} = \frac{a^2(a^2 \bar{N}^{22} - \nu \bar{N}^{11})}{2 E h}, \quad (13.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{a^2(1+\nu) \bar{N}^{12}}{2 E h}, \quad (13.6)$$

otrzymujemy po scałkowaniu i odpowiednich przekształceniach następujący komplet wzorów na przemieszczenia:

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= \frac{q u' \left[(u')^2 - 3 l u' + 3(a^2 \nu + l^2) \right]}{6 E h a} \cos(u^2), \\ \bar{w}^2 &= \frac{q u' \left\{ (u')^3 - 4 l (u')^2 - 6 [a^2(3\nu + 4) - l^2] u' + 48 a^2 l (1+\nu) \right\}}{24 E h a^3} \sin(u^2), \\ \bar{w}^3 &= \frac{q \left\{ (u')^4 - 4 l (u')^3 - 6 [a^2(\nu + 4) - l^2] (u')^2 + 24 a^2 l (2+\nu) u' + 12 a^2 (a^2 + l^2 \nu) \right\}}{24 E h a^2} \cos(u^2). \end{aligned} \quad (13.7)$$

W zakresie rozwiązania całki szczególnej nie spełniamy warunku dla przemieszczenia w^3 i obrotu d^1 na brzegu utwierdzonym.

$$\bar{w}^3(u' = 0) = \frac{-q(a^2 + l^2 \nu)}{2 E h} \cos(u^2), \quad (13.8)$$

$$\bar{w}^3,1(u' = 0) = d^1(u' = 0) = \frac{q l (2+\nu)}{E h} \cos(u^2).$$

Końcowe rozwiązanie otrzymujemy dobierając tak stałe całkowania szeregu hipertrygonometrycznego będącego rozwiązaniem całki ogólnej zadania, aby łączne rozwiązanie:

$$w^3 = \bar{w}^3 + \hat{w}^3, \quad (13.9)$$

spełniało warunki brzegowe na brzegu utwierdzonym.

Odpowiednie wielkości rozwiązania całki ogólnej zostały przedstawione w rozdziale 7 i 9. Nie będziemy ich ponownie przytaczać.

W przedstawionym rozwiązaniu analitycznym zaniebano spełnienia warunku wyzerowania siły poprzecznej na brzegu swobodnym. Wielkość tej siły jest znikoma w porównaniu z wartością tej siły na brzegu utwierdzonym i jest nieistotna z uwagi na wymiarowanie.

13.2. Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego

Powyższe rozwiązanie porównamy z rozwiązaniem numerycznym wykonanym dla identycznych danych. Porównania dokonamy na przykładach.

Do obliczeń przyjęto dane:

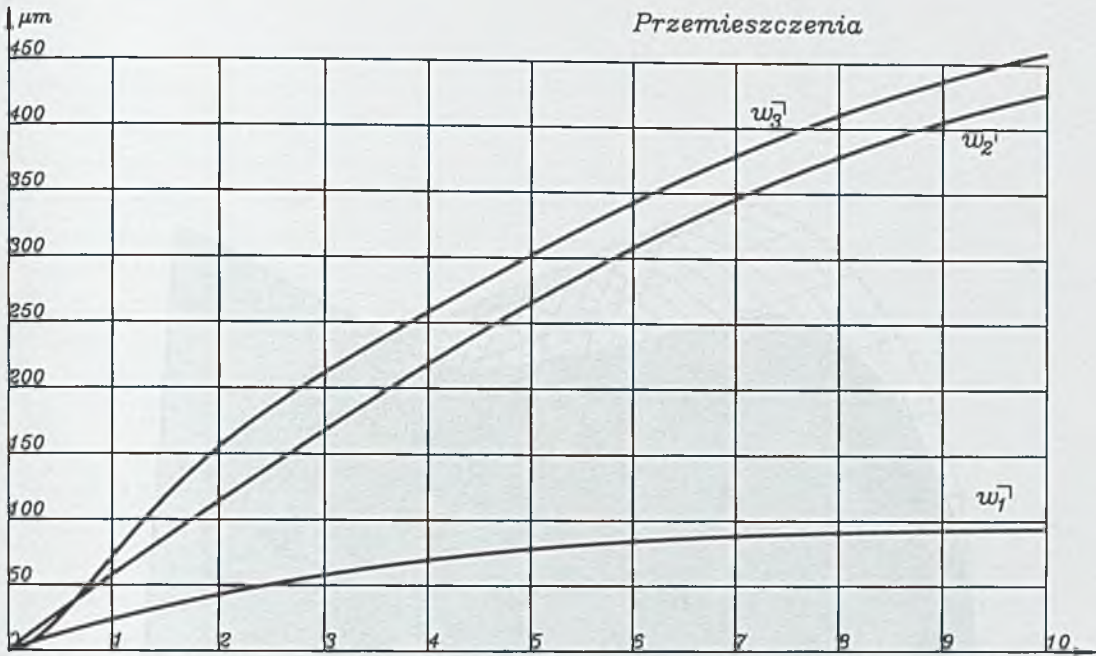
Moduł Younga	$E=19.6 \text{ GPa}$
Współczynnik Poissona	$\nu=1/6$
Gęstość materiału	$\gamma=24.5 \text{ kN/m}^3$
promień walca	$a=5 \text{ m}$
grubość powłoki	$2h=0.25 \text{ m}$
podział na przedziały (dla rozwiązania numerycznego)	330

Obliczenia wykonano w dwóch wariantach długości powłoki:

1 wariant	$l=10 \text{ m}$
2 wariant	$l=100 \text{ m}$

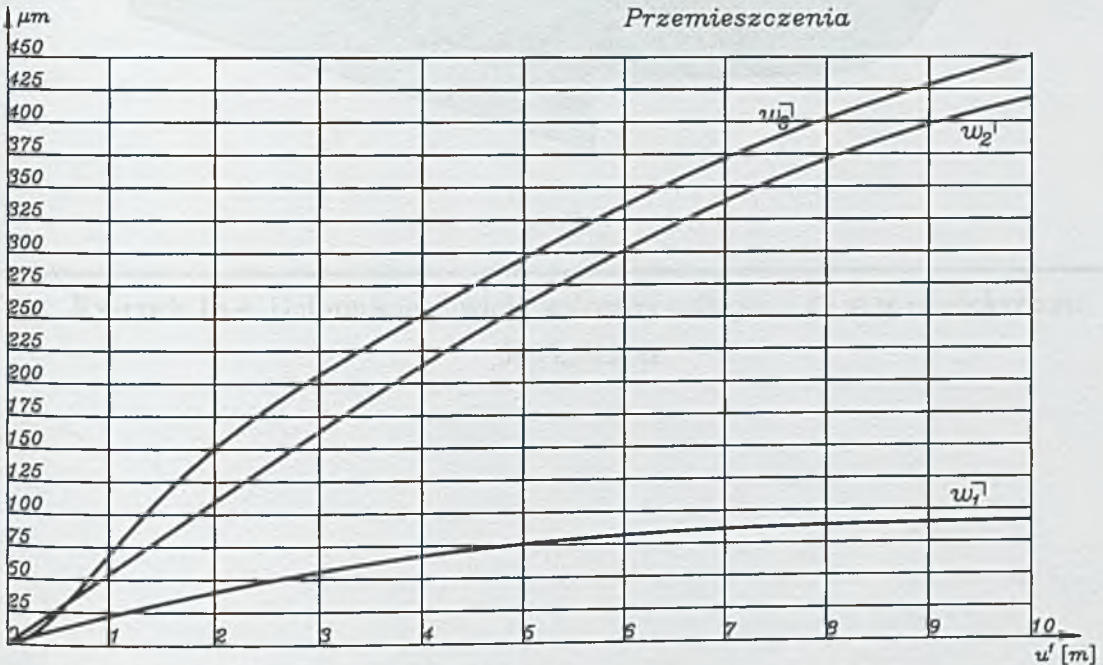
Wyniki przedstawiono na załączonych wykresach (Rys. 13.2 - 13.29). Wykresy te dla lepszej orientacji przy porównywaniu wyników obu metod zestawiono parami: u góry rozwiązanie analityczne u dołu numeryczne. Na wykresach zaprezentowano jedynie wielkości ekstremalne na obwodzie powłoki. Należy je przemnożyć zgodnie ze wzorami (10.15) do (10.20) aby otrzymać wartości w dowolnym punkcie powłoki, przyjmując $\alpha=90^\circ$. W celu lepszej orientacji odpowiednie wielkości dla powłoki o długości 10 m przedstawiono w postaci wykresów przestrzennych. Dla powłoki o długości 100 m przedstawiono jedynie przestrzenny wykres pola przemieszczeń. Pozostałe wielkości mają rozkład na obwodzie powłoki analogicznie jak dla powłoki o długości 10 m.

Rozwiązanie analityczne

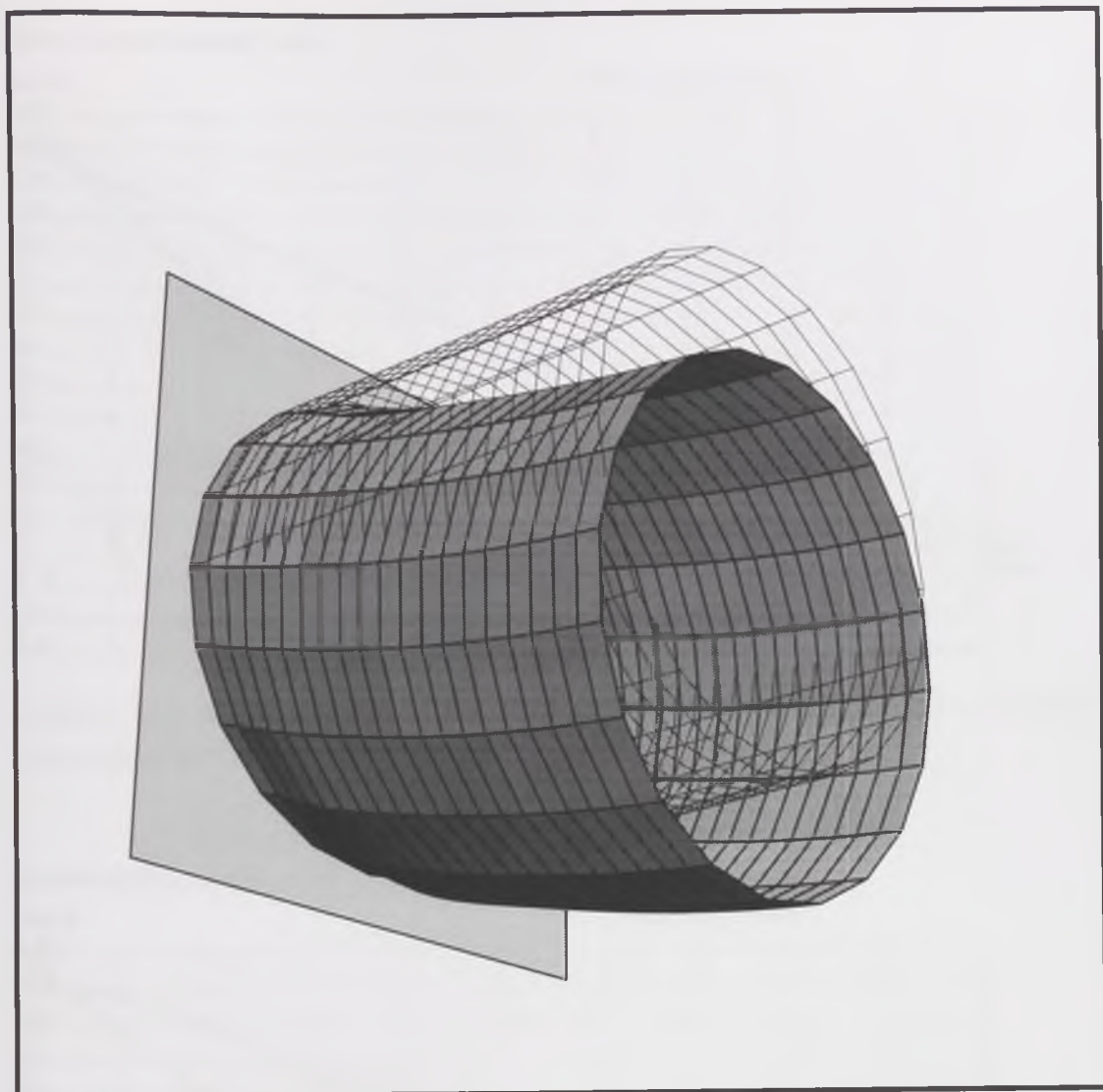


Rysunek 13.2. Przemieszczenia fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie numeryczne

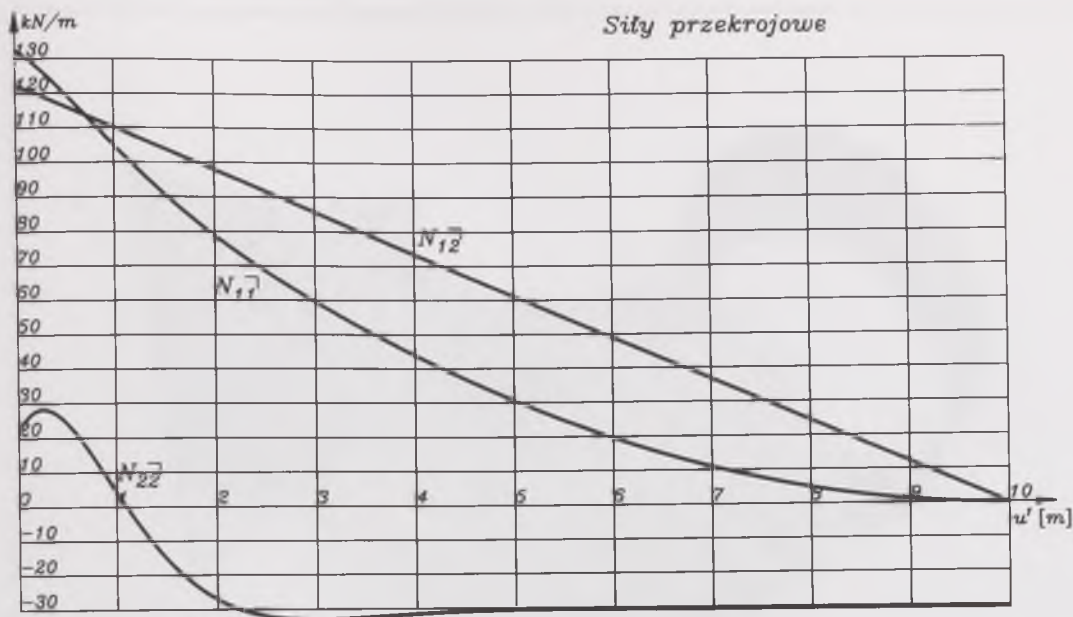


Rysunek 13.3. Przemieszczenia fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.



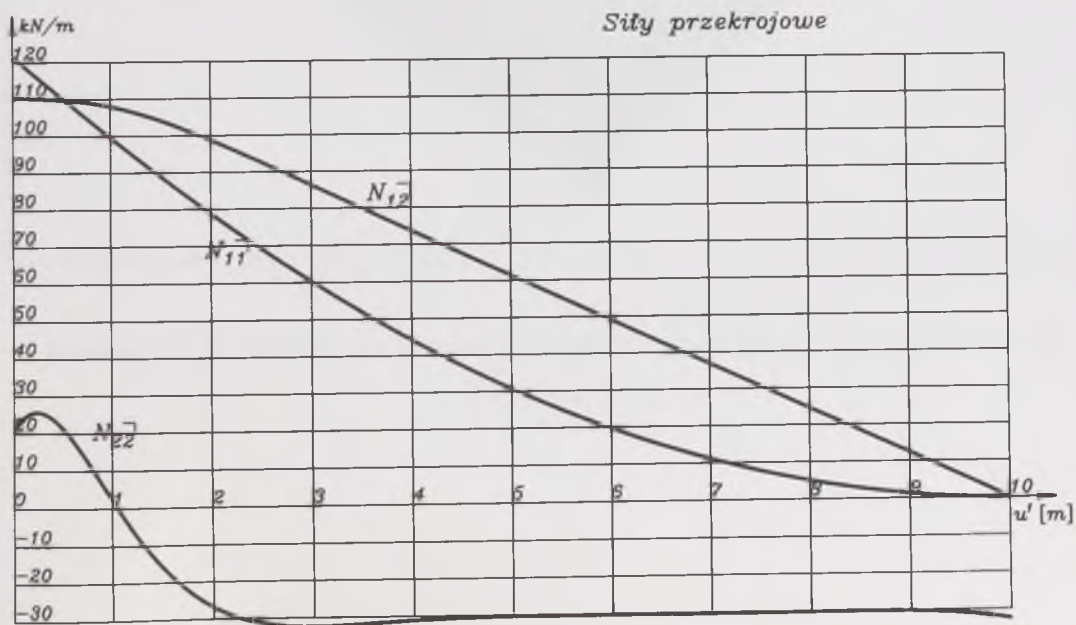
Rysunek 13.4. Deformacja powłoki walcowej o długości 10 m w powiększeniu 500 krotnym.

Rozwiązanie analityczne

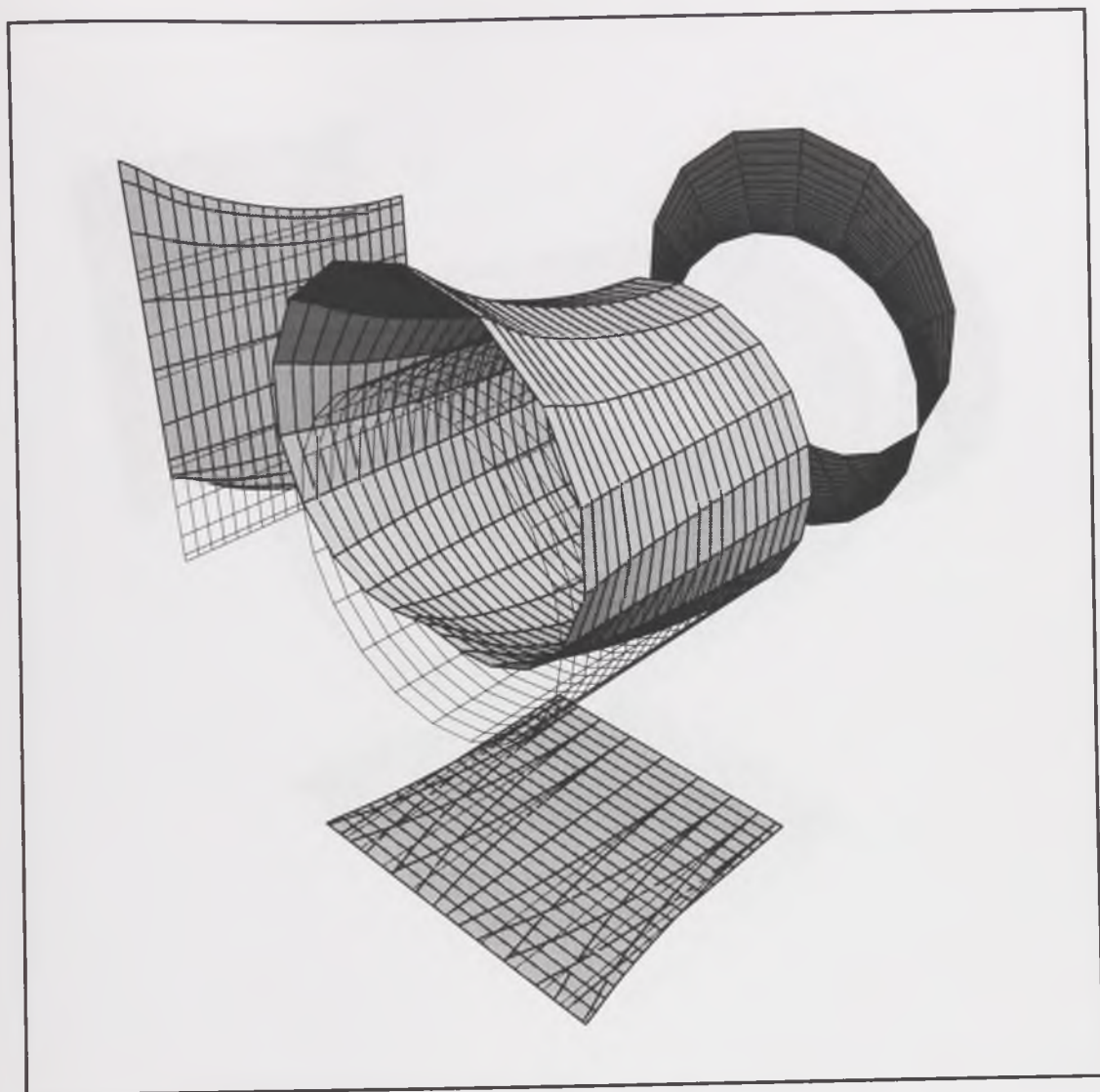


Rysunek 13.6. Siły przekrojowe fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

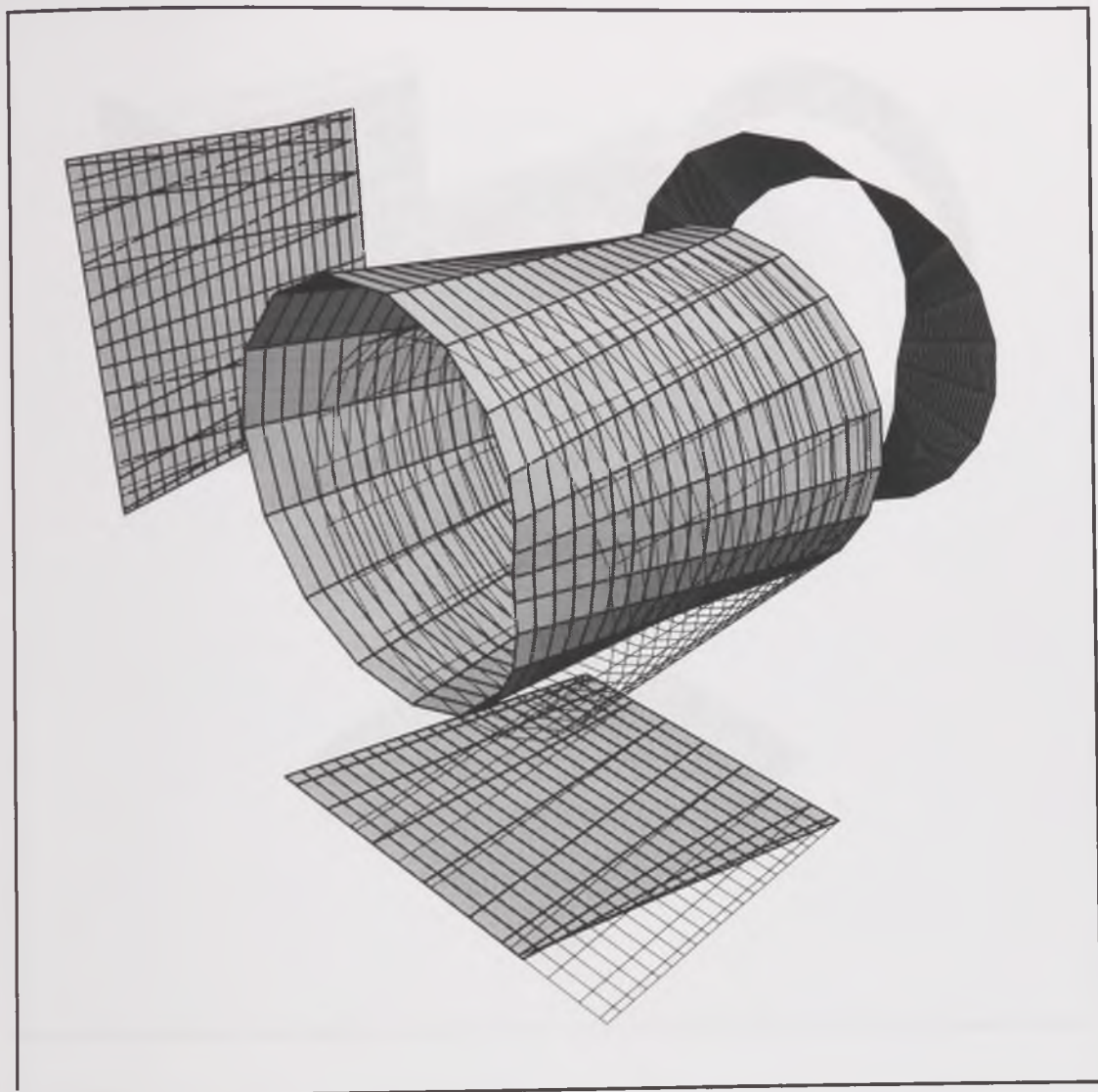
Rozwiązanie numeryczne



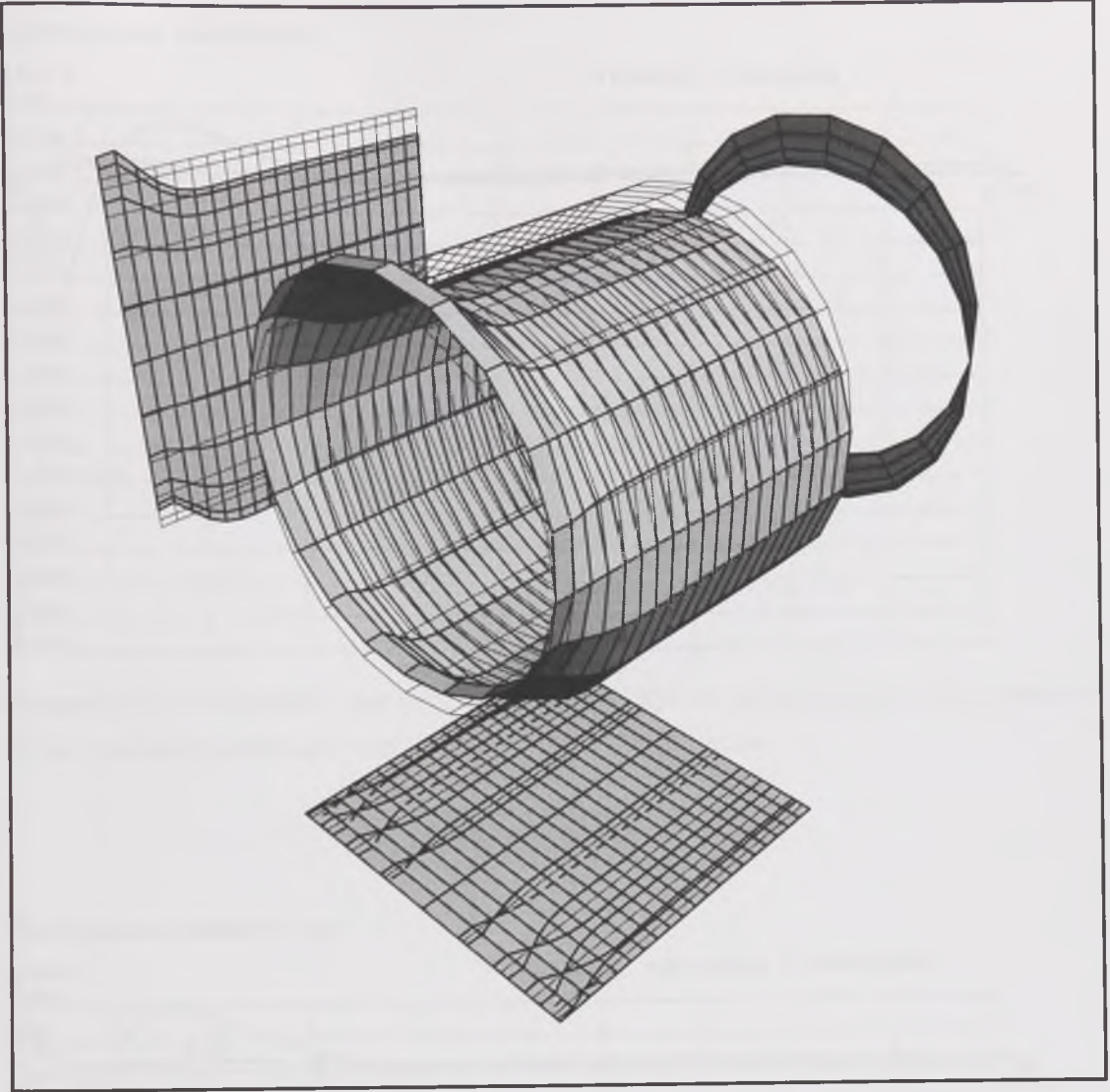
Rysunek 13.7. Siły przekrojowe fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.



Rysunek 13.8. Rozkład siły przekrojowej (południkowej) N_{\parallel} w powłoce walcowej o długości 10 m.

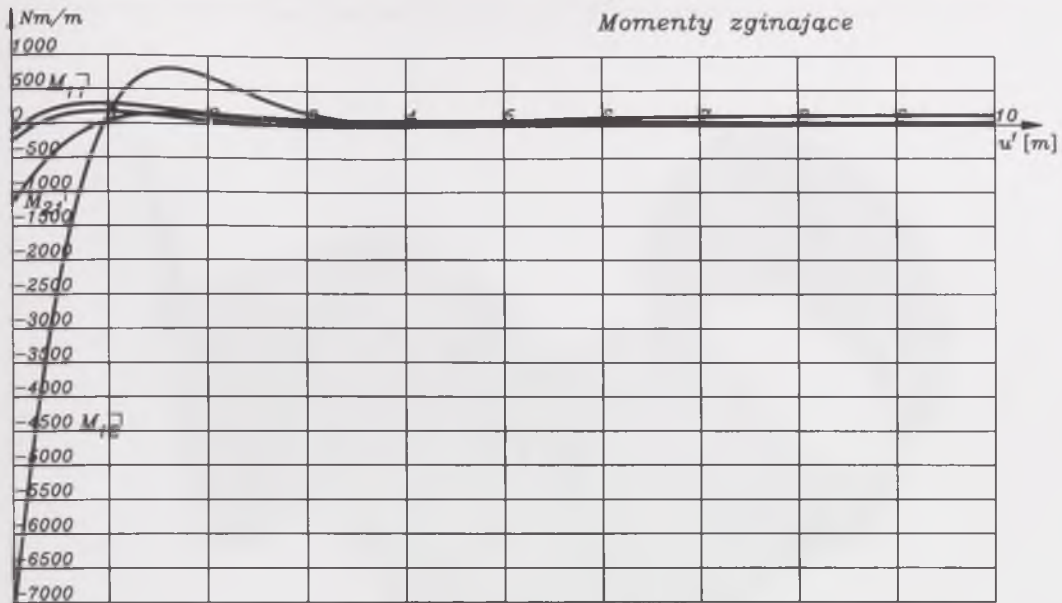


Rysunek 13.9. Rozkład siły przekrojowej (ścinającej) N_{12} w powłoce walcowej o długości 10 m.



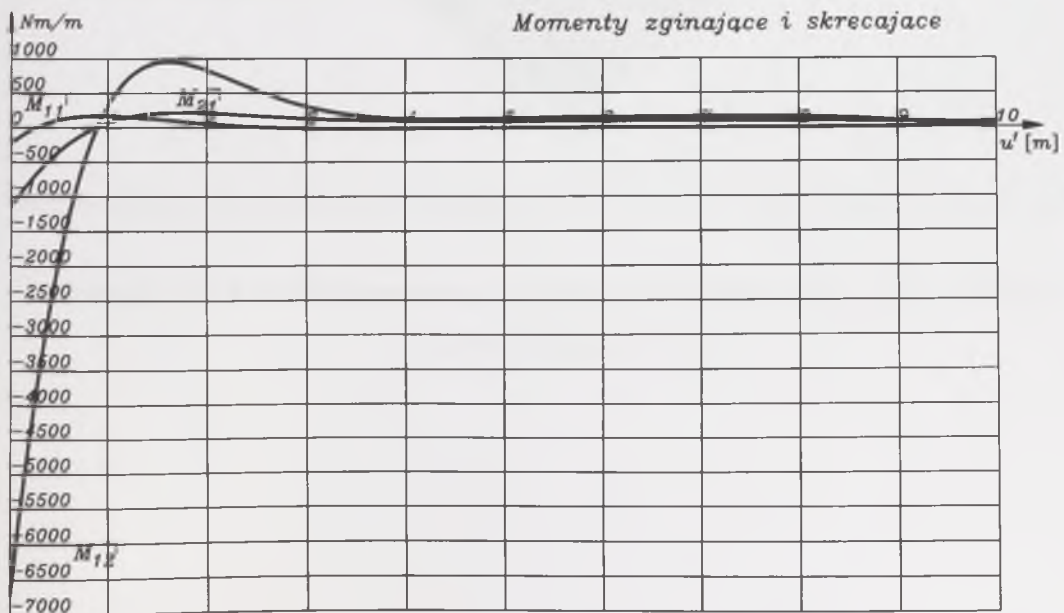
Rysunek 13.10. Rozkład siły przekrojowej (równoleżnikowej) N_{22} w powłoce walcowej o długości 10 m.

Rozwiązanie analityczne

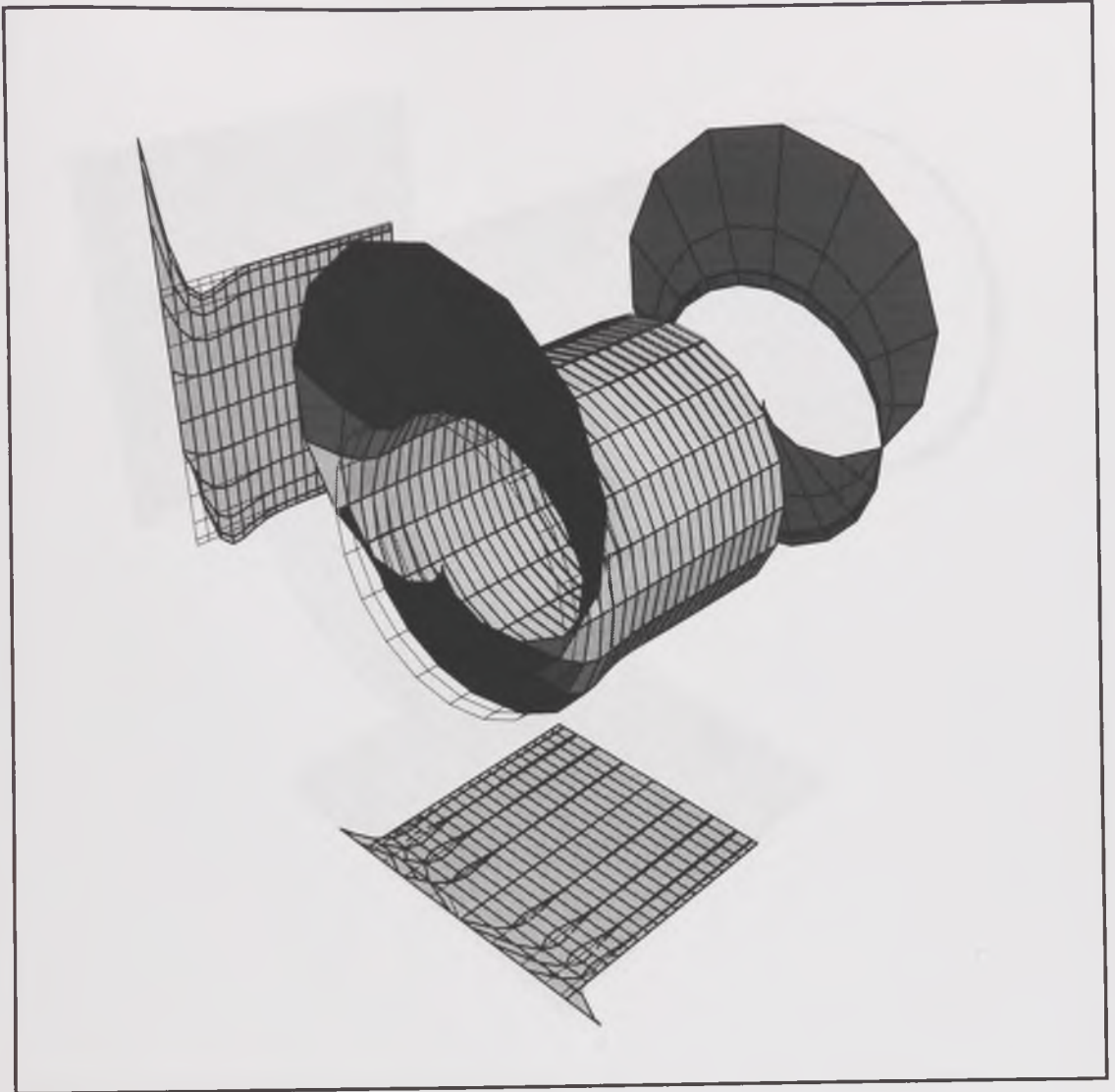


Rysunek 13.11. Momenty zginające i skręcające fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

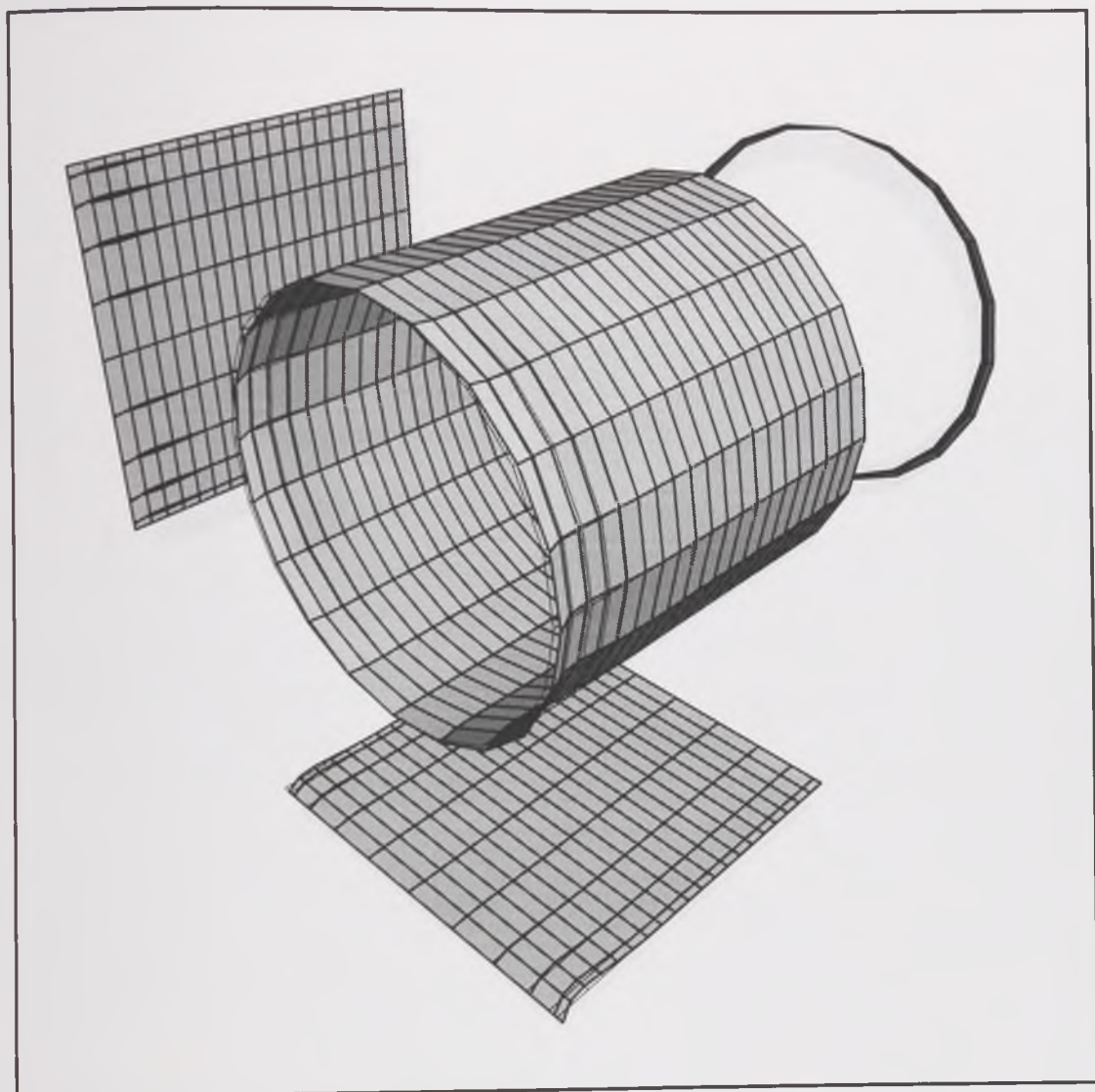
Rozwiązanie numeryczne



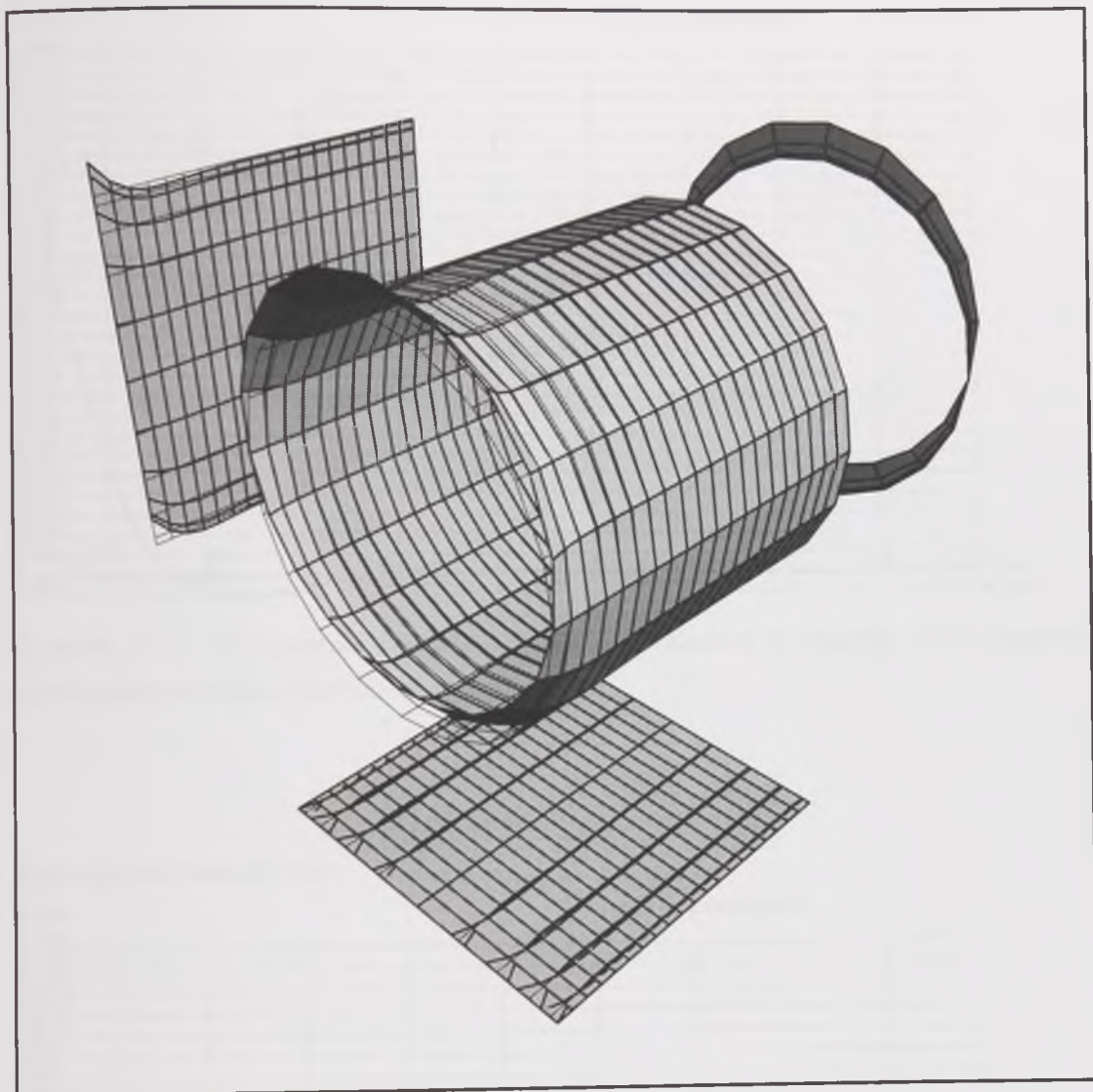
Rysunek 13.12. Momenty zginające i skręcające fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.



Rysunek 13.13. Rozkład momentu zginającego (południkowego) M_{12}^+ w powłoce walcowej o długości 10 m.

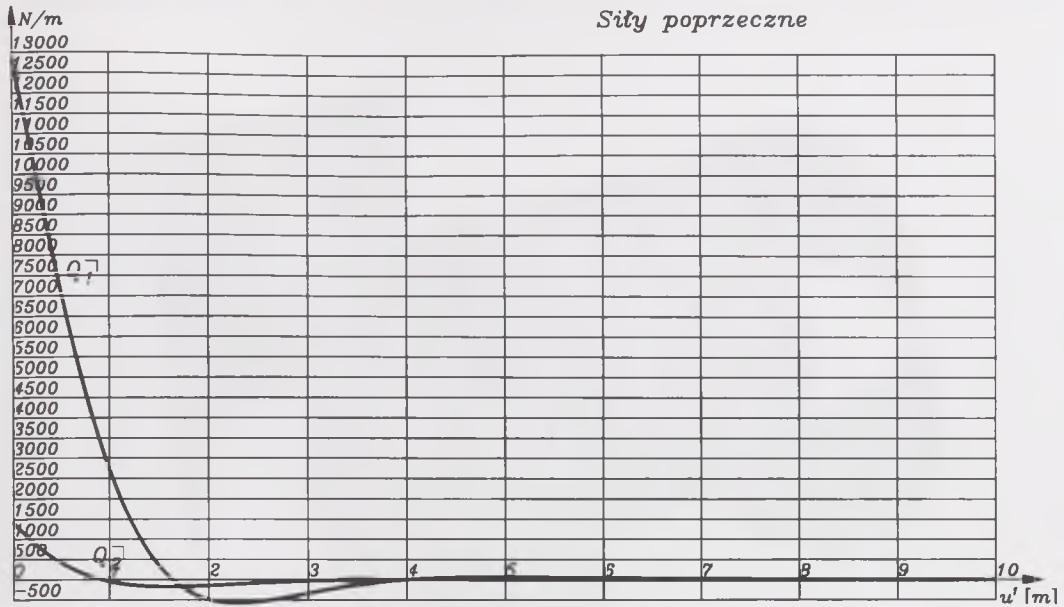


Rysunek 13.14. Rozkład momentu skręcającego M_{τ}^{\square} w powłoce walcowej o długości 10 m.



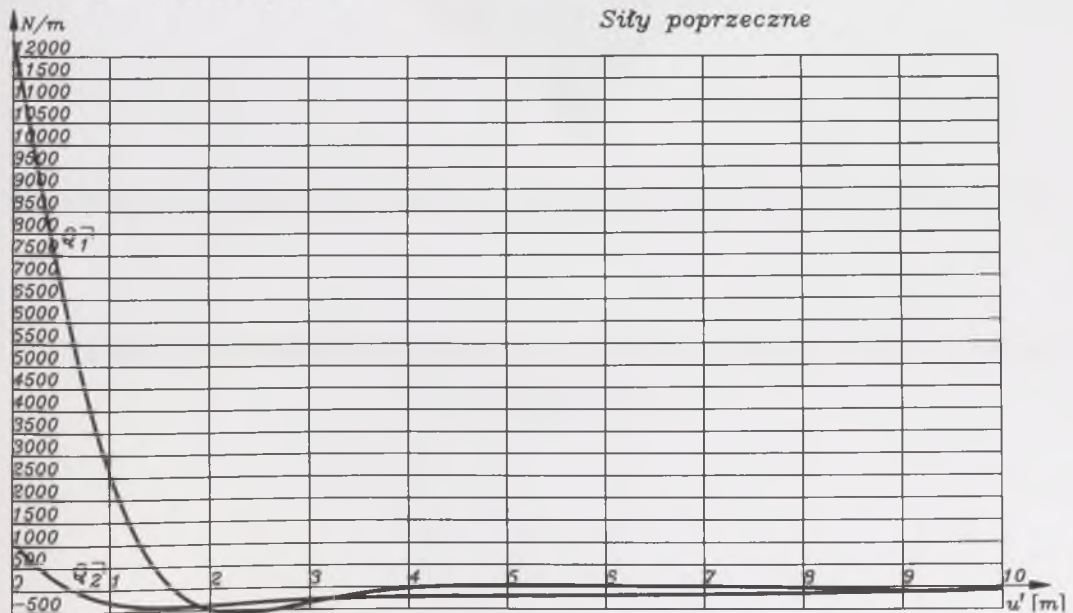
Rysunek 13.15. Rozkład momentu zginającego (równoleżnikowego) M_{21}^- w powłoce walcowej o długości 10 m.

Rozwiązanie analityczne

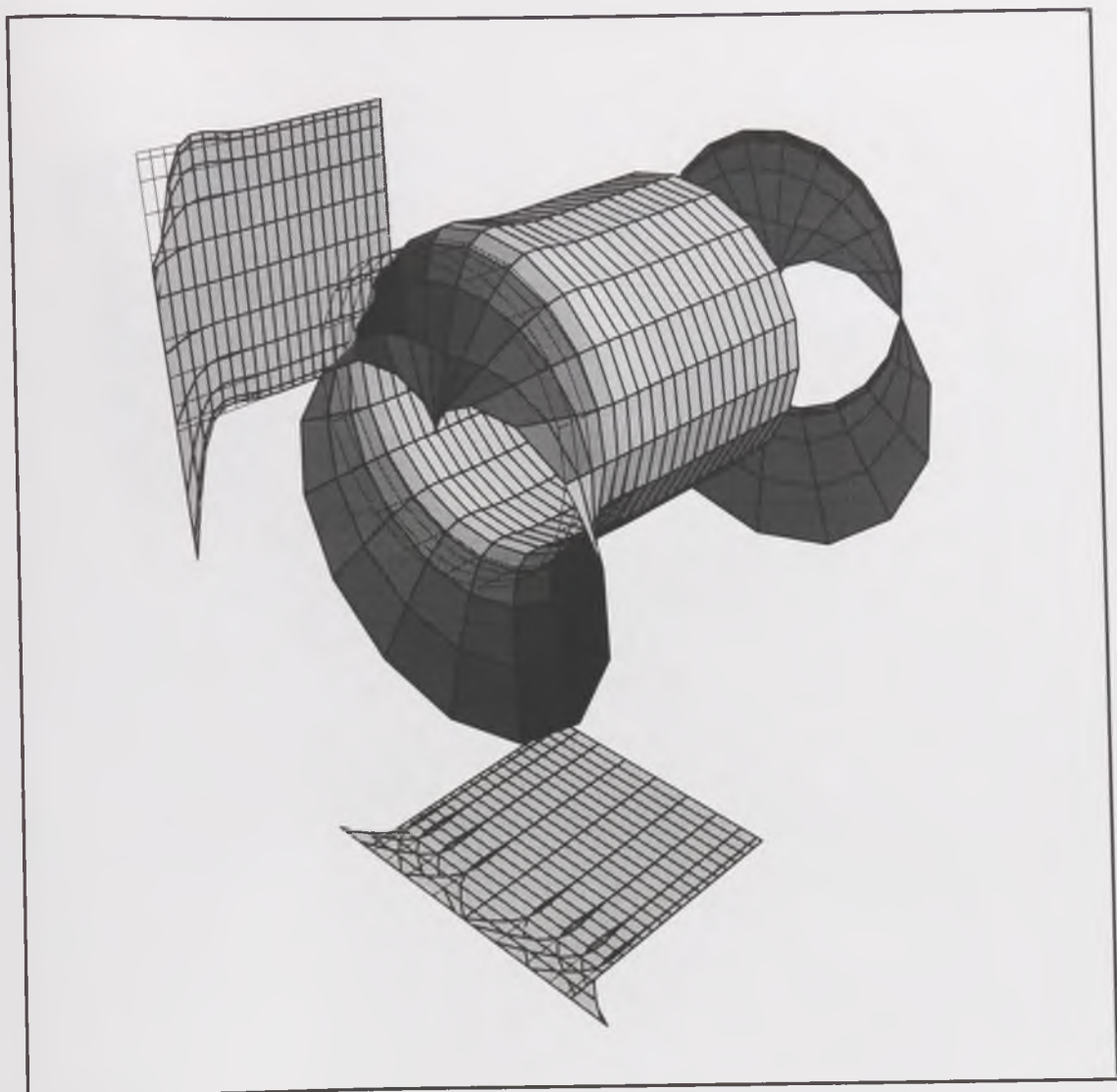


Rysunek 13.16. Siły poprzeczne fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

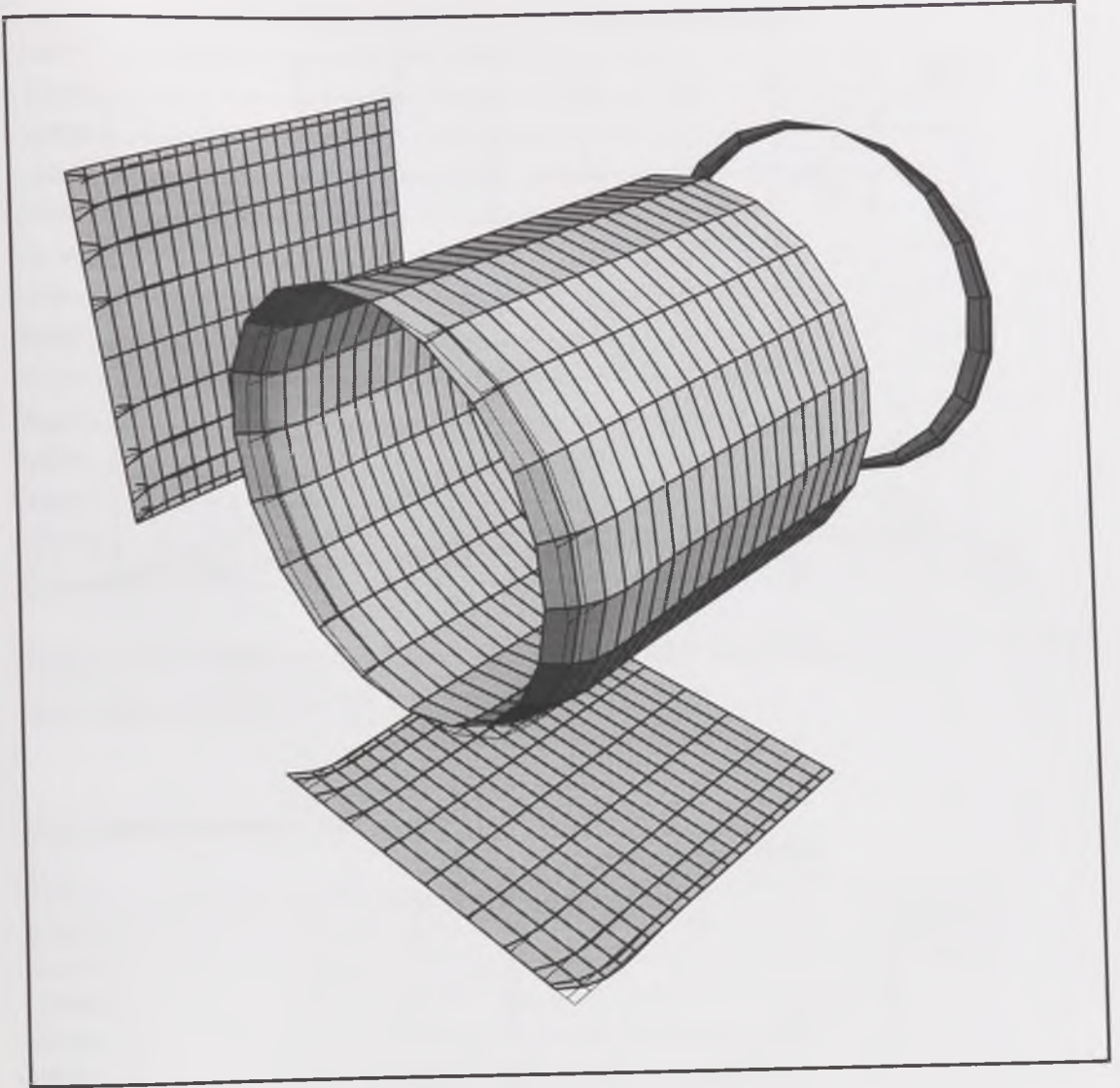
Rozwiązanie numeryczne



Rysunek 13.17. Siły poprzeczne fizyczne powłoki walcowej o długości 10 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.

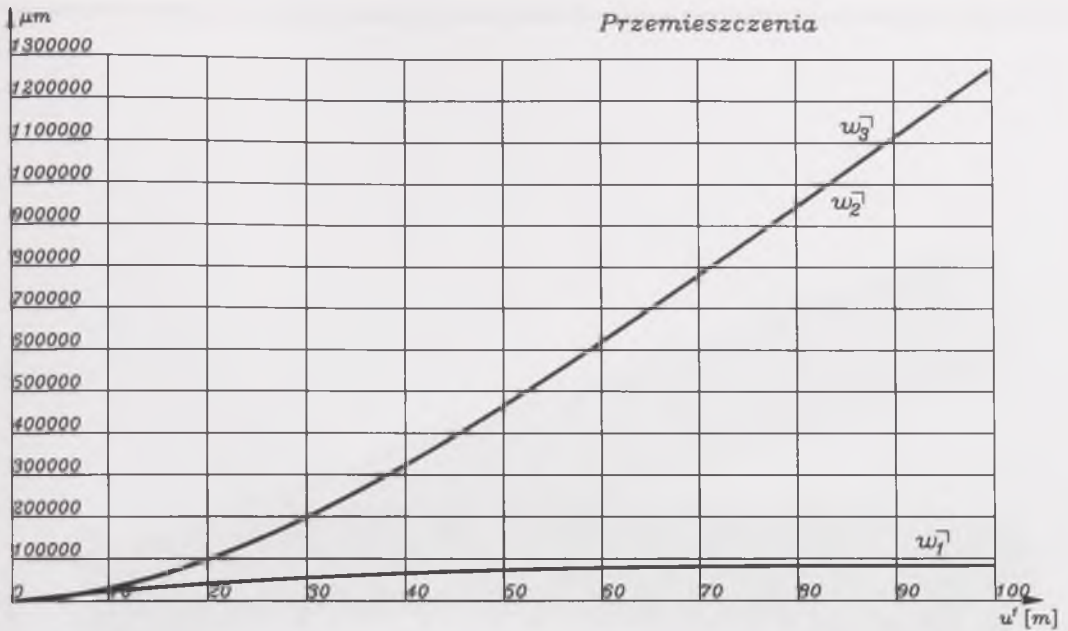


Rysunek 13.18. Rozkład siły poprzecznej (południkowej) Q_l w powłoce walcowej o długości 10 m.



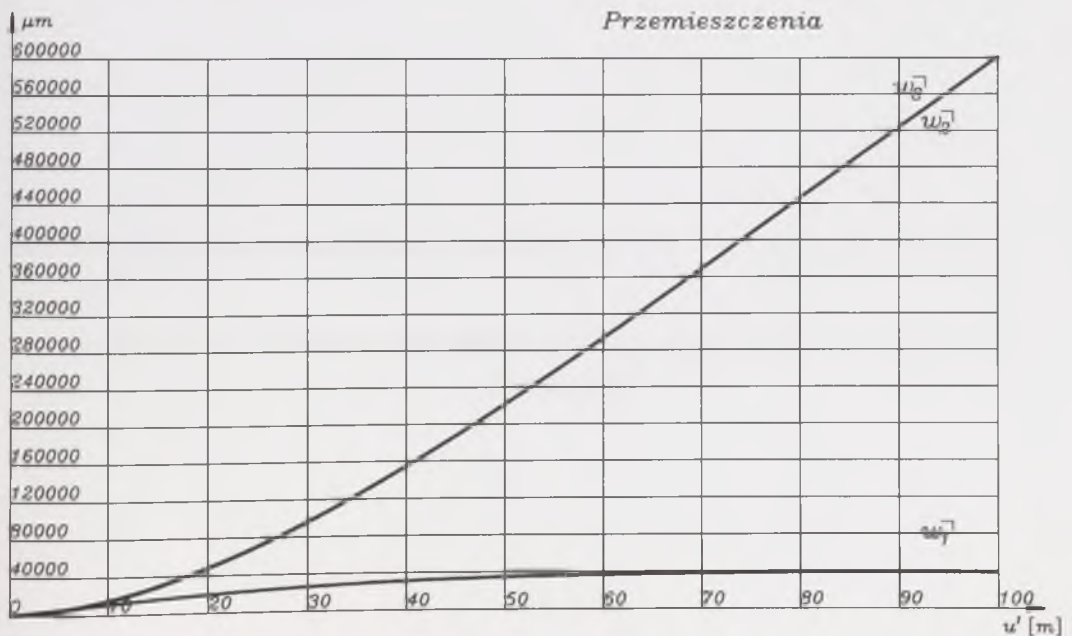
Rysunek 13.19 Rozkład siły poprzecznej (równoleżnikowej) Q_2^{\rightarrow} w powłoce walcowej o długości 10 m.

Rozwiązanie analityczne

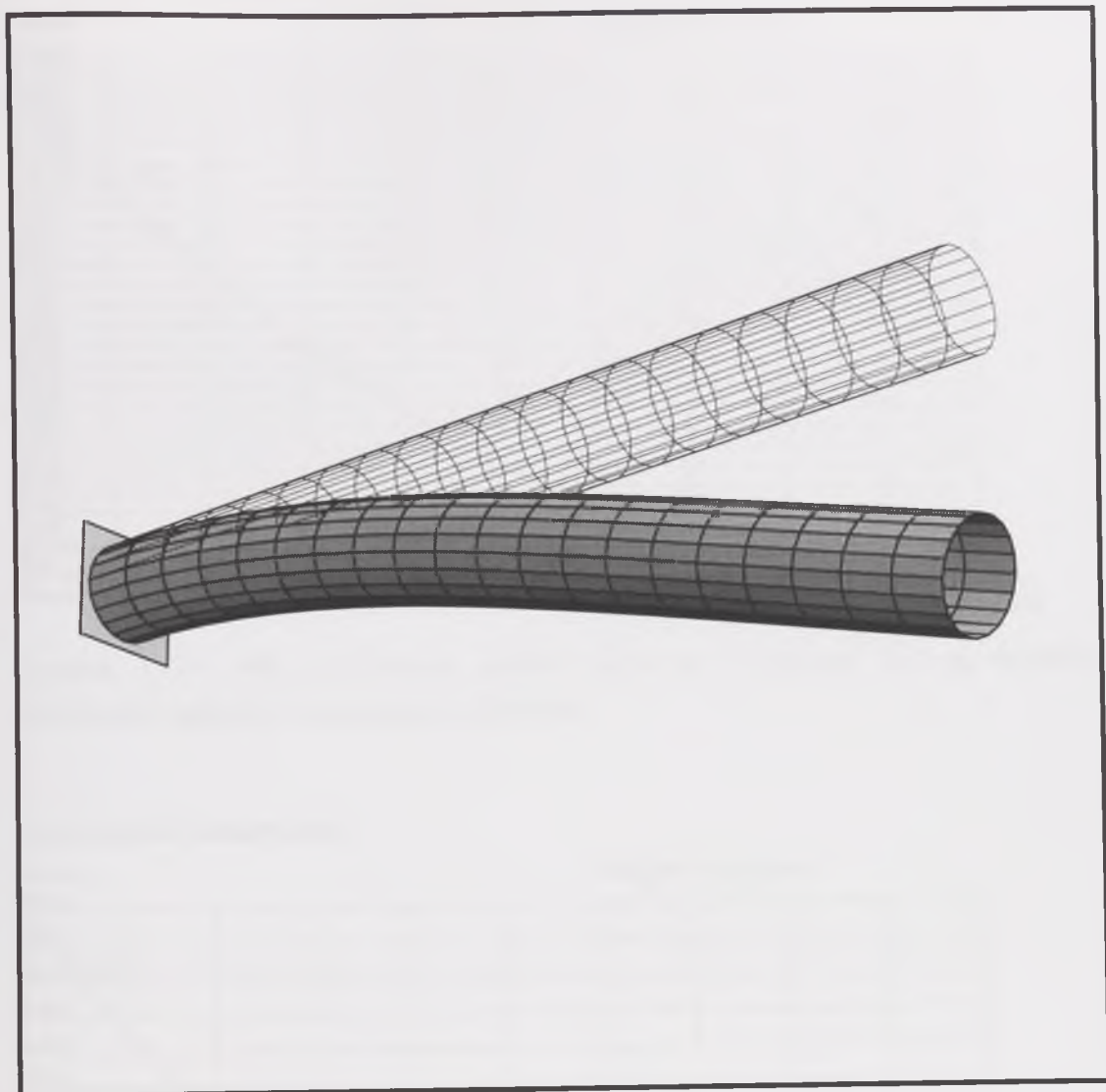


Rysunek 13.20. Przemieszczenia fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie numeryczne

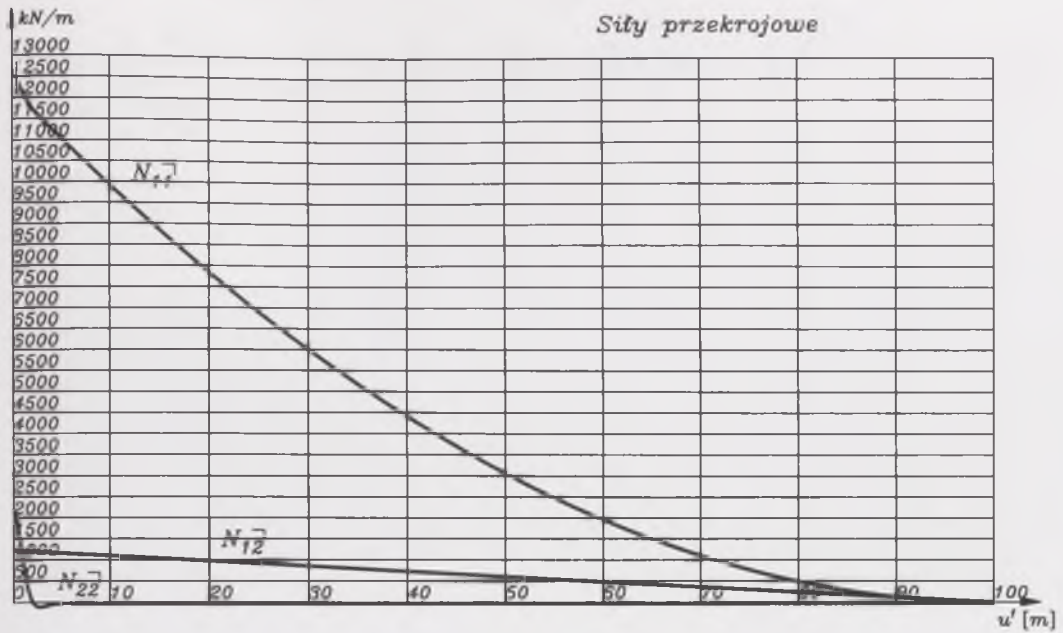


Rysunek 13.21. Przemieszczenia fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.



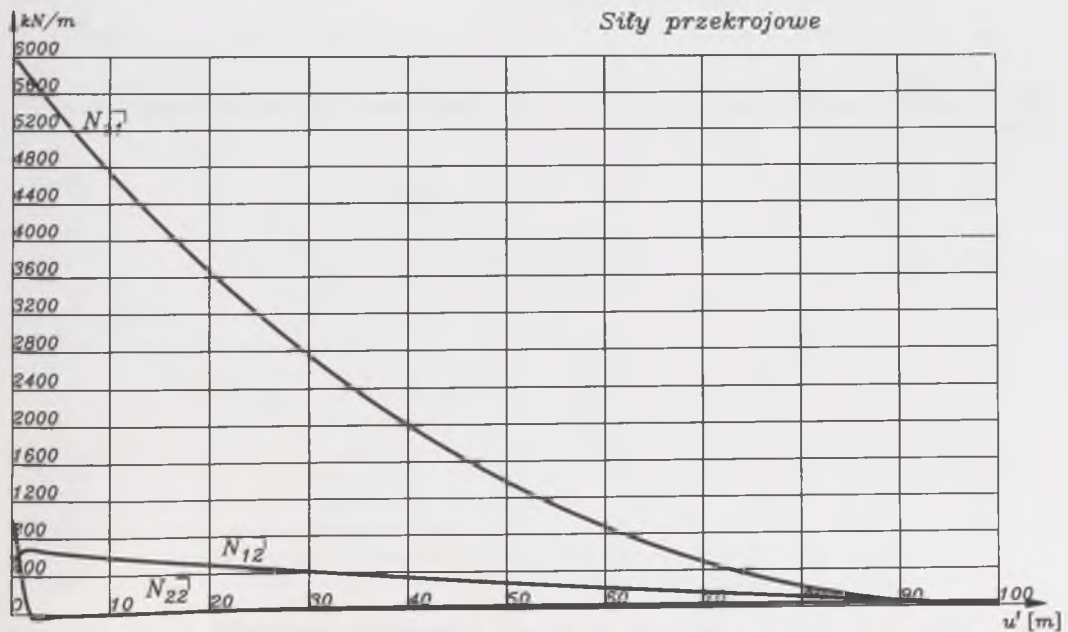
Rysunek 13.23. Deformacja powłoki walcowej o długości 100 m w powiększeniu 20 krotnym.

Rozwiązanie analityczne



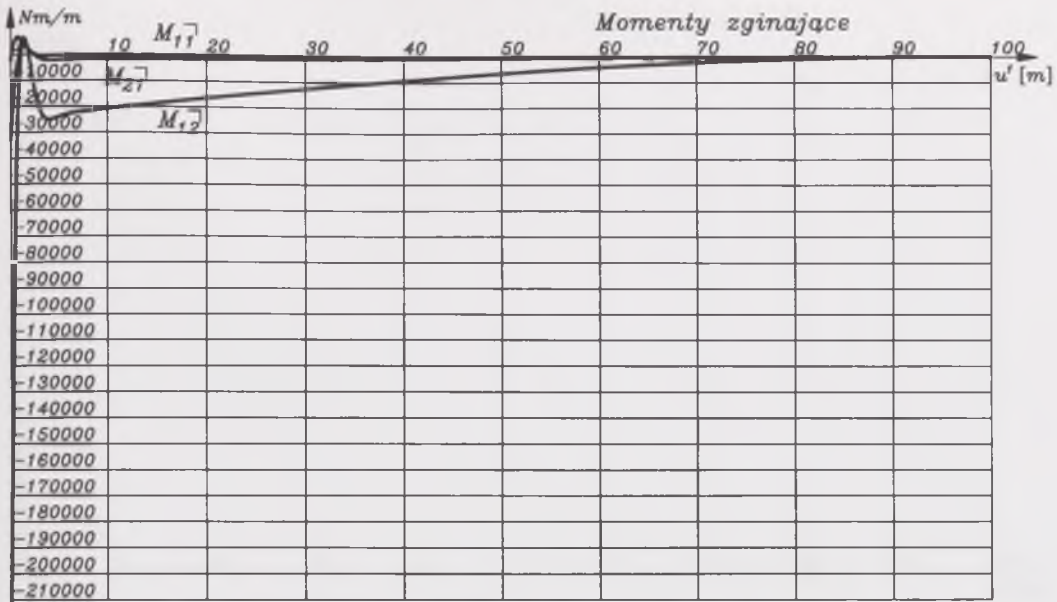
Rysunek 13.24. Siły przekrojowe powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie numeryczne



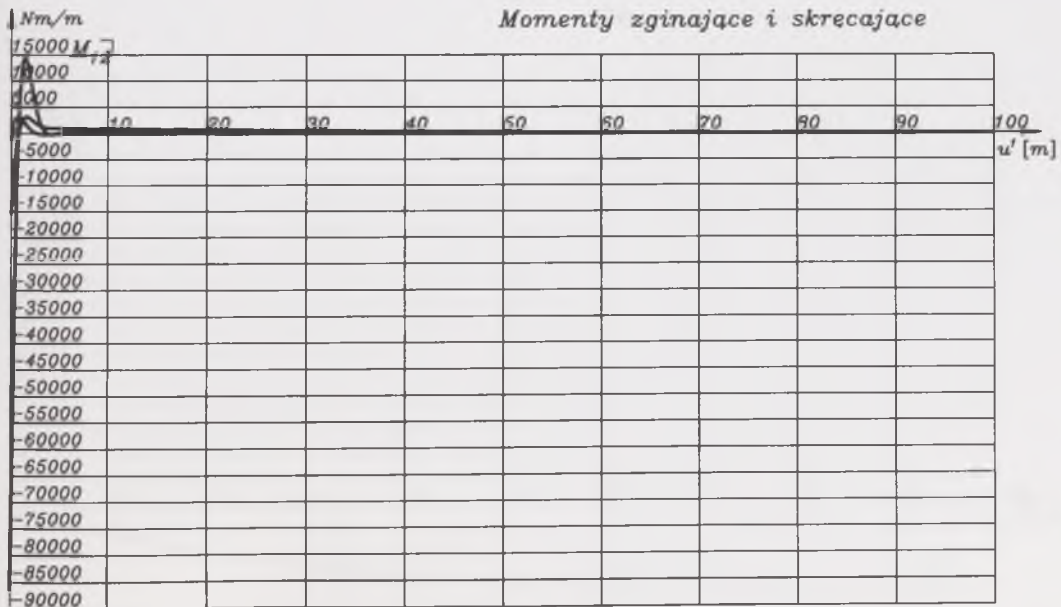
Rysunek 13.25. Siły przekrojowe fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.

Rozwiązanie analityczne



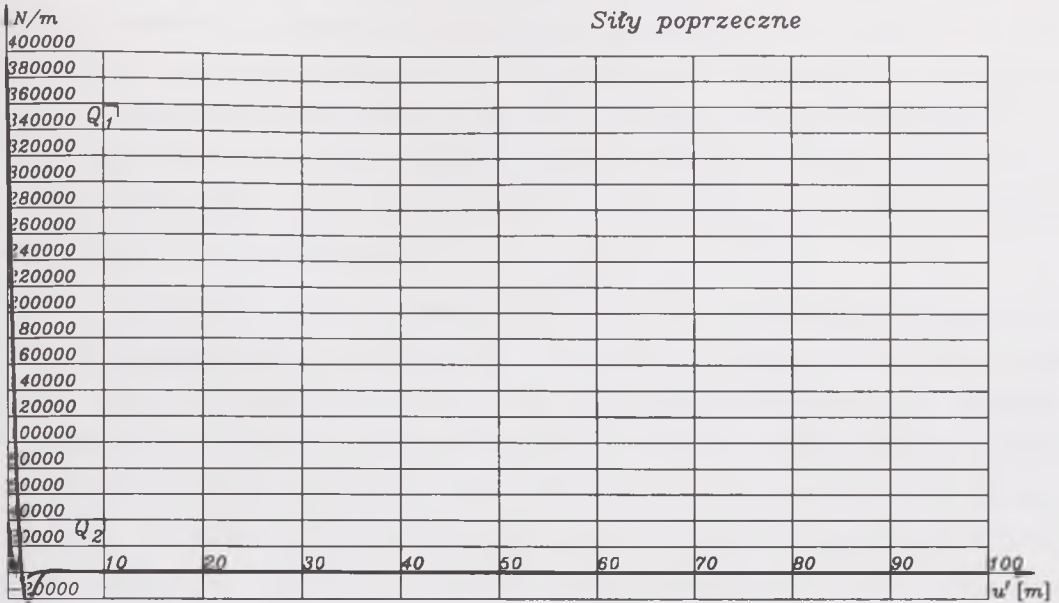
Rysunek 13.26. Momenty zginające i skręcające fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie numeryczne



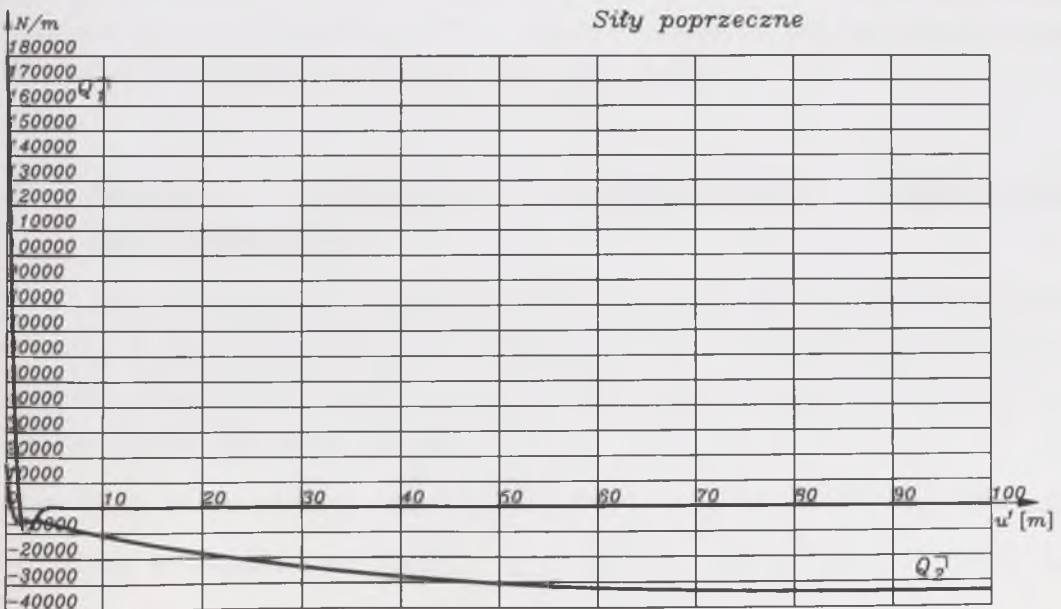
Rysunek 13.27. Momenty zginające i skręcające fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.

Rozwiązanie analityczne



Rysunek 13.28. Siły poprzeczne fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)- rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie numeryczne



Rysunek 13.29. Siły poprzeczne fizyczne powłoki walcowej o długości 100 m, (podano ekstremalne wartości)-rozwiązanie numeryczne.

Rozważając wyniki rozwiązania analitycznego należy zwrócić uwagę na fakt uwidocznienia się na wykresie momentów zginających, wpływu na sumaryczne wartości momentów umownego stanu błonowego. Uwzględnienie tych momentów, szczególnie dla powłoki o długości 100 m, zwiększa bezwzględną wartość momentu zginającego o około 20% i jak łatwo zauważyć, wpływa na niesymetryczność tensora momentów. Fakt powyższy ma istotny wpływ na wymiarowanie. Wpływ momentów stanu zgięciowego na końcowe wartości sił przekrojowych jest znikomy.

Porównując wyniki obu metod trzeba zauważyć, dla powłoki o długości 10 m, niemal idealną zgodność rozwiązania. Stwierdzić tu należy, że jak to wcześniej analizowaliśmy a priori w rozdziale 7, rozwiązanie analityczne w zakresie sił przekrojowych i przemieszczeń jest określone w ramach przyjętej uproszczonej teorii z niewielkim kilkuprocentowym zawyżeniem. Momenty zginające i siły poprzeczne określone są niemal z idealną zgodnością dla obu metod. Zawyżenie wielkości sił przekrojowych jest największe w pobliżu brzegu utwierdzonego, gdzie uwidacznia się istotny wpływ momentów i sił poprzecznych, na lokalną równowagę powłoki.

O ile odpowiednie wykresy dla pierwszego wariantu są zgodne wartościami uzyskanymi drogą analityczną, to drugi wariant ukazuje niestabilność rozwiązania numerycznego. Wykresy przemieszczeń, sił przekrojowych i poprzecznych oraz momentów różnią się od poprawnego w tym przypadku rozwiązania analitycznego, osiągając błąd przekraczający 50% ! Przede wszystkim dla rozwiązania metodą numeryczną nie są spełnione warunki elementarnej statyki.

13.3. Analiza przyczyn niestabilności rozwiązania numerycznego

Przyczyny błędności rozwiązania numerycznego powłok walcowych analizowane były już w pracy [13]. Analiza ta wykazała, że dla wszystkich trzech równań tej macierzy, mamy do czynienia z dodawaniem wielkości małych do dużych. I tu prawdopodobnie tkwi jedna z przyczyn błędu.

Okazuje się, że dla powłoki walcowej dochodzi do dodawania wielkości różniących się wielkością o współczynnik rzędu $\frac{h^2}{a^2}$, a więc dla powłok cienkich liczby małej w porównaniu z 1. Wynika stąd konieczność operowania na liczbach bardzo dużej precyzji. Może się zatem zdarzyć sytuacja, że dla cienkich powłok istotne dla rozwiązania wielkości zostaną ujęte w macierzy sztywności na miejscach dziesiętnych ulegających

w procesie przekształceń numerycznych błędem zaokrągleń (tak zwanych "śmieciach"). Bliżej tym zagadnieniem zajmiemy się w przypadku powłoki katenoidalnej.

W przypadku przedstawionego zadania o nieprawidłowości rozwiązania numerycznego zdecydowało, w głównej mierze, zjawisko impulsowego i oscylującego charakteru zaburzeń brzegowych. Jak łatwo zauważyć na wykresach przedstawiających rozwiązanie dla powłoki o długości 100 m zaburzenia brzegowe ograniczają się do wąskiego zakresu. Spróbujemy teraz rozważyć problem, w jaki sposób można poradzić sobie z wpływem tych impulsów.

W analizie zagadnień związanych rozwiązaniem numerycznym zadań z impulsami, istotne znaczenie ma odpowiednie zagęszczenie siatki dyskretnej w obszarze impulsu. Zatem należy odpowiedzieć na pytanie: jak gęsty powinien być podział dyskretny?

Z analizy stanu zgięciowego w powłoce wynika, że tłumienie zachodzi na odcinku nie dłuższym niż jeden okres fali sinusoidy. Stąd zasięg strefy stanu zgięciowego, porównaj [41], znajdujemy z zależności :

$$\omega n_i^0 l = 2\pi. \quad (13.10)$$

Z rozwiązania analitycznego można wywnioskować, że zaburzenia brzegowe opisywane tam całką ogólną, mają charakter tłumionej oscylacji, którą modelujemy funkcjami między innymi postaci:

$$f(x) = e^{-x} \cos x. \quad (13.11)$$

Jednocześnie wiemy, że równania wyjściowe zastosowanej metody numerycznej są równaniami różniczkowymi stopnia czwartego z uwagi na składową przemieszczenia w^3 . Spróbujemy przeanalizować jak gęsty musi być podział w obrębie zaburzeń aby rozwiązanie numeryczne mogło być poprawne z uwagi na obliczanie czwartej pochodnej.

Obliczając iloczyn współczynników liczbowych (7.9) i (9.4) występujących w szeregu hipertrygonometrycznym (9.21) w przypadku powłoki walcowej otrzymujemy następujące wyrażenia:

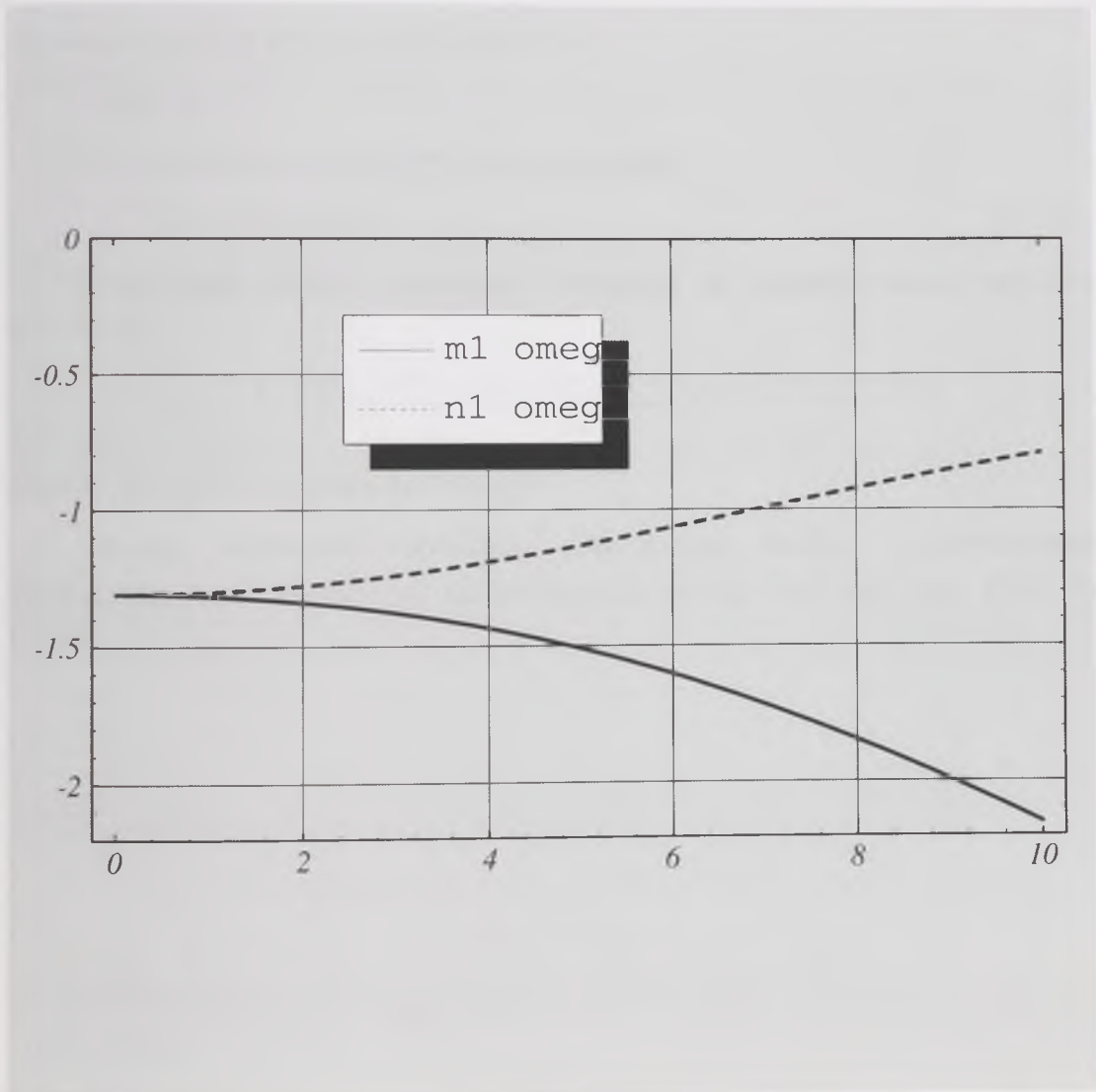
$$m_i \omega = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(1-v^2)}}{h\theta \sqrt{1 + \frac{3a^2(1-v^2)}{h^2\theta^4} - 1}}, \quad (13.12)$$

$$n_i \omega = \frac{\theta \sqrt{1 + \frac{3a^2(1-v^2)}{h^2\theta^4} - 1}}{\sqrt{2}a}. \quad (13.13)$$

Dla $\theta = 0$ (stan obciążenia osiowo-symetryczny) wprowadzamy współczynniki obliczone jako granica wyrażen przedstawionych powyżej:

$$m_1^0 \omega = n_1^0 \omega = \lim_{\theta \rightarrow 0} m_1 \omega = \lim_{\theta \rightarrow 0} n_1 \omega = \frac{\sqrt[3]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{2ah}} \quad (13.14)$$

Dla małych θ ($\theta < 5$) współczynniki (13.14) i (13.15) są w przybliżeniu równe tym, które zostały obliczone dla stanu osiowo-symetrycznego (Rys. 13.37). Wobec tego i z uwagi na prostotę wzorów będziemy dalej analizowali tylko stan osiowo-symetryczny.



Rys. 13.37. Zależność współczynników $m_1 \omega$, $n_1 \omega$ od parametru θ .

dla osiowej symetrii otrzymujemy następującą postać na zasięg strefy zaburzeń:

$$l = \frac{2\pi\sqrt{2ah}}{\sqrt[3]{3(1-v^2)}}. \quad (13.15)$$

Zasięg strefy zaburzeń dla różnych powłok zmienia się i przykładowo:

dla powłoki żelbetowej $v = \frac{1}{6}$, $a=5.0$ m, $h=0.1$ m:

$$l=4.81 \text{ m,}$$

dla powłoki stalowej $v=0.3$, $a=1.0$ m, $h=0.01$ m:

$$l=0.69 \text{ m,}$$

Czwarta pochodna funkcji f wynosi analitycznie:

$$f^{(4)}(x) = -4e^{-x} \cos x. \quad (13.16)$$

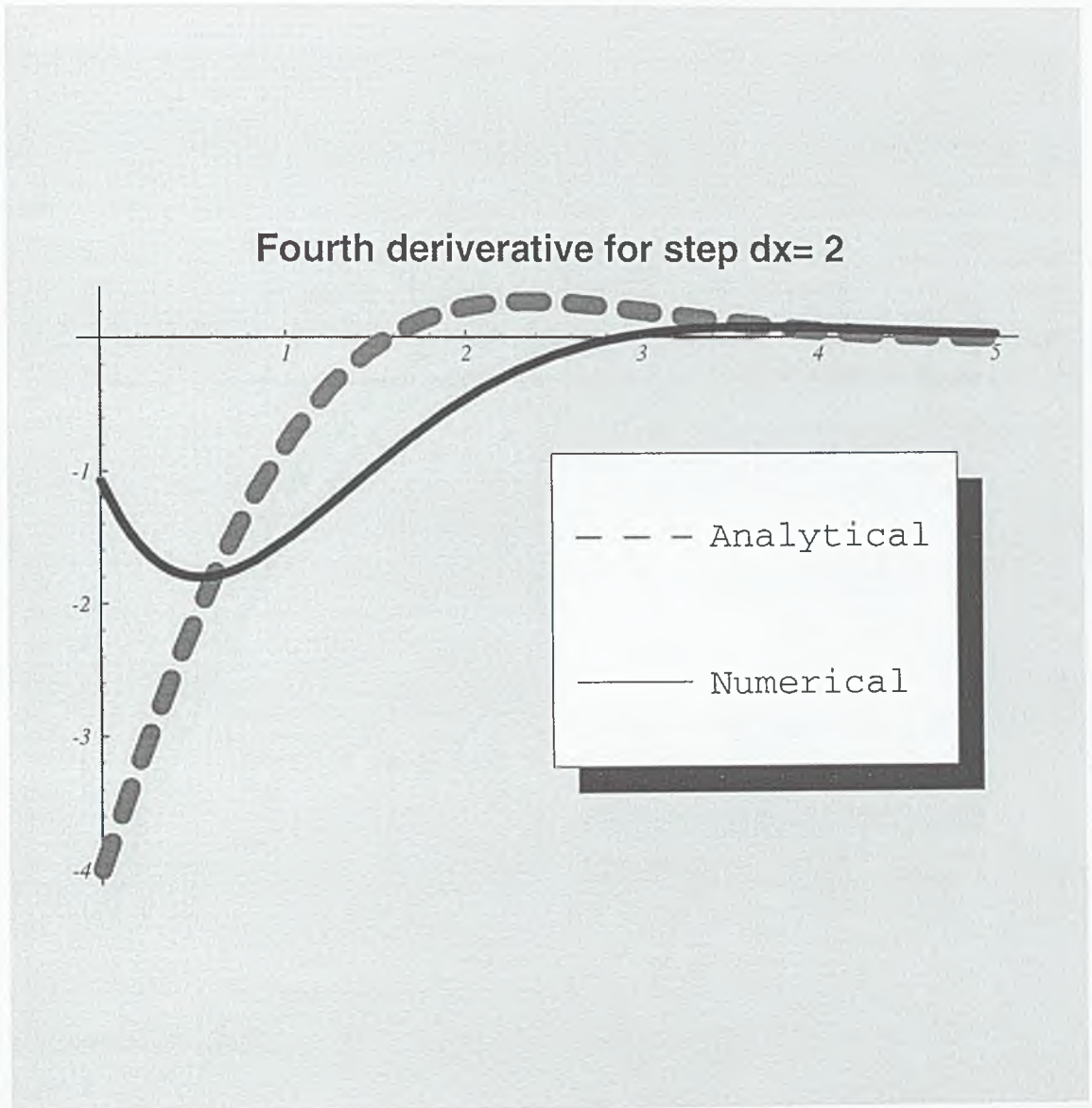
Przybliżoną wartość numeryczną obliczamy ze znanego wzoru rachunku różnicowego:

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x-2dx) - 4f(x-dx) + 6f(x) - 4f(x+dx) + f(x+2dx)}{dx^4}, \quad (13.17)$$

gdzie dx jest krokiem podziału dyskretnego.

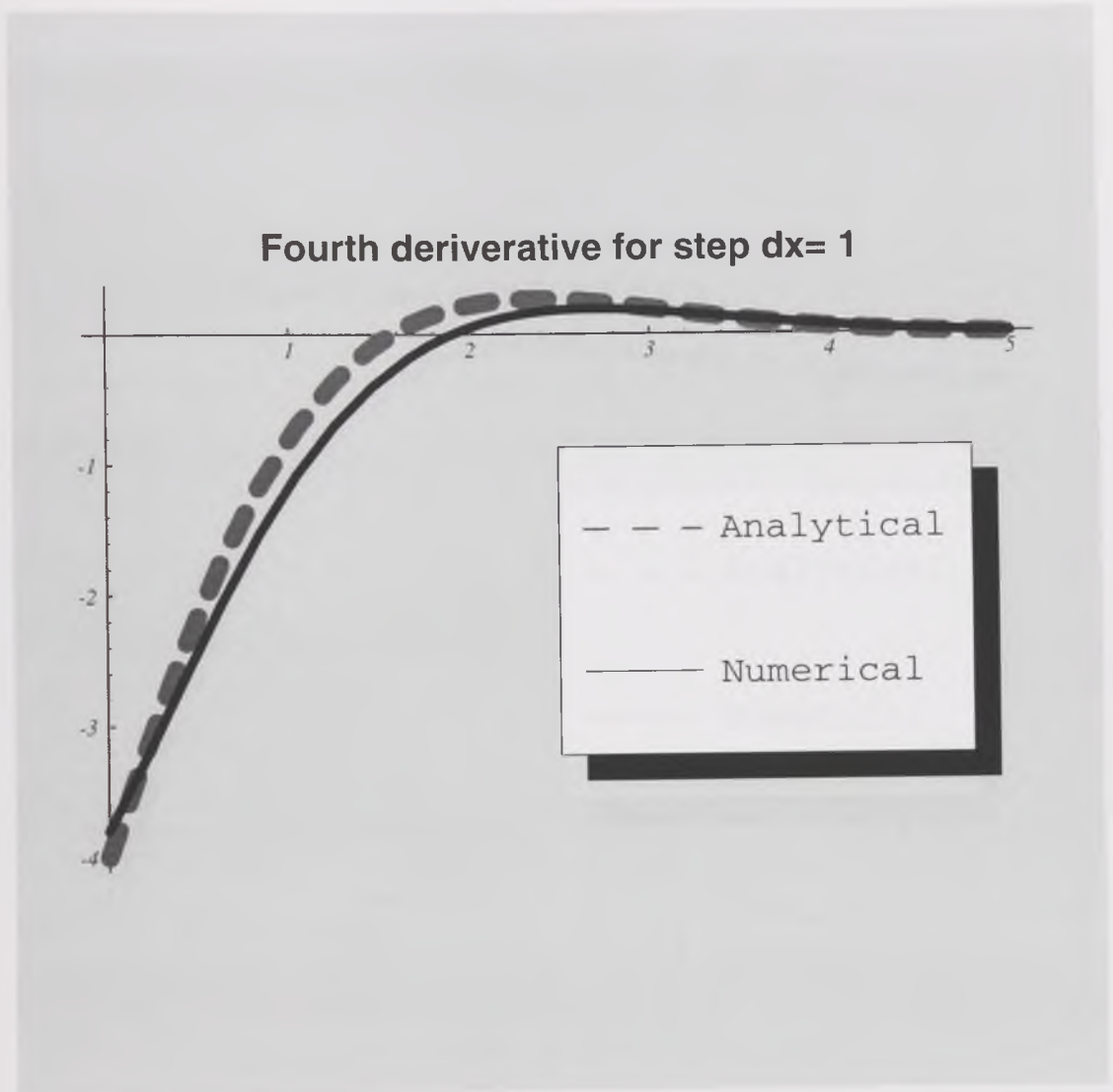
Wyniki porównania rozwiązania analitycznego, ścisłego i przybliżonego numerycznego przedstawiono na zamieszczonych poniżej wykresach (rys. 13.32 do 13.36).

Z pierwszego wykresu wynika, że podział z krokiem $dx=2$ jest grubo za rzadki.



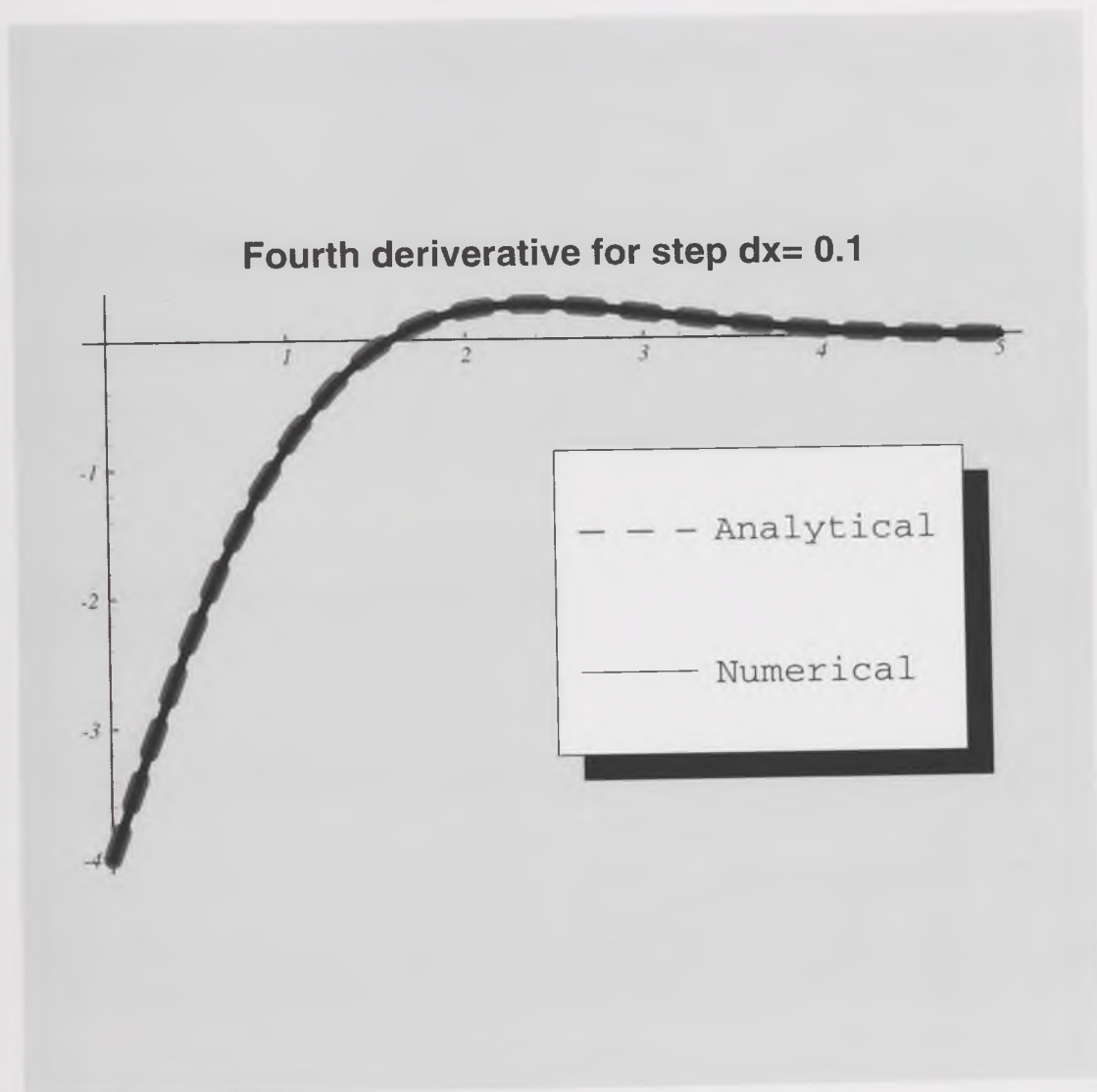
Rysunek 13.32. Porównanie analitycznej i numerycznej wartości czwartej pochodnej dla kroku $dx=2$.

Również podział z krokiem $dx=1$ jest daleki od doskonałości i może wywoływać błędy numeryczne dla powłok tak zwanych długich.



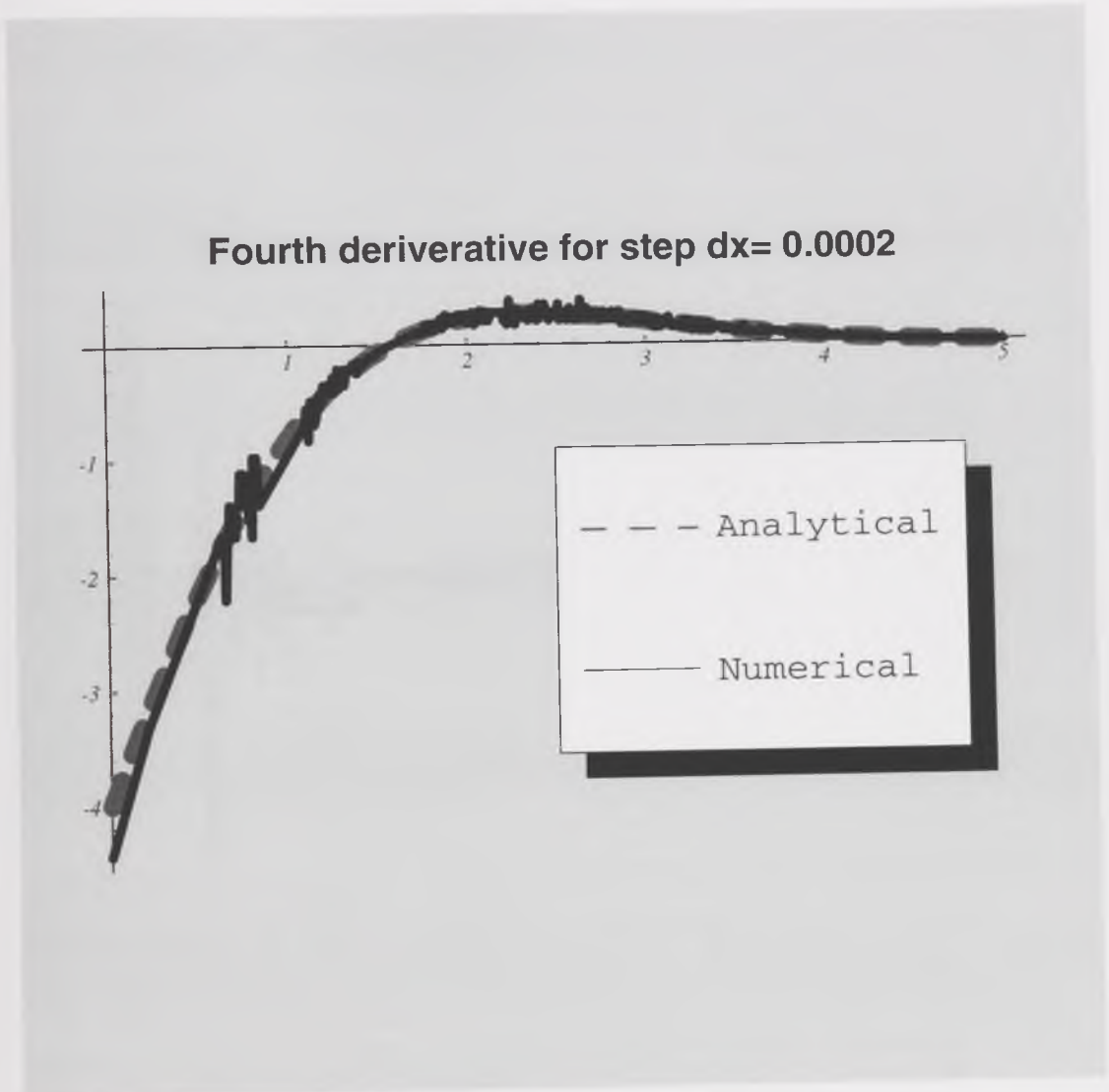
Rysunek 13.33. Porównanie analitycznej i numerycznej wartości czwartej pochodnej dla kroku $dx=1$.

Dopiero podział z krokiem $dx=0.01$ daje zadowalające rezultaty. I taki, w przybliżeniu, krok podziału dyskretnego mieliśmy dla powłoki o długości 10 m gdzie strefa zaburzeń rozciągała się na obszarze obejmującym około 4.8 m długości powłoki.



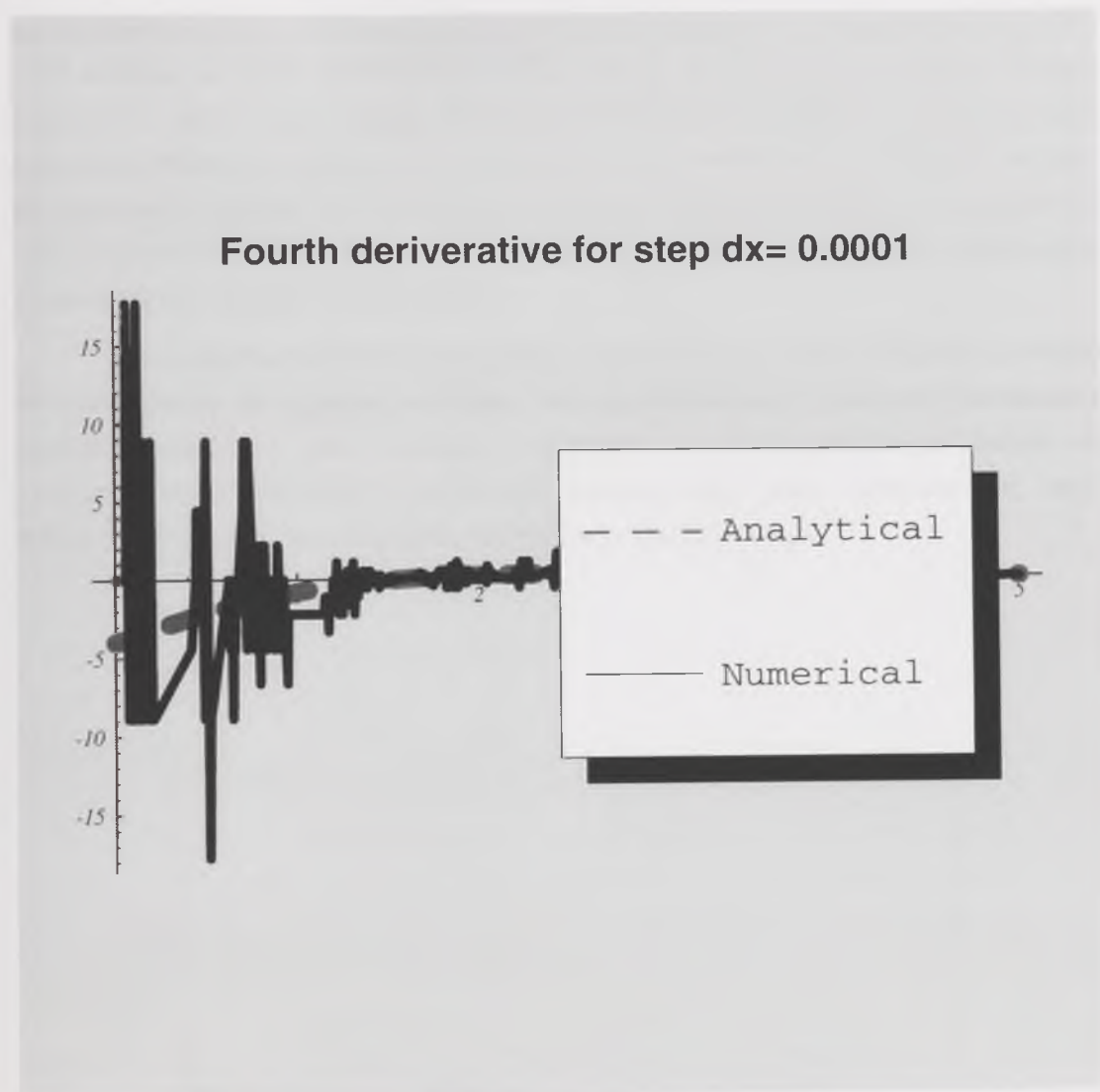
Rys 13.34. Porównanie analitycznej i numerycznej wartości czwartej pochodnej dla kroku $dx=0.01$.

Z zagęszczaniem podziału dyskretnego należy jednak uważać. Znaczne zagęszczenie podziału prowadzi do błędów natury numerycznej co widać na zamieszczonych poniżej wykresach.



Rysunek 13.35. Porównanie analitycznej i numerycznej wartości czwartej pochodnej dla kroku $dx=0.0002$.

Dalsze zagęszczanie prowadzi do tak znacznych błędów, że zamieszczony poniżej wykres czwartej pochodnej obliczonej numerycznie kojarzyć może się jedynie z przebiegiem Warszawskiego Indeksu Giełdowego WIG w ostatnich miesiącach 1994 r.



Rys 13.36. Porównanie analitycznej i numerycznej wartości czwartej pochodnej dla kroku $dx=0.0001$.

Z powyższych rozważań należy wyciągnąć wniosek, że przewidywany podział na elementy lub inny podział dyskretny powinien spełniać warunek konieczny:

$$dx \ll l,$$

(13.18)

przynajmniej w strefie zaburzeń podporowych lub w miejscach przyłożenia sił skupionych. Nie jest to jednak warunek wystarczający o czym przekonamy się w kolejnym przykładzie dla powłoki katenoidalnej.

Należy przy tym dodać, że zwiększając długość powłoki, w stosunku do zasięgu strefy zaburzeń należy zwiększać zagęszczenie siatki dyskretnej. Zagęszczenie to ponadto musi wzrastać w miarę wydłużania powłoki z uwagi na odzywanie się małych błędów lokalnych w skali całego ustroju. Stwarza to dodatkowe problemy numeryczne, gdyż powoduje rozrastanie się macierzy sztywności układu równań liniowych zadania, co staje się naprawdę istotnym problemem w przypadku zadań nieliniowych, a w ogólności takich, których nie można sprowadzić do zagadnienia przestrzennie jednowymiarowego, jak to mogliśmy uczynić w tym zadaniu.

W rozwiązaniu analitycznym z kolei, zmniejszanie się strefy zaburzeń prowadzi do zwiększenia dokładności obliczeń. Jak powiedzieliśmy wcześniej rozwiązanie analityczne określone jest z pewnym zawyżeniem. To przeszacowanie uwidacznia się głównie w strefie zaburzeń pochodzących od stanu zgięciowego. Zawężenie tej strefy odbija się pozytywnie na dokładności rozwiązania całości zadania.

14. Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego na przykładzie powłoki katenoidalnej

Katenoida jest powierzchnią, która powstaje w wyniku obrotu krzywej łańcuchowej opisanej równaniem:

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

wokół osi x .

Powierzchnia ta należy do rodziny powierzchni minimalnych. Powłoka, której powierzchnią środkową jest katenoida nazywamy powłoką katenoidalną. Powierzchnia środkowa powłoki cechuje się następującymi własnościami geometrycznymi:

$$g_{11} = \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$g_{22} = a^2 \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$b_{11} = \frac{-1}{a},$$

$$b_{22} = a.$$

Powierzchnia ta ma zerową krzywiznę średnią oraz ujemną krzywiznę Gaussa:

$$H = 0, K = \frac{-1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Podobnie jak dla przykładu przedstawionego w poprzednim rozdziale, rozpatrywać będziemy powłokę betonową wychyloną od pionu o 90° (wspornik). Do obliczeń przyjęto następujące dane:

Moduł Younga	$E=19.6 \text{ GPa}$,
Współczynnik Poissona	$\nu=1/6$,
Gęstość materiału	$\gamma=24.5 \text{ kN/m}^3$,
promień walca	$a=5 \text{ m}$,
grubość powłoki	$2h=0.2, \text{ m}$

podział na przedziały (dla rozwiązania numerycznego) 280,

Obliczenia wykonano w dwóch wariantach długości powłoki:

$$1 \text{ wariant} \quad l=10 \text{ m } u' \in \langle -5 \text{ m}, 5 \text{ m} \rangle,$$

$$2 \text{ wariant} \quad l=20 \text{ m } u' \in \langle -10 \text{ m}, 10 \text{ m} \rangle.$$

14.1 Rozwiązanie analityczne powłoki katenoidalnej

Jak wspomniano rozwiązanie analityczne w prezentowanej pracy zostało dokonane przy wsparciu systemu *Mathematica*. W przedstawianym przykładzie zilustrujemy nieco bliżej to zastosowanie, prezentując dla wybranych wzorów rozwiązania całki szczególnej zadania, postać wyników otrzymywaną bezpośrednio z tego systemu komputerowego.

Siły wewnętrzne całki szczególnej (umownego stanu błonowego) przyjmują kolejno postać (w szarych polach postać wzoru otrzymana z systemu *Mathematica*):

```
In[2]:= n11[x]
```

$$\text{Out}[2]= \frac{q \operatorname{Sech}\left[\frac{x}{a}\right] \left(2l^2 - 4lx + 2x^2 - a^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{2l}{a}\right] + a^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{2x}{a}\right] + 2a \operatorname{Sinh}\left[\frac{2l}{a}\right] - 2ax \operatorname{Sinh}\left[\frac{2x}{a}\right]\right)}{4a}$$

$$\bar{N}^{II} = \frac{q \operatorname{sech}\left(\frac{x}{a}\right) \left\{ 2(l-x)^2 + a^2 \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{2x}{a}\right) - \operatorname{cosh}\left(\frac{2l}{a}\right) \right] + 2a(l-x) \operatorname{sinh}\left(\frac{2l}{a}\right) \right\}}{4a}$$

```
In[3]:= n12[x]
```

$$\text{Out}[3]= \frac{q \operatorname{Sech}\left[\frac{x}{a}\right] \left(2l^2 - 2lx + a^2 \operatorname{Sinh}\left[\frac{2l}{a}\right] - a^2 \operatorname{Sinh}\left[\frac{2x}{a}\right]\right)}{2a} +$$

$$\frac{q \operatorname{Sech}\left[\frac{x}{a}\right] \left(2l^2 - 4lx + 2x^2 - a^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{2l}{a}\right] + a^2 \operatorname{Cosh}\left[\frac{2x}{a}\right] + 2a \operatorname{Sinh}\left[\frac{2l}{a}\right] - 2ax \operatorname{Sinh}\left[\frac{2x}{a}\right]\right) \operatorname{Tanh}\left[\frac{x}{a}\right]}{4a}$$

$$\bar{N}^{12} = \frac{q \operatorname{sech}^3\left(\frac{x}{a}\right) \left\{ 2(l-x) + a \left[\sinh\left(\frac{2l}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) \right] \right\}}{2a} + \frac{q \operatorname{sech}^3\left(\frac{x}{a}\right) \tanh\left(\frac{x}{a}\right) \left\{ 2(l-x)^2 + a^2 \left[\cosh\left(\frac{2x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{2l}{a}\right) \right] + 2a(l-x) \sinh\left(\frac{2l}{a}\right) \right\}}{4a^3}$$

```
In[4]:= n22[x]
Out[4]= (q Sech[-] (x/a)^3 (-2 a^2 + 2 l^2 - 4 l x + 2 x^2 - a^2 Cosh[2 l/a] -
> a^2 Cosh[2 x/a] + 2 a l Sinh[2 l/a] - 2 a x Sinh[2 x/a])) / (4 a^3)
```

$$\bar{N}^{22} = \frac{q \operatorname{sech}^3\left(\frac{x}{a}\right) \left\{ -2a^2 + 2(l-x)^2 + a^2 \left[\cosh\left(\frac{2x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{2l}{a}\right) \right] + 2a(l-x) \sinh\left(\frac{2l}{a}\right) \right\}}{4a^3}$$

Obliczając z kolei składowe tensora odkształcenia błonowego:

```
In[5]:= gamma11[x]
Out[5]= (q Cosh[-] (2 l^2 + 2 a^2 ni^2 - 2 l ni^2 - 4 l x + 4 l ni x + 2 x^2 -
> 2 ni x^2 - a^2 Cosh[2 l/a] + a^2 ni Cosh[2 x/a] + a^2 Cosh[2 x/a] +
> a^2 ni Cosh[2 x/a] + 2 a l Sinh[2 l/a] - 2 a l ni Sinh[2 l/a] -
> 2 a x Sinh[2 l/a] + 2 a ni x Sinh[2 x/a])) / (8 a e h)
```

```
In[6]:= gamma12[x]
Out[6]= (a^2 (1 + ni) Cosh[-] (x/a)^4 (
> q Sech[-] (x/a)^3 (2 l^2 - 2 x^2 + a Sinh[2 l/a] - a Sinh[2 x/a])
> -----) / (2 a)
```

$$\begin{aligned}
> & \frac{x^3}{a} \left(q \operatorname{Sech}\left[-\frac{2}{a}\right] \left(2 l^2 - 4 l x + 2 x^2 - a \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] + a \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 x}{a}\right] + \right. \right. \\
> & \left. \left. 2 a l \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - 2 a x \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] \right) \operatorname{Tanh}\left[-\frac{x}{a}\right] / (4 a^2) \right) / (2 e^h)
\end{aligned}$$

In[7]:= gamma22[x]

$$\begin{aligned}
\text{Out}[7]= & \frac{x^2}{a} \left(a q \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2}{a}\right] \left(-2 a^2 + 2 l^2 - 2 l n i - 4 l x + 4 l n i x + 2 x^2 - \right. \right. \\
> & \left. \left. 2 n i x^2 - a \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] + a n i \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - a \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 x}{a}\right] - \right. \right. \\
> & \left. \left. a n i \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 x}{a}\right] + 2 a l \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - 2 a l n i \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - \right. \right. \\
> & \left. \left. 2 a x \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] + 2 a n i x \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] \right) \right) / (8 e^h)
\end{aligned}$$

otrzymujemy po scałkowaniu i uporządkowaniu następujący wzór na składową \tilde{w}^2 przemieszczenia:

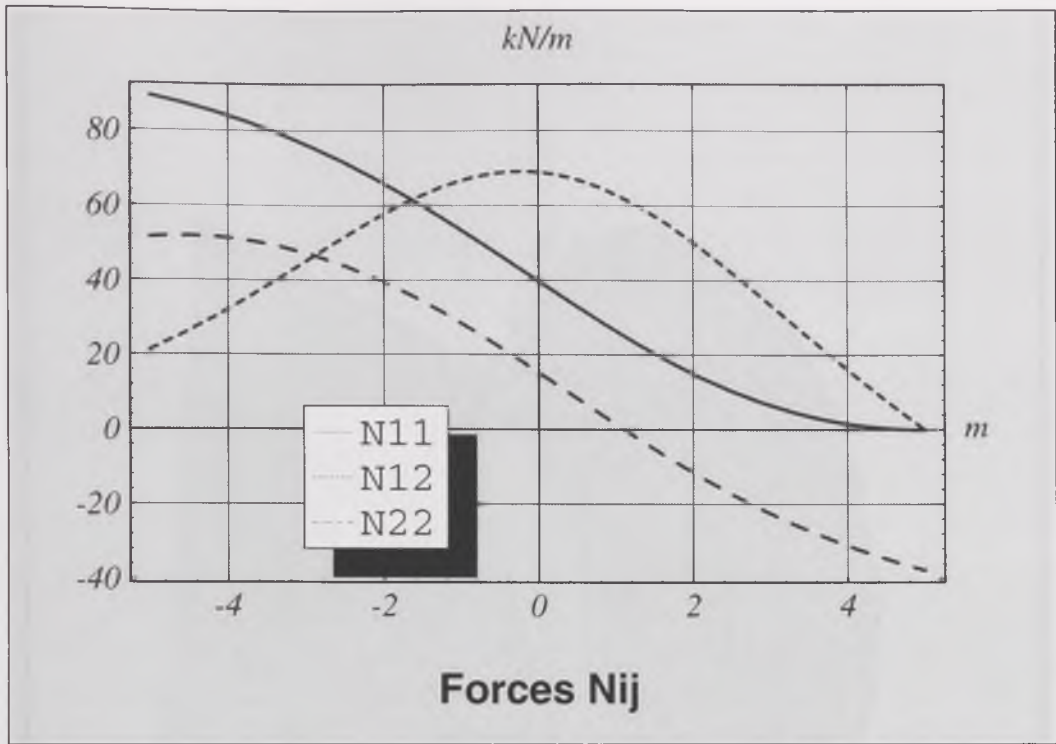
In[21]:= w2[x]

$$\begin{aligned}
\text{Out}[21]= & \frac{x^2}{a} \left(\operatorname{Sech}\left[-\frac{2}{a}\right] \left(48 a^2 C_1 e^h - 48 a^2 C_2 e^h x - 30 a^2 q x^2 + 24 l^2 q x^2 - \right. \right. \\
> & \left. \left. 18 a^2 n i q x^2 - 16 l^3 q x^2 + 4 q x^4 - 12 a^2 q x^2 \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - \right. \right. \\
> & \left. \left. 9 a^4 q \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 x}{a}\right] - 9 a^4 n i q \operatorname{Cosh}\left[-\frac{2 x}{a}\right] + 24 a^2 l q x^2 \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] - \right. \right. \\
> & \left. \left. 8 a^3 q x^2 \operatorname{Sinh}\left[-\frac{2 l}{a}\right] \right) \right) / (48 a^3 e^h)
\end{aligned}$$

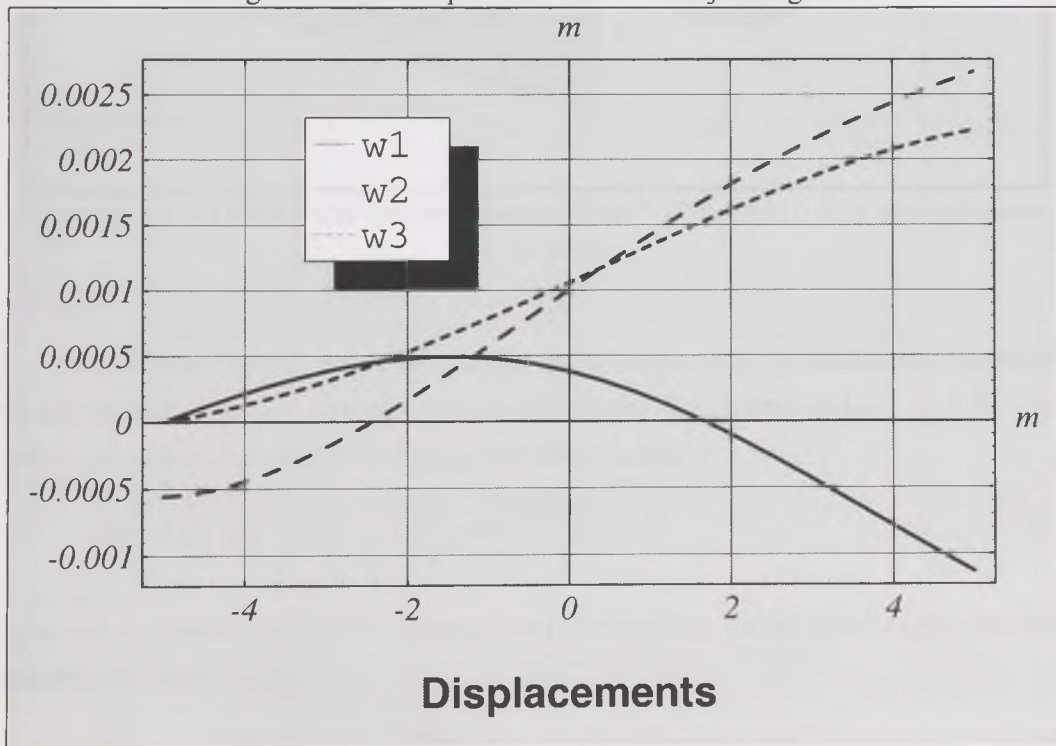
$$\begin{aligned} \bar{w}^2 = & \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x}{a}\right)\left\{48a^2 E h(C_1 - C_2 x) - q x^2(30a^2 + 24l^2 - 18va^2) - 16q l x^3 + 4q x^4\right\}}{48a^3 E h} + \\ & + \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x}{a}\right)\left\{12q a^2 x^2 \cosh\left(\frac{2l}{a}\right) - 9q a^4(1+v) \cosh\left(\frac{2x}{a}\right) + 8q a x^2(3l-x) \sinh\left(\frac{2l}{a}\right)\right\}}{48a^3 E h} \end{aligned}$$

Nie będziemy prezentowali dalszych wzorów na przemieszczenia bowiem dalsze czynności sprowadzają się do różniczkowania, podstawienia do wzoru i obliczenia stałych całkowania w celu spełnienia warunków brzegowych. Działania te mają na tym etapie charakter techniczny, prowadzą jednak do zawiłych i długich wyrażeń.

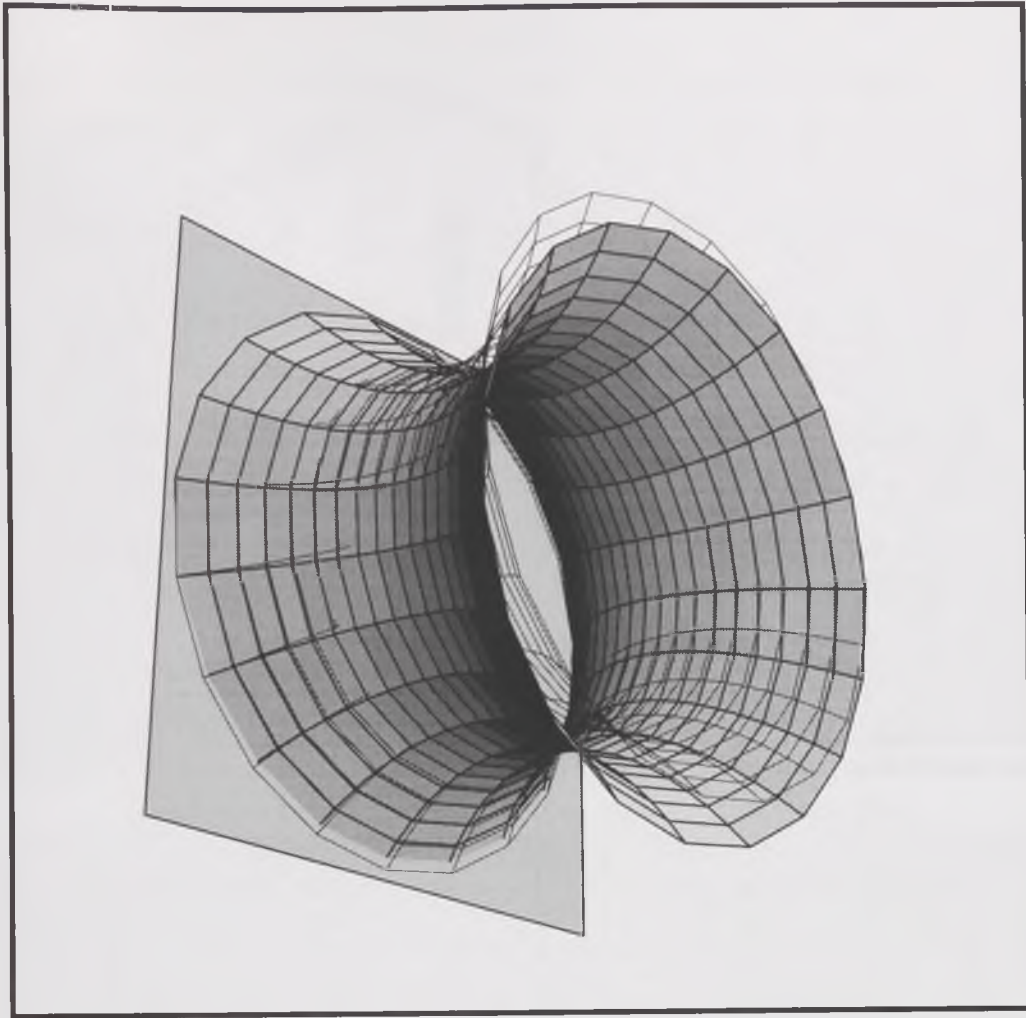
Po podstawieniu do powyższych wzorów odpowiednich danych, otrzymujemy dla obu wariantów rozwiązanie umownego stanu błonowego przedstawionego na wykresach. Na wykresach przedstawiono, podobnie jak dla powłoki walcowej prezentowanej w poprzednim rozdziale, jedynie ekstremalne wartości fizyczne obliczone na obwodzie powłoki, należy je przemnożyć przez odpowiednie współczynniki, wzory (10.15) do (10.20) aby otrzymać wartości w dowolnym punkcie na obwodzie. Na rysunkach 14.3 oraz 14.6 przedstawiono w skazanej skali przestrzenny wykres pola infinitezymalnych przemieszczeń powłoki. Jak widać, na etapie rozwiązania całki szczególnej nie spełniamy, w tym przypadku, warunków w zakresie zerowania się obrotów i przemieszczeń na brzegu podparym. Warunki te spełnimy na etapie rozwiązania całki ogólnej zadania.



Rysunek 14.1. Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} umownego stanu błonowego na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 10 m.



Rysunek 14.2. Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń w_i umownego stanu błonowego na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 10 m.



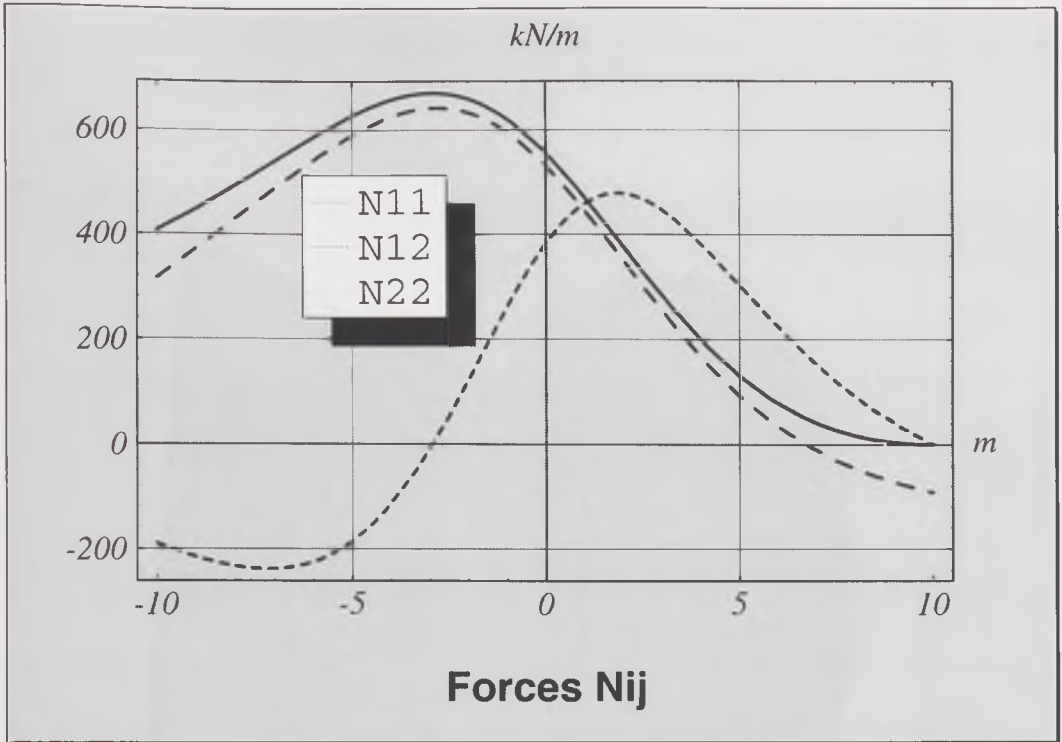
Rysunek 14.3. Deformacja powłoki katenoidalnej o długości 10 m w powiększeniu 500 krotnym.

Otrzymane wyniki sprawdzić można przez interpretację mechaniczną. Sprawdźmy wartość ekstermalnej siły stycznej w przewężeniu powłoki katenoidalnej, $u' = 0$. Ciężar powłoki po prawej stronie przewężenia obliczamy z całki:

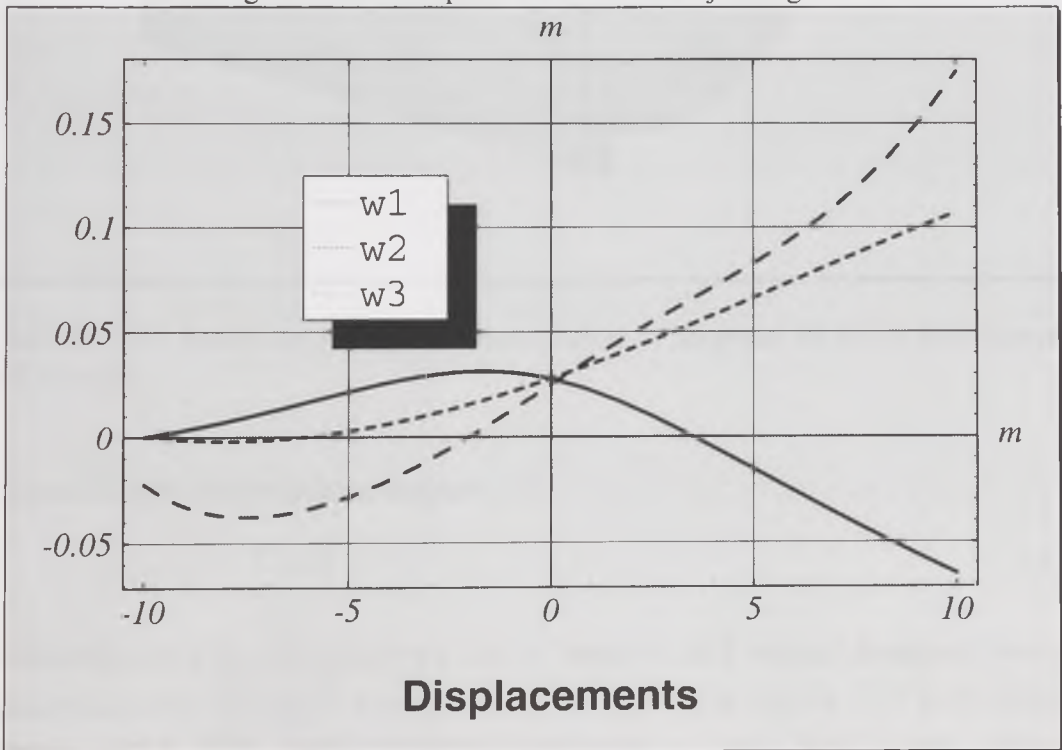
$$2\pi \int_0^l q \sqrt{g} du' = a \pi q \left[1 + \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{2l}{a}\right) \right]. \quad (14.1)$$

Ciężar ten w całości przenosi w przewężeniu siła styczna, której sumaryczny rzut na oś pionową obliczamy z całki:

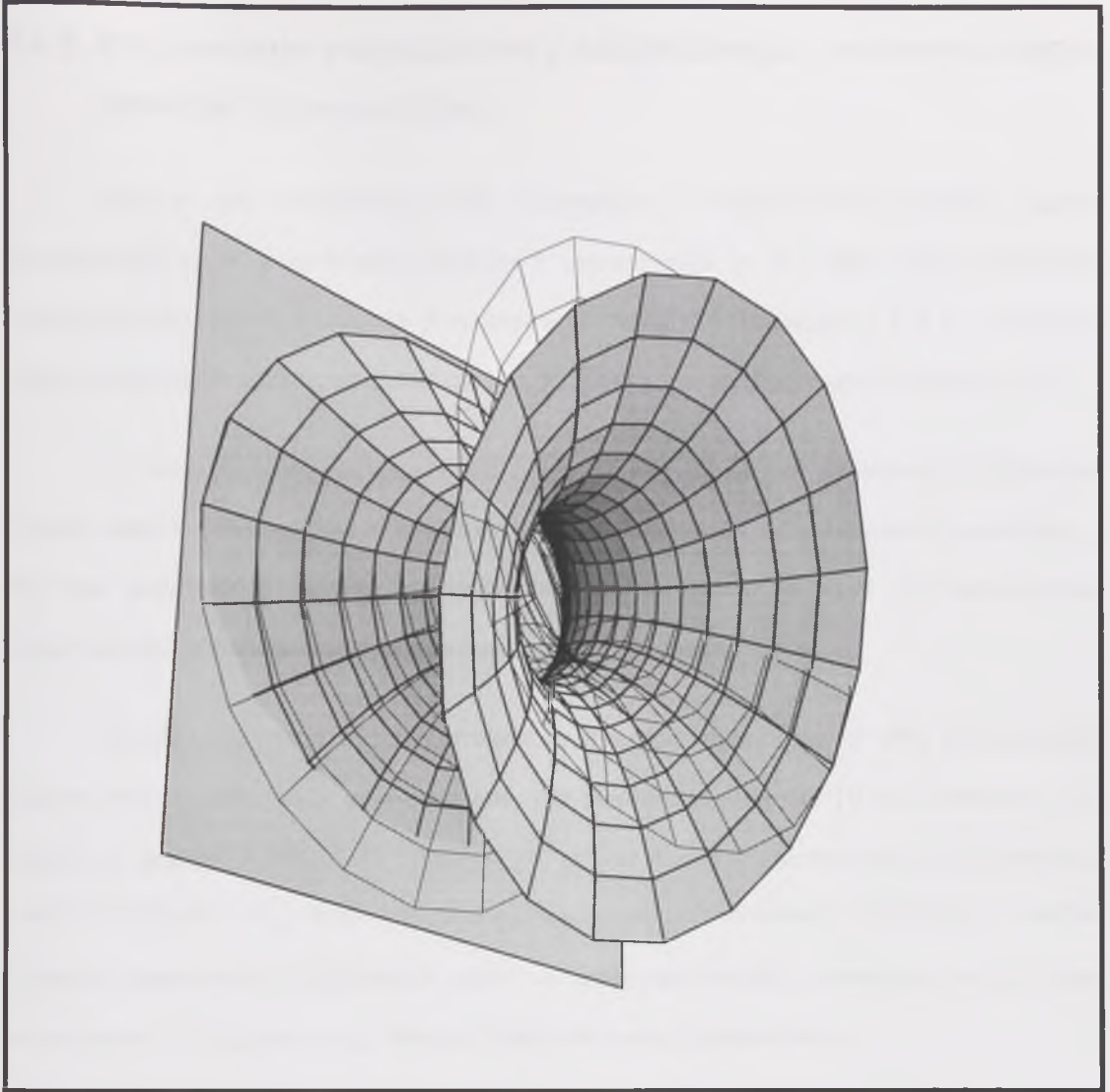
$$\int_0^{2\pi} \bar{N}_{12} a \sin^2(u^2) du^2 = \pi \bar{N}_{12} a. \quad (14.2)$$



Rysunek 14.4. Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} umownego stanu błonowego na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



Rysunek 14.5. Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń \bar{w}_i umownego stanu błonowego na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



Rysunek 14.6. Deformacja powłoki katenoidalnej o długości 20 m w powiększeniu 100 krotnym.

Porównując (14.1) z (14.2) otrzymujemy:

$$\tilde{N}_{12} = q \left[l + \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{2l}{a}\right) \right]. \quad (14.3)$$

Podstawiając $a=5 \text{ m}$, $q=0.2 \cdot 24.5=4.9 \text{ kN/m}^2$ oraz $l=5 \text{ m}$ (I wariant) dostajemy wartości maksymalnej siły stycznej w przewężeniu równą 68.9 kN/m , zaś dla $l=10 \text{ m}$ (II wariant) wartość 383.3 kN/m , czyli wielkości identyczne z tymi jakie można odczytać odpowiednio z wykresów 14.1. i 14.4.

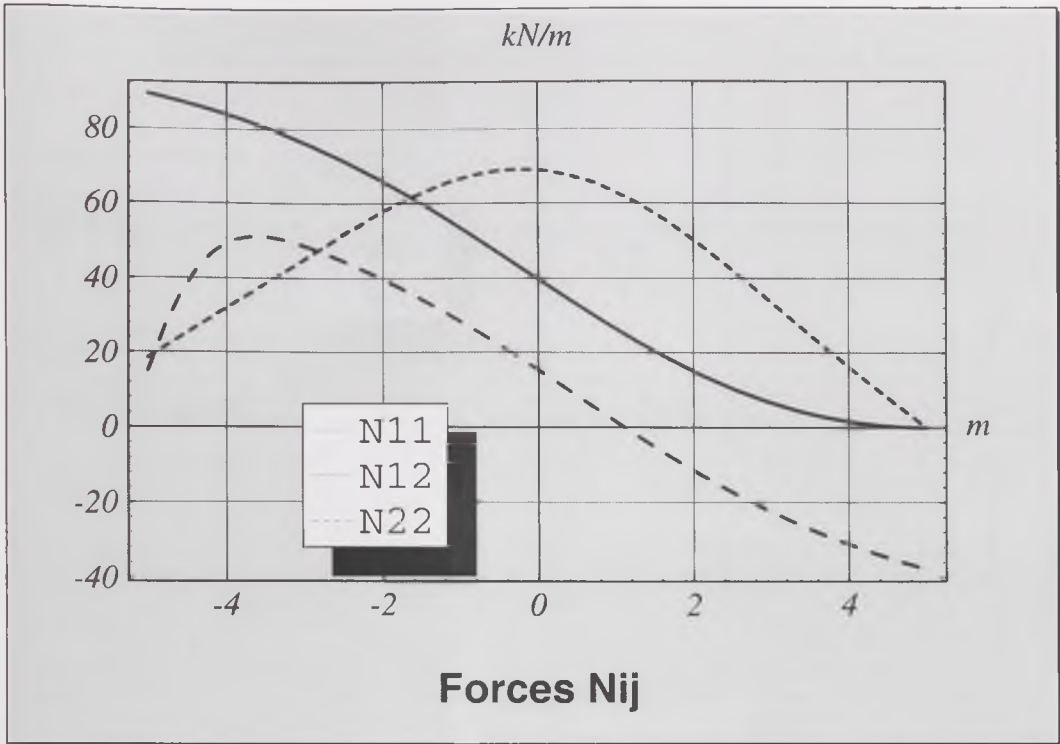
14.2. Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego powłoki katoidalnej.

Bazując na rozwiązaniu całki szczególnej równania różniczkowego, które przedstawiliśmy w poprzednim punkcie i uzupełniając je o całkę ogólną równania różniczkowego, której równania przedstawione zostały w rozdziale 7 i 9 - otrzymano pełne uproszczone rozwiązanie analityczne powłoki katoidalnej wychylonej od pionu.

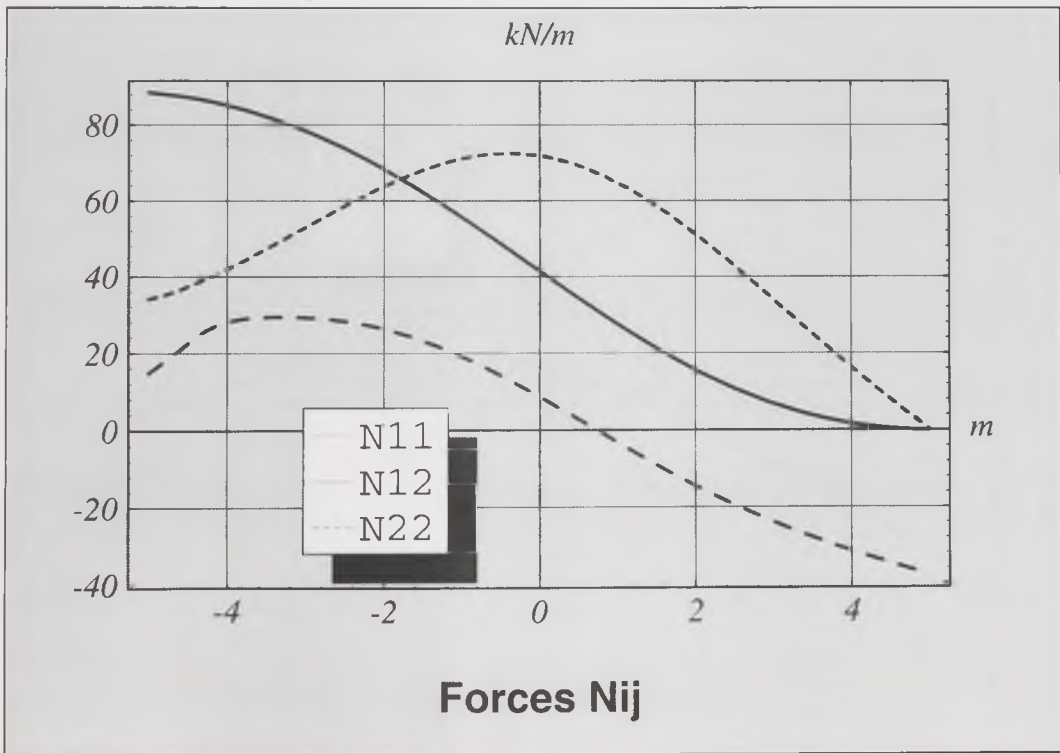
To samo zadanie rozwiązywane było dla wspomnianych wcześniej przykładów metodą numeryczną opisaną w rozdziale 11. Wyniki obu metod porównano zestawiając, dla obu przykładów, wyniki w formie wykresów parami: u góry dla rozwiązania analitycznego, u dołu strony dla rozwiązania numerycznego.

Okazało się ponownie, że rozwiązanie numeryczne daje w obu przypadkach błędne wyniki, przy czym w rozwiązaniu dla powłoki o długości 10 m (I wariant) jest niemal na granicy rozwiązania poprawnego, przynajmniej w zakresie sił przekrojowych, choć i tu dla siły N_{22}^{\rightarrow} zauważyć można widoczne rozbieżności szczególnie w strefie zaburzeń brzegowych. Całkowicie różne są natomiast wyniki rozwiązania w zakresie momentów i sił poprzecznych. Wyniki różnią się nawet czterokrotnie.

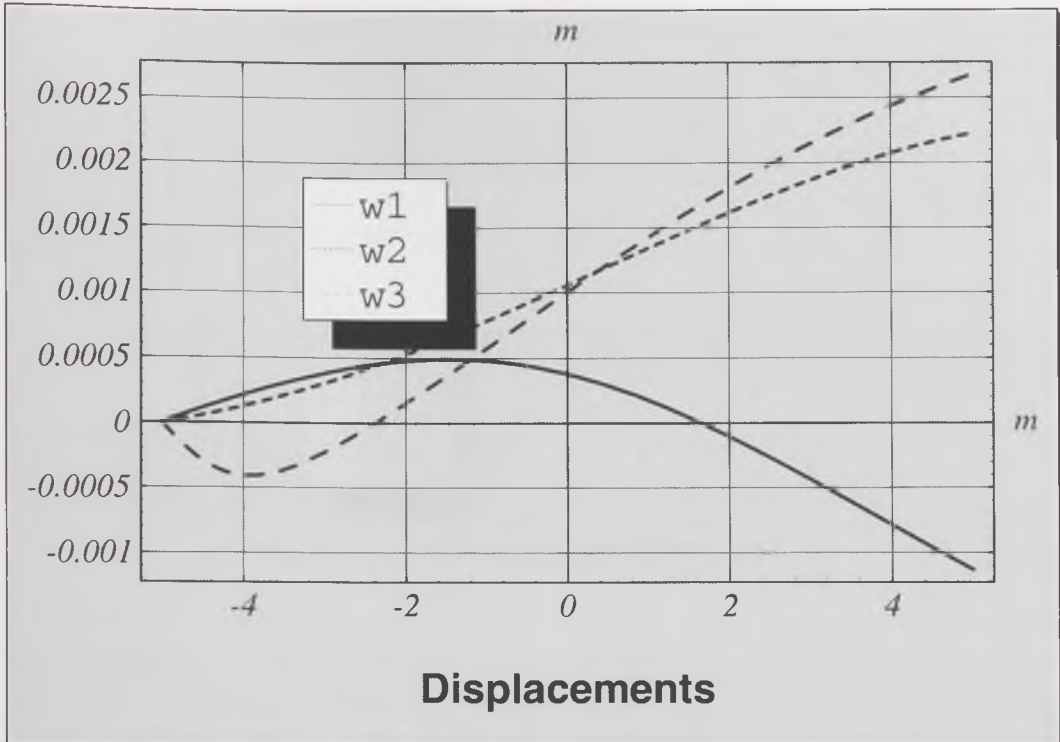
O ile dla pierwszego wariantu rozwiązania znajdowaliśmy się dopiero na granicy utraty stabilności przez rozwiązanie numeryczne to dla drugiego wyniki tego rozwiązania są całkowicie błędne i praktycznie nieporównywalne z poprawnym rozwiązaniem analitycznym. Z wykresów dla rozwiązania numerycznego odczytać można jedynie tendencję przebiegu sił przekrojowych, przemieszczeń, natomiast momenty zginające błędne są nie tylko co do rzędu ale i znaku.



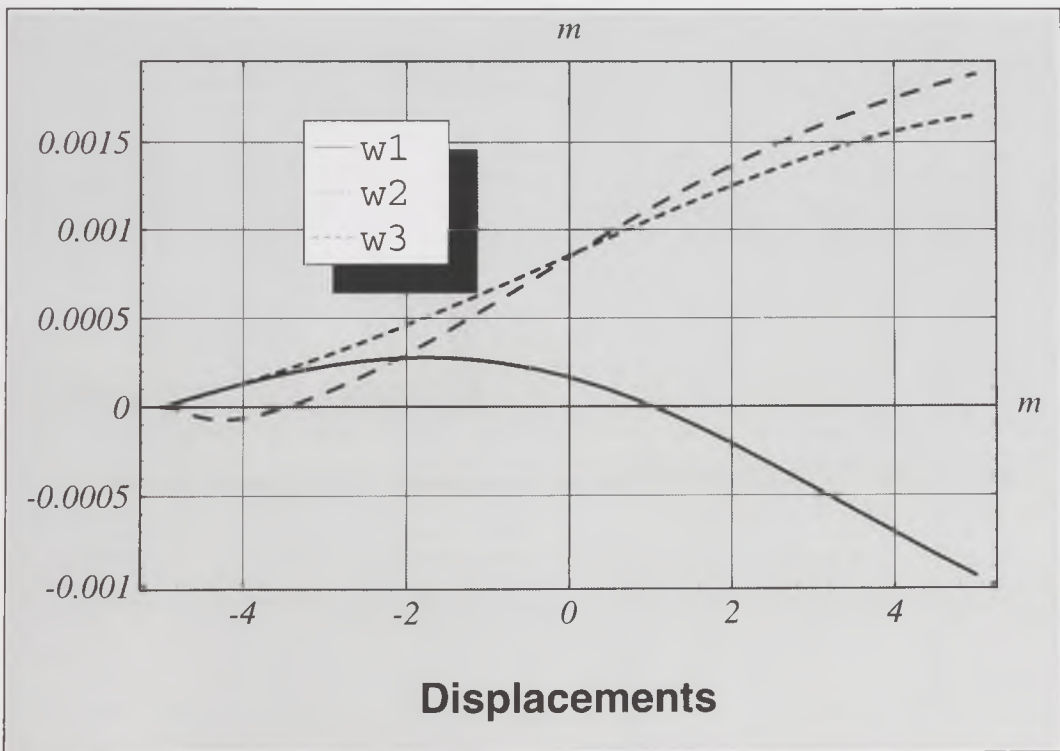
Rysunek 14.7. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



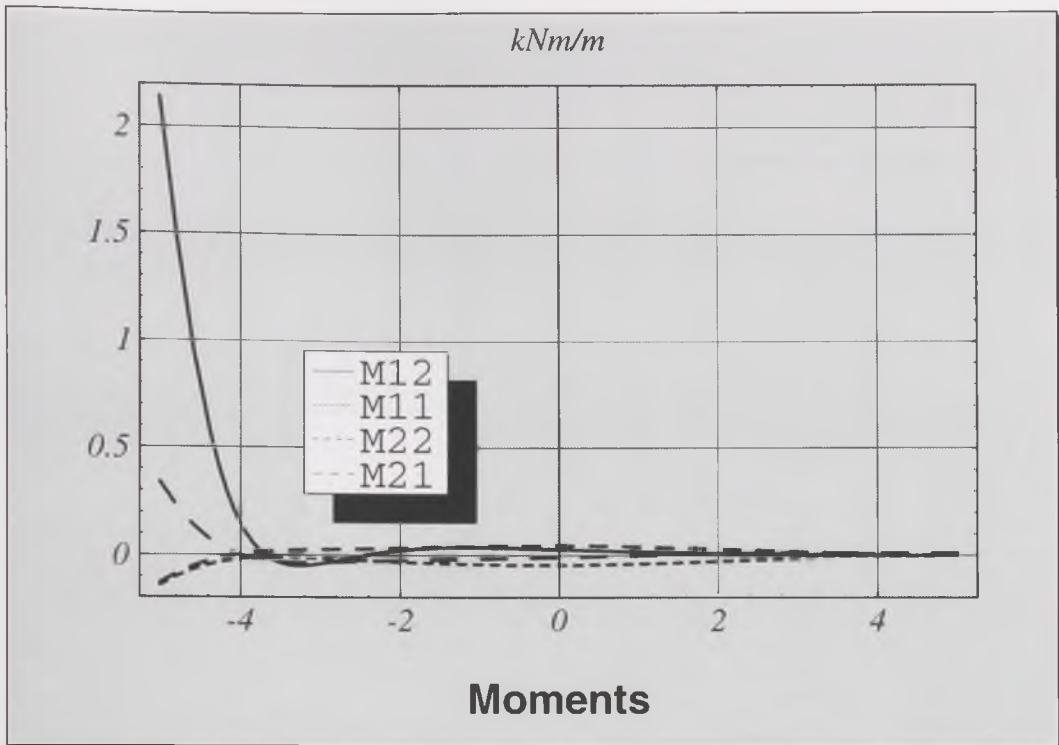
Rysunek 14.8. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



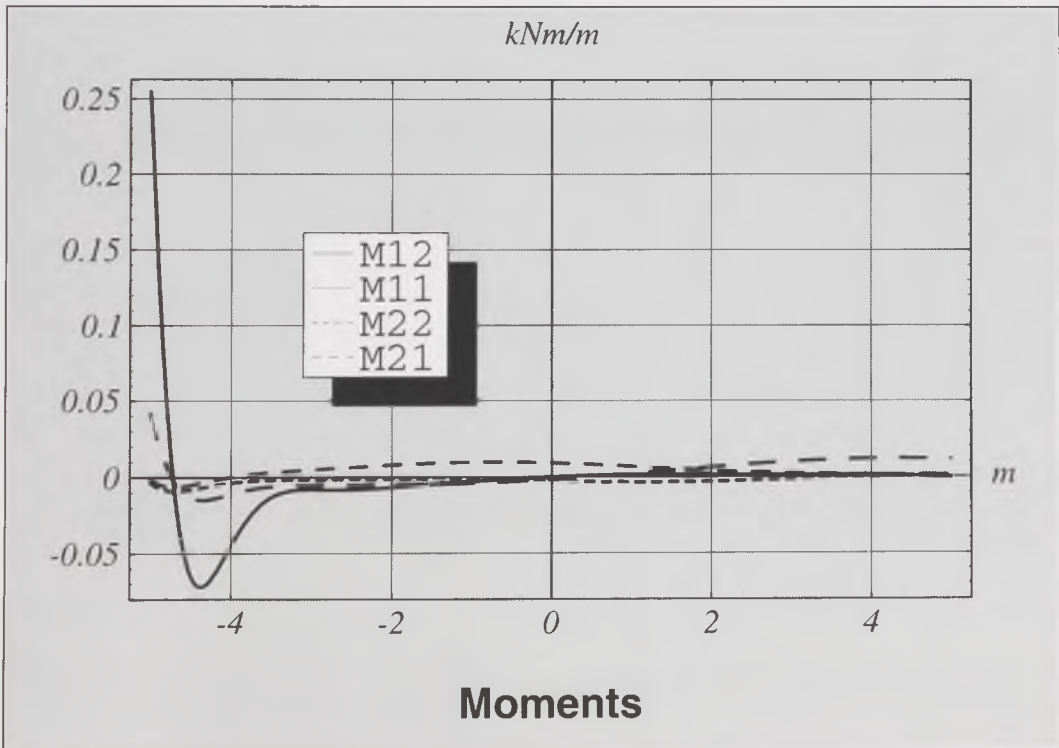
Rysunek 14.9. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń w_1^* , w_3^* na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



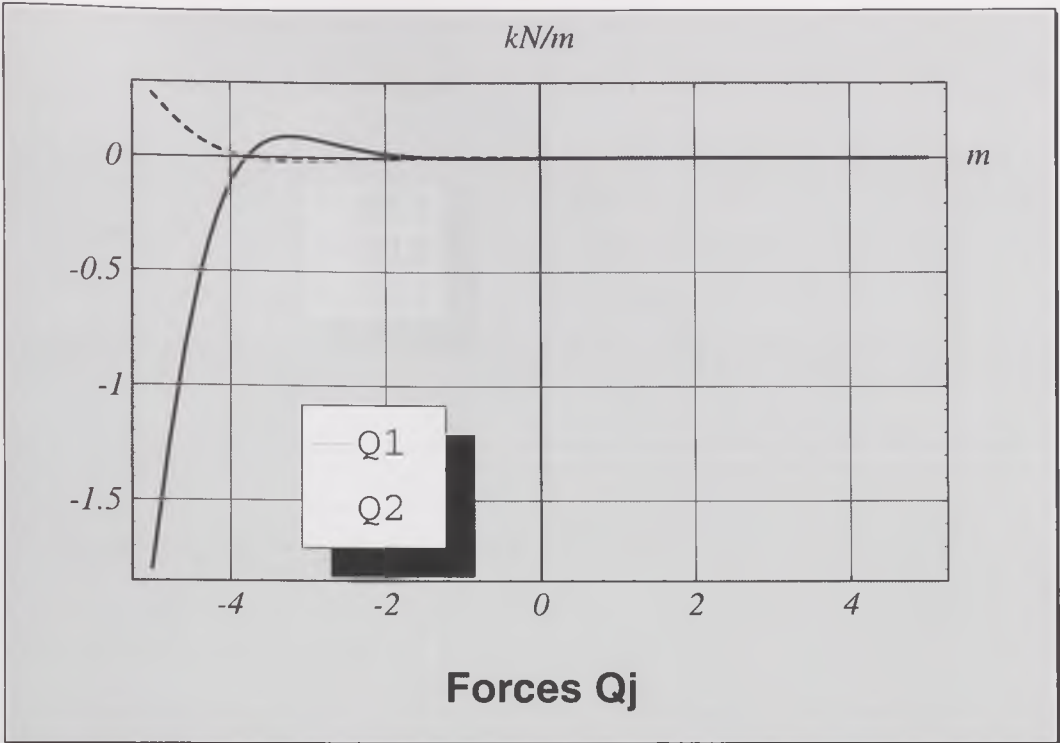
Rysunek 14.10. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń w_1^* , w_3^* na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



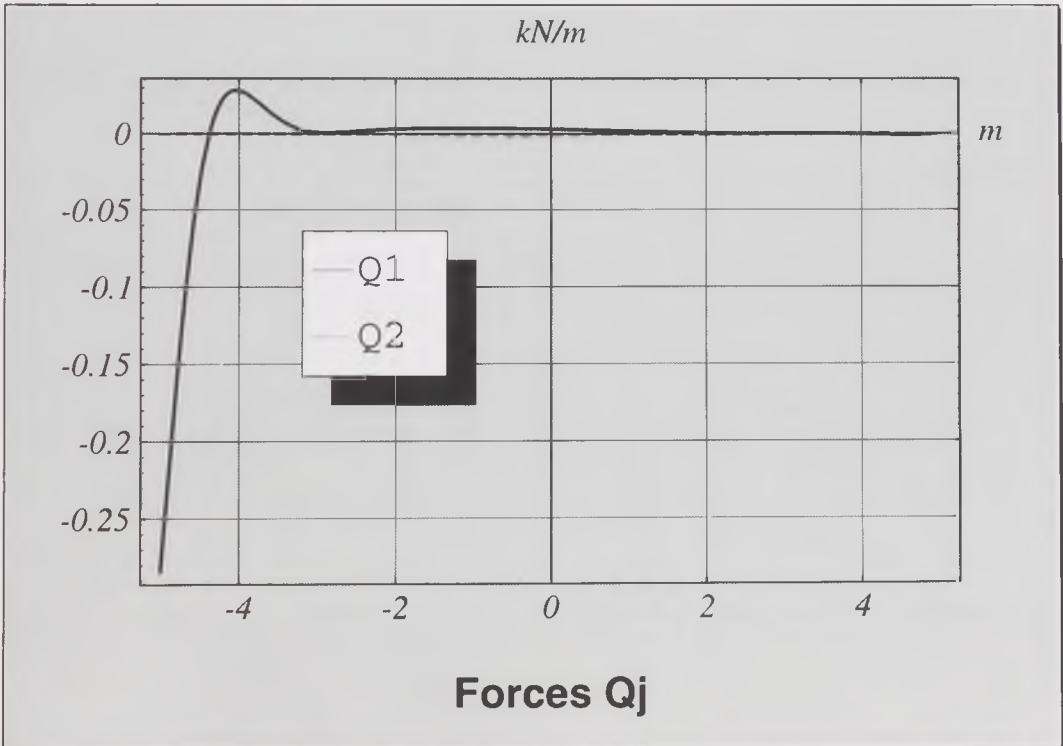
Rysunek 14.11. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{ij} na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 10 m.



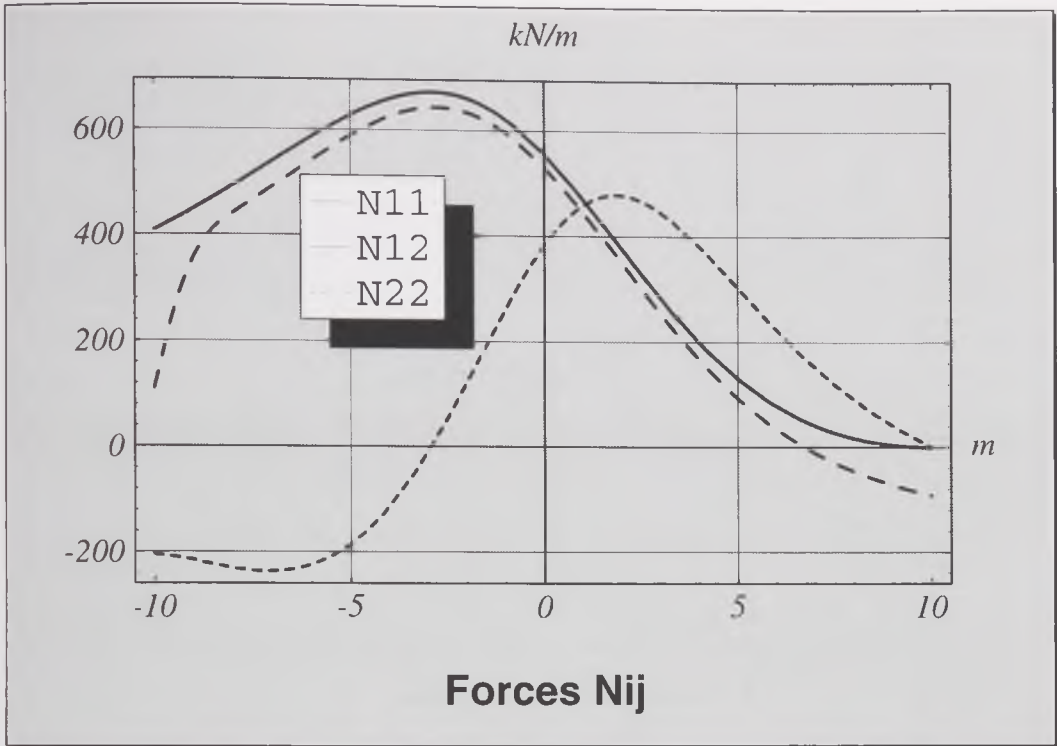
Rysunek 14.12. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{ij} na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 10 m.



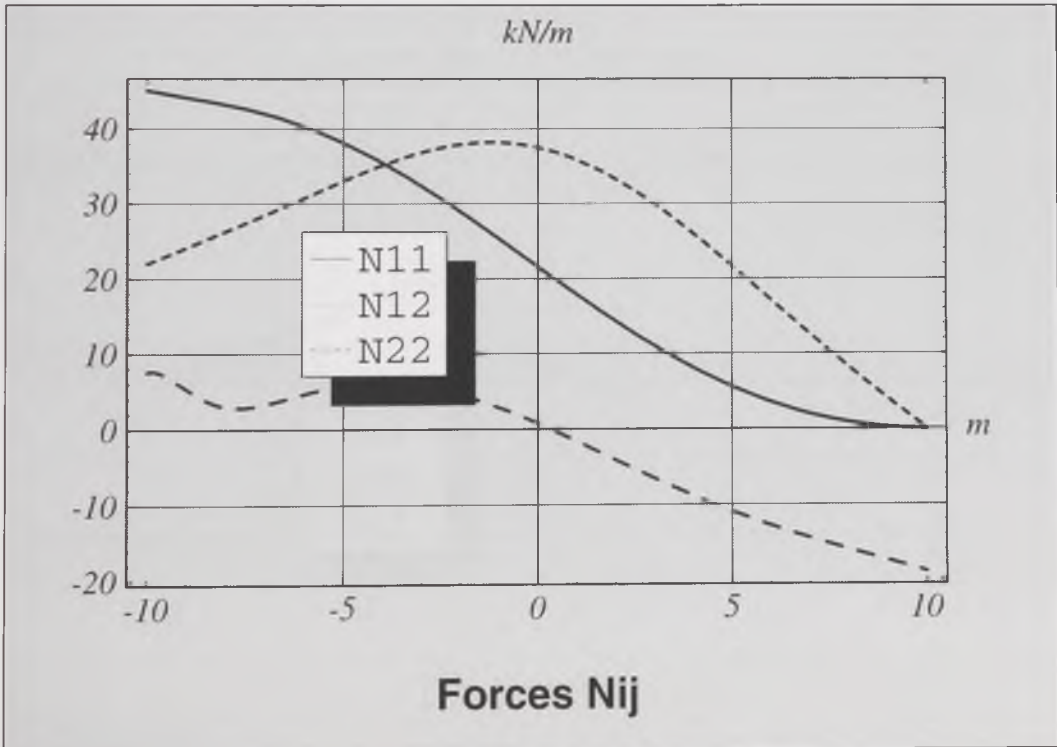
Rysunek 14.13. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił poprzecznych Q_j na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



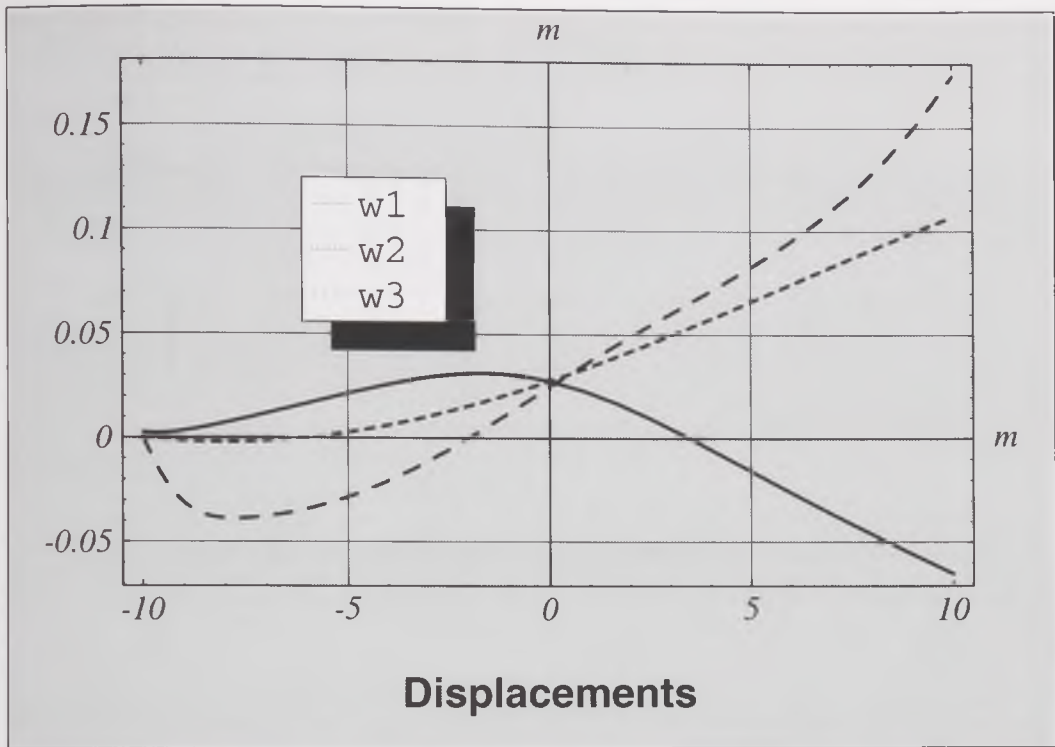
Rysunek 14.14. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił poprzecznych Q_j na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 10 m.



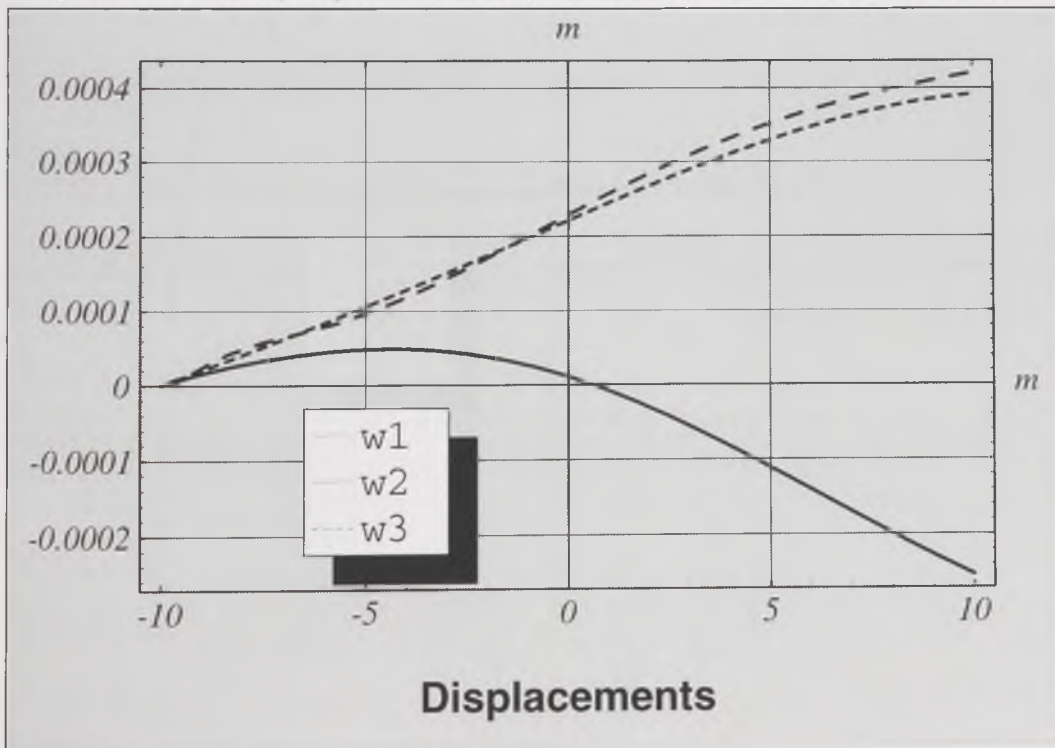
Rysunek 14.15. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



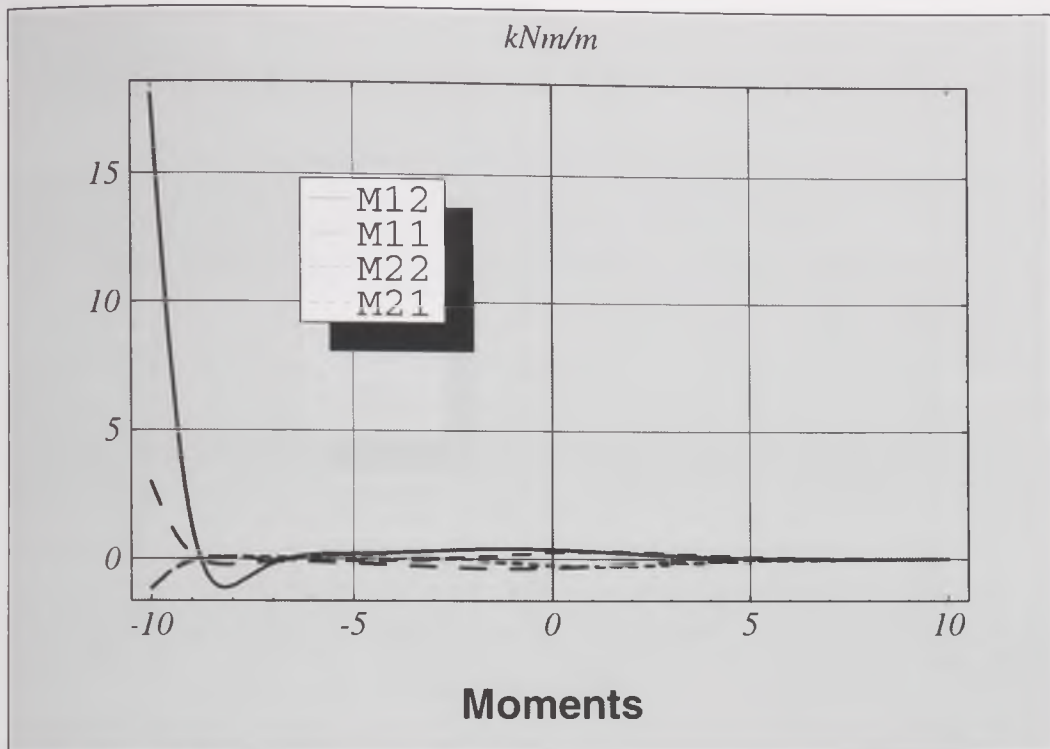
Rysunek 14.16. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił przekrojowych N_{ij} na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



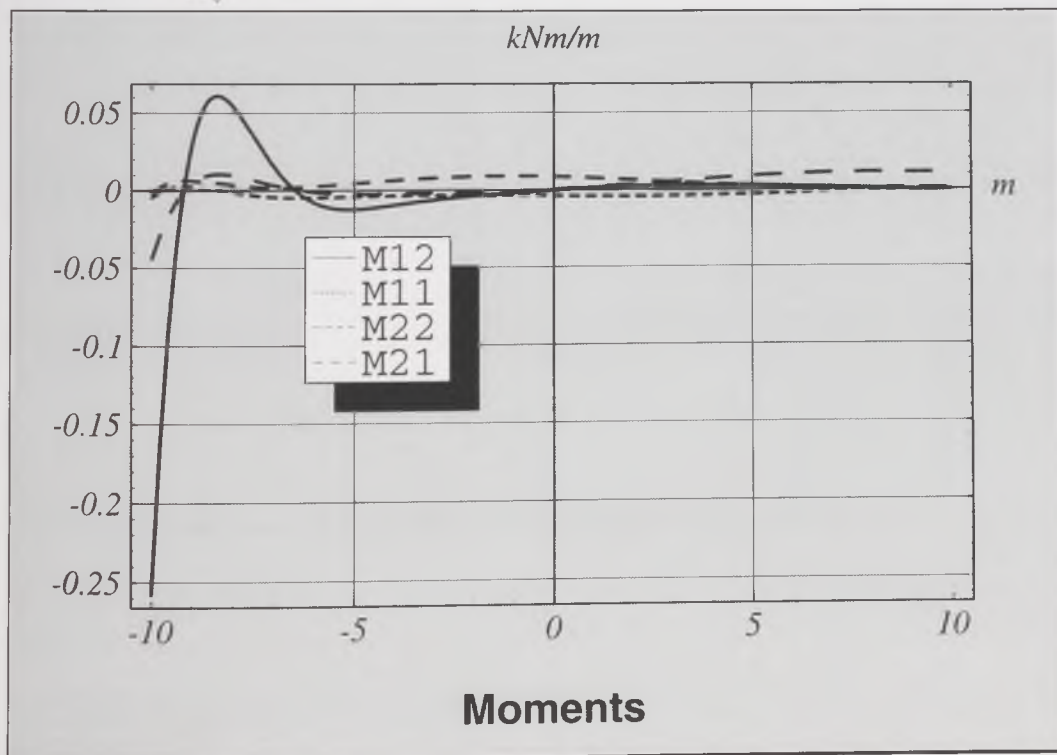
Rysunek 14.17. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń w_1^* , w_3^* na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



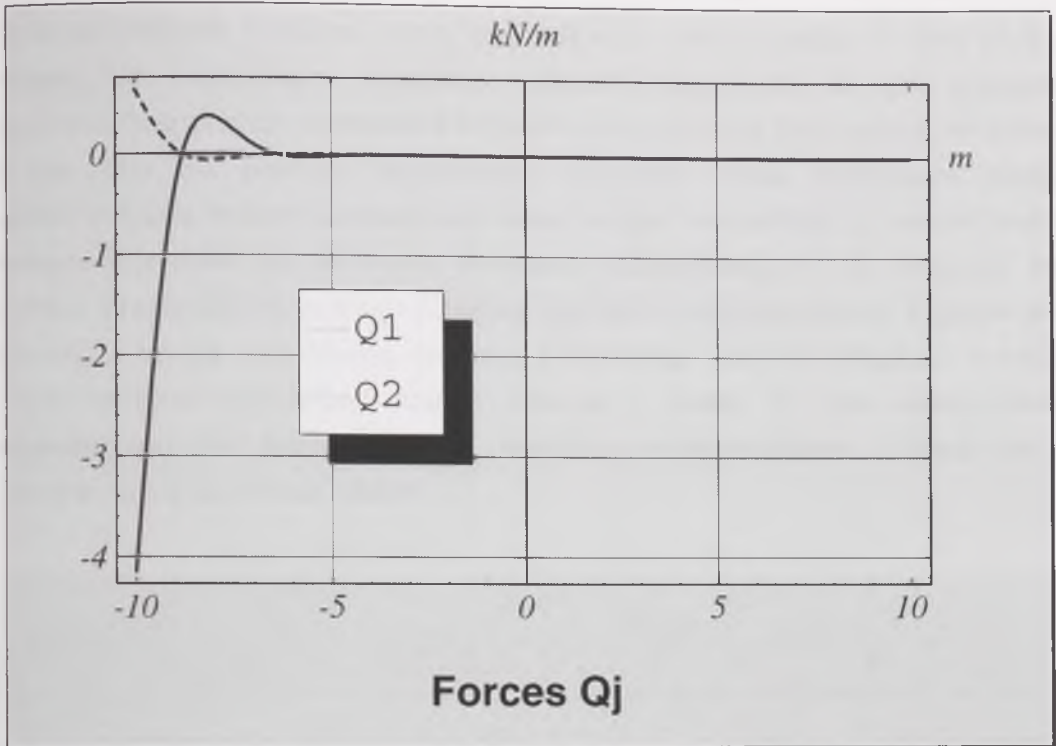
Rysunek 14.18. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości przemieszczeń w_1^* , w_3^* na obwodzie powłoki katenoidalnej o długości 20 m.



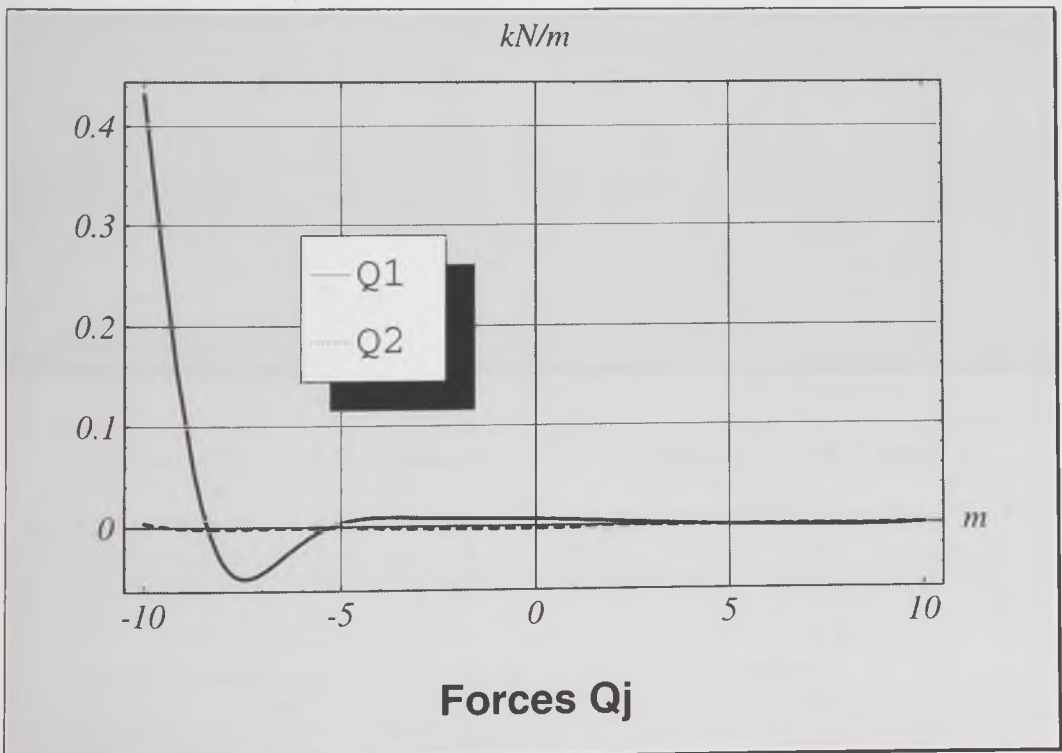
Rysunek 14.19. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{ij}^- na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 20 m.



Rysunek 14.20. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości momentów M_{ij}^- na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 20 m.



Rysunek 14.21. **Rozwiązanie analityczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił poprzecznych Q_j na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 20 m.



Rysunek 14.22. **Rozwiązanie numeryczne.** Wykres ekstremalnych wartości sił poprzecznych Q_j na obwodzie powłoki katoidalnej o długości 20 m.

Przyczyna błędnych wyników w tym przypadku nie tkwi na pewno w zbyt rzadkim podziale, lub impulsowym charakterze zaburzeń brzegowych. W tym przypadku prawdopodobnie przyczyną błędności wyników jest dodawanie liczb małych do dużych. W tym celu dla powłoki katoidalnej wykonana została następująca analiza: Zgodnie z zasadą budowy macierzy sztywności podaną w rozdziale 11 ułożone zostało równanie różnicowe dla pierwszego równania różniczkowego (11.1). Fragment tego równania przedstawiono poniżej. Zajmijmy się bliżej współczynnikiem stojącym przy pierwszej z brzegu niewiadomej równania różnicowego $w1[-1+i]$ (fragment równania z tym wyrazem wyróżniono szarym kolorem i ramką. W tym współczynniku przeanalizujemy dwa pierwsze wyrazy (wyróżnione wytłuszczeniem). Okazuje się, że wyrazy te różnią się o wiele rzędów.

In[2]:= r1r

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[2]= P1[x] + & \left(\frac{2 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^2}{a}}{2 dx (1 - ni)^2} + \frac{10 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^3}{a}}{3 a dx (1 - ni)^2} - \right. \\
 & \frac{2 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^2}{a} \operatorname{Tanh}[-] \frac{x}{a}}{a dx (1 - ni)^2} + \frac{4 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^3}{a} \operatorname{Tanh}[-] \frac{x}{a}}{3 a dx (1 - ni)^2} + \\
 & \left. \frac{2 e h ni \operatorname{Sech}[-] \frac{x^3}{a} \operatorname{Tanh}[-] \frac{x}{a}}{3 a dx (1 - ni)^2} \right) W1[-1 + i] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(- \frac{e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^2}{a}}{a (1 - ni)^2} - \frac{4 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^2}{a}}{dx (1 - ni)^2} + \frac{e h ni \operatorname{Sech}[-] \frac{x^2}{a}}{a (1 - ni)^2} + \frac{2 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^4}{a}}{a (1 - ni)^2} + \right. \\
 & \frac{2 e h ni \operatorname{Sech}[-] \frac{x^4}{a}}{a (1 - ni)^2} - \frac{5 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^3}{a}}{3 a (1 - ni)^2} - \frac{20 e h \operatorname{Sech}[-] \frac{x^3}{a}}{3 a dx (1 - ni)^2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{5 e h^3 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) + 10 e h^3 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{a}\right) + 2 e h^3 \operatorname{sech}^8\left(\frac{x}{a}\right)}{3 a^4 (1 - n_i)^2} + \frac{16 e h^3 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{x}{a}\right) + 16 e h^3 n_i \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}{3 a^4 (1 - n_i)^2} \operatorname{Wl}[i] + \\
& \frac{2 e h^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right) + 10 e h^3 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) + 2 e h^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^2 (1 - n_i)^2} + \frac{4 e h^3 \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{x}{a}\right) + 2 e h^3 n_i \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{Tanh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}{3 a^3 dx^2 (1 - n_i)^2} \operatorname{Wl}[1 + i] +
\end{aligned}$$

Pomijając stały dla obu składników dzielnik dx^2 mamy do czynienia z dwiema funkcjami:

$$f_1(a, x, h) = 2h \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f_2(a, x, h) = 10 \frac{h^3}{3a^2} \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{a}\right)$$

z analizy wykresów tych funkcji (rys 14.23) i (14.24) oraz przedstawionych poniżej wyliczeń dla $a=5 \text{ m}$, $x=10 \text{ m}$ i $h=10 \text{ cm}$, wynika, że wielkości te różnią się na tyle znacznie, że numerycznie wpływ drugiego składnika znika, a jest on istotny dla właściwego rozwiązania powłoki. Należy tu dodać, że ten mały składnik odpowiedzialny jest za prawidłowe uwzględnienie momentów zginających w rozwiązywanych równaniach.

Dodać należy, że dodatkowo funkcje te szybko maleją w miarę oddalania się od przewężenia katenoidy. Jest to dodatkowa przyczyna błędu, gdyż powoduje to, że wyrazy macierzy sztywności dla punktów w pobliżu przewężenia katenoidy są znacznie większe od odpowiednich wyrazów dla punktów bardziej oddalonych. Te dwie przyczyny składają

się na błądność rozwiązania. Warto zauważyć, że zjawisko dodawania małych liczb do dużych powtarza się w wielu aspektach w prezentowanym fragmencie równania.

```
(* Definicja funkcji f1 i f2 *)

In[13]:= f1[a_,x_,h_]=2 h Sech[x/a]^2

In[14]:= f2[a_,x_,h_]=10 h^3 Sech[x/a]^6/3/a^2;

(* Obliczenie numerycznej wartosci funkcji f1
   dla a=5, x=10 i h=1/10 z dokladnoscia 30 cyfr
   znaczących *)

In[22]:= N[f1[5,10,1/10],30]

Out[22]= 0.0141301649706328931372495311722

(* Obliczenie numerycznej wartosci funkcji f2
   dla a=5, x=10 i h=1/10 z dokladnoscia 30 cyfr
   znaczących *)

In[23]:= N[f2[5,10,1/10],30]

Out[23]= 4.7020846845485415234682071558 10-8

(* Suma wartosci funkcji f1 i f2 *)

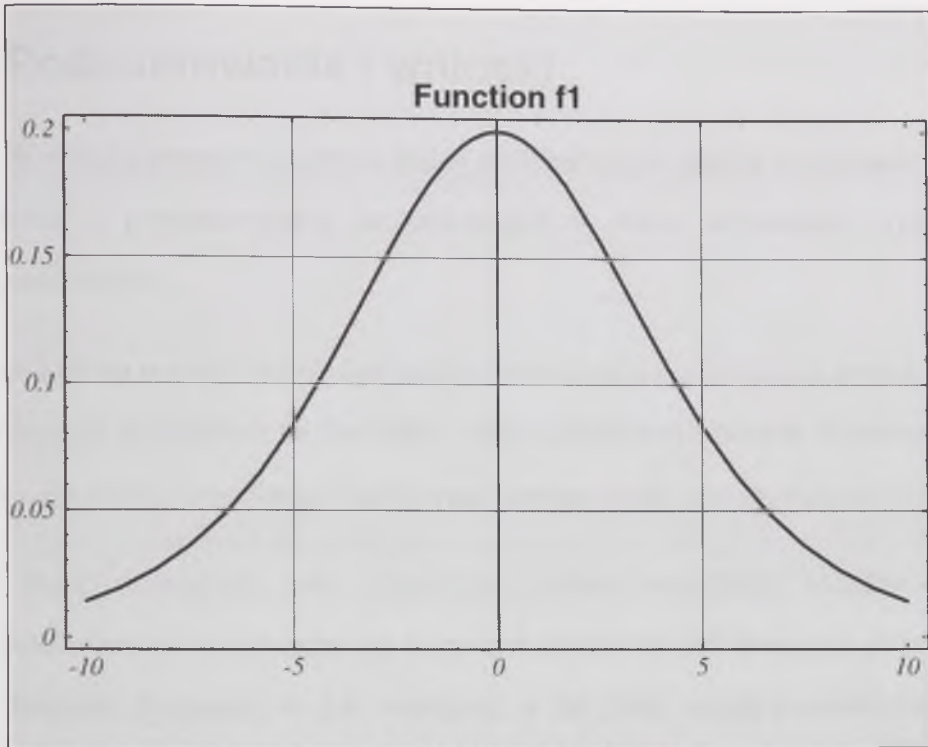
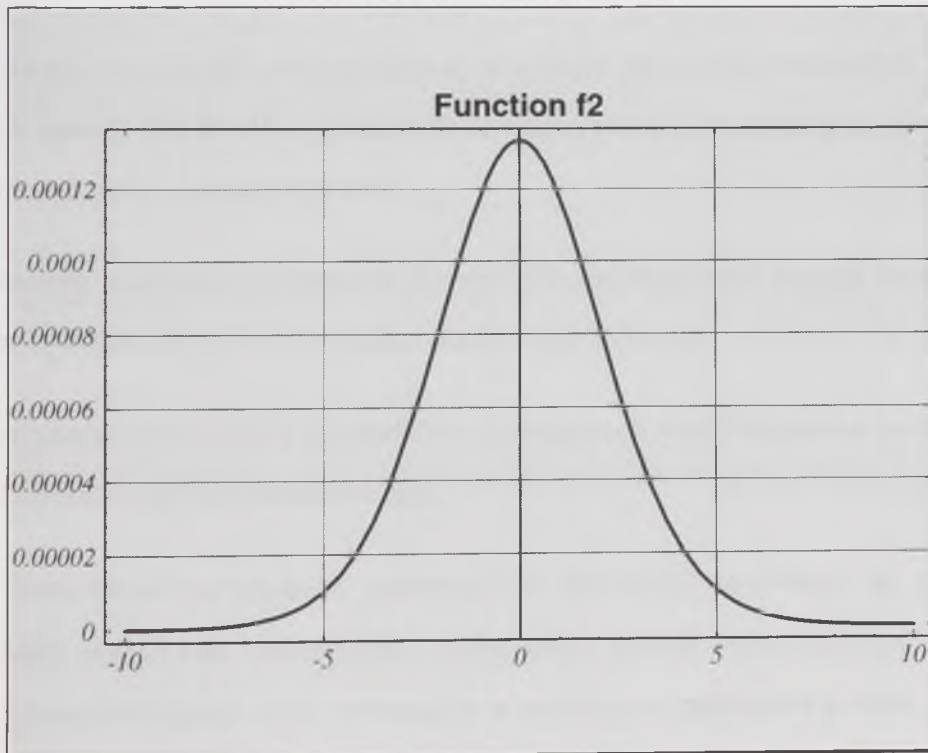
In[24]:= %22+%23

Out[24]= 0.0141302119914797386226647658543

(* Proporcja wartosci funkcji f1/f2 *)

In[25]:= %22/%23

Out[25]= 300508.51736179575658959814104
```

Rysunek 14.23. Wykres funkcji f_1 Rysunek 14.24. Wykres funkcji f_2

15. Podsumowanie i wnioski

W wyniku przeprowadzonych badań porównawczych metod rozwiązania powłok obrotowych, a przedstawionych na załączonych w pracy przykładach, wyciągnięto następujące wnioski:

- 1) Przedstawiona w pracy metoda uproszczona rozwiązania analitycznego powłoki, oparta na rozdzieleniu rozwiązania na dwa etapy - całki szczególnej równania niejednorodnego i ogólnej równania jednorodnego cząstkowego ósmego rzędu - jest metodą stabilną.
- 2) Na etapie rozwiązania całki szczególnej zadanie rozwiązania układów równań cząstkowych liniowych sprowadza się do równań różniczkowych liniowych zwyczajnych rzędu drugiego. Równania te jak wykazano w tej pracy mogą posiadać zamknięte rozwiązanie.
- 3) Zamknięte rozwiązanie całki szczególnej otrzymano dla powłok obrotowych, których południk opisany jest dowolną gładką funkcją mającą jawną formę zapisu dla dowolnego antysymetrycznego obciążenia powłoki.
- 4) Zamknięte rozwiązanie otrzymano również dla szerokiej klasy powłok obrotowych o dodatniej i ujemnej krzywiznie Gaussa obciążonych dowolnie.
- 5) Rozwiązanie zamknięte dla przypadków wspomnianych wyżej otrzymano zarówno dla sił wewnętrznych jak i dla przemieszczeń.
- 6) W pozostałych przypadkach pozostają do dyspozycji stosowane do tej pory rozwiązania przybliżone (numeryczne i analityczne) równań różniczkowych drugiego rzędu. Równania drugiego rzędu występujące w rozwiązaniu problemów powłok cienkich są na ogół stabilne. Przedstawione w pracy rozwiązanie zamknięte może być narzędziem do testowania tych rozwiązań przybliżonych.

7) Rozwiązanie całki ogólnej służy w głównej mierze do spełnienia brakujących, a niemożliwych do spełnienia na etapie rozwiązania całki szczególnej warunków brzegowych, zapewnienia ciągłości przemieszczeń na załamaniach powłoki lub opisu zaburzeń, wywołanych na przykład obciążeniem skupionym albo nieciągłym. Rozwiązanie to opisane jest szeregami hipertrygonometrycznymi, które mają charakter oscylujący

i szybko zanikający. Nałożenie na rozwiązanie podstawowe, czyli całkę szczególną spełnienia warunków brzegowych przez całkę ogólną, powoduje powstanie w tym rejonie znacznych momentów i sił poprzecznych. Z uwagi na szybko zanikający charakter szeregów hipertrygonometrycznych wpływ zaburzeń brzegowych jest jedynie lokalny. Można zatem, w ramach uproszczonej metody, spełniać warunki brzegowe dla każdego brzegu osobno.

8) Oprócz momentów pochodzących z rozwiązania całki ogólnej zadania, w powłoce ujawniają się momenty wynikające z zastosowania uściślonych związków fizycznych. Prezentowane przykłady wykazały, że uwzględnienie wpływu tensora odkształcenia błonowego, a konkretnie tensora sił przekrojowych całki szczególnej rozwiązania, może mieć znaczny wpływ na końcową wartość ekstremalnych momentów oraz wywołuje zauważalną niesymetryczność sumarycznego tensora momentów, co szczególnie ujawnia się dla długich powłok walcowych.

9) Rozwiązanie analityczne szacowane jest z pewnym nadmiarem. Nadmiar ten wynika przede wszystkim z przyjętego, w ramach uproszczonej teorii, obciążenia powłoki na etapie rozwiązania całki szczególnej bez pomniejszenia o wpływ nieznanych w tym stadium momentów i sił poprzecznych. Porównanie rozwiązania analitycznego z wynikami metody numerycznej potwierdziły wyniki badań analitycznych, że to przeszacowanie nie przekracza kilku procent nawet przy zasięgu strefy zaburzeń brzegowych na 1/3 wysokości powłoki. Należy podkreślić, że przeszacowanie tego rzędu

z punktu widzenia inżynierskiego jest zjawiskiem korzystnym. Przeszacowanie to maleje wraz z względnym zmniejszaniem strefy zaburzeń brzegowych, wzrasta natomiast w przeciwnym przypadku.

10) Z poprzedniego stwierdzenia wynika wniosek, że w przypadku nakładania się zaburzeń brzegowych na przeciwległe brzegi powłoki przedstawiona metoda uproszczona może stanowić pierwsze przybliżenie, pewnego postępowania iteracyjnego, uwzględniającego wpływ sił poprzecznych oraz momentów. Analiza tej metody może być tematem dalszych badań.

11) Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego pozwoliło stwierdzić, że oszacowanie momentów w ramach metody analitycznej jest poprawne. Prowadzone badania numeryczne potwierdziły poprawność otrzymanego rozwiązania, co do jakościowego i ilościowego przebiegu zaburzeń brzegowych.

12) W trakcie porównywania obu metod stwierdzono, przy pewnych zmianach parametrów zadania utratę stabilności rozwiązania zadania numerycznego opartego na rozwiązaniu równań przemieszczeniowych powłoki metodą różnic skończonych.

13) W wyniku przeprowadzonych analiz stwierdzono, że jedną z przyczyn błędności wyników jest oscylujący i szybko zanikający charakter zaburzeń brzegowych, który w pewnych określonych sytuacjach staje się impulsem.

14) Stwierdzono też fakt dodawania już w czasie budowy macierzy sztywności liczb różniących się znacznie rzędem wielkości. W efekcie braku poprawnych danych, uwzględniających wpływ małych wielkości jakimi są w powłokach momenty i siły poprzeczne, następuje utrata stabilności rozwiązania i w efekcie błędność wyników.

15) Zasadnicza przyczyna wymienionych powyżej zjawisk wynika z niemożności rozdzielania w ramach zastosowanej przemieszczeniowej metody numerycznej dominujących w rozwiązaniu sił przekrojowych od momentów i sił poprzecznych. Z kolei sam proces obliczeniowy sprowadza się tu do rozwiązania numerycznego równań różniczkowych, których rząd sięga 4. Uzyskanie poprawnego rozwiązania tego typu zadania nawet dla prostych przypadków jest trudne. Wniosek ten rozciągnąć można na większość metod numerycznych w wersji przemieszczeniowej.

16) Stwierdzić należy, że trudności te mogą być pokonane, w niektórych przypadkach, na drodze powiększenia zagęszczenia siatki dyskretnej oraz zwiększania precyzji obliczeń. Łączy się to ze znacznym zwiększeniem nakładów obliczeniowych. Dodać tu należy, że w ramach prowadzonych obliczeń zagadnienie to udało się sprowadzić do jednowymiarowego i dzięki temu można było zastosować, wydawałoby się, gęsty podział bo około 300 punktów wzdłuż południka. W efekcie do rozwiązania pozostał układ około 900 równań liniowych. W przypadku zagadnień nieliniowych zadanie jest zawsze dwuwymiarowe. Wtedy liczba równań rośnie z kwadratem. Mimo stale wzrastającej mocy i pojemności komputerów problem ten jest ważki.

17) Należy zatem podsumowując stwierdzić, że z uwagi na specyfikę zagadnienia powłok związaną ze zespoleniem w równaniach równowagi dużych sił przekrojowych z małymi wielkościami jakimi są momenty i siły poprzeczne podejście w ramach proponowanej metody analitycznej, opartej na oszacowaniu w pierwszej kolejności sił przekrojowych i wywołanych nimi przemieszczeń, a w drugiej momentów i sił poprzecznych wywołanych spełnieniem warunków brzegowych, jest celowe, bo daje stabilne rozwiązanie. Natomiast rozwiązanie numeryczne jest zawsze, w związku z powyższymi faktami zagrożone utratą stabilności.

18) Jak wspomniano we wstępie praca nie ma na celu podważenia sensu prowadzenia badań numerycznych zagadnień powłok. Celem jest jednak wskazanie na niebezpieczeństwa bezkrytycznego zawierzenia tym rozwiązaniom reklamowanym jako „uniwersalne”. Zawierzenie to prowadzi niejednokrotnie do stwierdzeń o niecelowości poszukiwania rozwiązań analitycznych z uwagi na uzyskanie ich drogą numeryczną. Należy tu podkreślić, że nie ma rozwiązań i metod uniwersalnych. Każda metoda oparta jest na pewnych założeniach upraszczających, które zawężają zakres jej stosowania.

19) Praca niniejsza prezentując proste w formie rozwiązanie zamknięte obciążenia asymetrycznego szerokiej klasy powłok dostarcza sprawne narzędzie zarówno do testowania metod numerycznych jak i dla praktyki inżynierskiej. Oparta jest bowiem na stabilnym rozwiązaniu analitycznym.



Spis literatury

- [1] W. Abramek, J. Centkowski: *Nośność i stateczność remontowanej powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [2] F. Andermann, L. Fedorowicz, J. Fedorowicz: *Numeryczna realizacja iteracyjnego procesu współpracy dwóch substruktur: budowli i podłoża*, Sprawozdanie z pracy BK-72/RB-2/94, Zadanie 1, Politechnika Śląska, Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, Gliwice, (1994)
- [3] W. Baran: *Transformacja sił wewnętrznych pewnej klasy powłok*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [4] E. Baron: *Wstęp do statyki tarcz grubych*, Praca Doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice, (1994)
- [5] St. Bielak: *Teoria powłok część I. Podstawy geometryczne i fizyczne*, Politechnika Śląska w Gliwicach, Gliwice, (1983)
- [6] St. Bielak: *Konstrukcje powłokowe część I. Podstawy geometryczne i fizyczne*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole, (1984)
- [7] St. Bielak: *Konstrukcje powłokowe część II. Teoria i zastosowania*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole, (1984)
- [8] St. Bielak: *Teoria powłok, część II. Teoria i zastosowania*, Politechnika Śląska w Gliwicach, Gliwice, (1988)
- [9] St. Bielak: *Teoria powłok*, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Studia i Monografie, zeszyt 30, Opole (1990)
- [10] St. Bielak, R. Walentyński: *Konsekwencje założeń warunków brzegowych klasycznej teorii płyt na przykładzie rozwiązania metodą różnicową*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 33, Numer kolejny 173/1992, Opole, (1992)

- [11] St. Bielak, R. Walentyński: *Powłoka katenoidalna- opis geometryczny, rozwiązanie ogólne umownego stanu blonowego i przykład dla osiowo-symetrycznego obciążenia ciężarem własnym*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 36, Numer kolejny 188/1993, Opole, (1993)
- [12] St. Bielak, R. Walentyński: *Parametryzacja półgeodezyjna powłoki obrotowej*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [13] St. Bielak, R. Walentyński: *Niestabilność rozwiązania powłoki obrotowej metodami numerycznymi*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [14] St. Bielak: *Nieliniowa teoria powłok cz. I*, Wydawnictwo TiT, Desktop Publishing, Opole, (1994)
- [15] T. Burczyński: *Metoda elementów brzegowych w wybranych zagadnieniach analizy i optymalizacji układów odkształcalnych*, Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Mechanika, Zeszyt 97, Gliwice, 1989
- [16] *Derive - a Mathematical Assistant, Version 2.01*, Soft Warehouse, Inc., Honolulu, Hawaii, USA, (1988) and (1990)
- [17] W. Flügg e: *Stresses in Shells*, Springer - Verlag, New York, (1967), w polskim tłumaczeniu przez M. Arcisz, Arkady, Warszawa, (1972)
- [18] K. Girkmann: *Flächentragwerke Einführung in die Elastostatic der Scheiben, Platten, Shalen und Faltwerke*, Springer, Wien, (1956) w polskim tłumaczeniu przez R. Dąbrowskiego, Arkady, Warszawa, (1957)
- [19] M. Golczyk, J. Ledwoń: *Chłodnie kominowe i wentylatorowe*, Arkady, Warszawa, (1967)
- [20] A. L. Goldenweizer: *Teoria uprugich tonkich oboloczek*, wydanie drugie, Nauka, Moskwa, (1976)
- [21] St. Gołąb: *Rachunek tensorowy*, wydanie drugie, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1966)

- [22] N. Jefimow, E. R. Rozendorn: *Liniewaja algiebra i mnogomiernaja gieometria*, Nauka, Moskwa, (1970) w polskim tłumaczeniu przez T. Józefiaka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1974)
- [23] B. Jędraszczyk: *Siły przekrojowe w powłoce hiperboloidalnej chłodni kominowej od obciążenia temperaturą*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [24] E. Kamke: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Academische Verlagsresellschaft, Leipzig, (1959) w rosyjskim tłumaczeniu przez S. W. Fomina, GIFML, Moskwa, (1961)
- [25] E. Karaśkiewicz: *Zarys teorii wektorów i tensorów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1994)
- [26] Z. Kączkowski: *Płyty - obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa, (1980)
- [27] G. Kirchhoff, J. Reine: *Angew. Mathem.*, 40, (1850)
- [28] G. Kirchhoff: *Vorlesungen über mathematische Physic. Band 1, Mechanik*, (1876)
- [29] Cz. Kłoś, A. Mitzel, J. Suwalski: *Zbiorniki na cieczy*, Arkady, Warszawa, (1961)
- [30] J. Krawczyk: *Teoria powłok. Ujęcie symetryczne nieliniowości geometrycznej*, Studia i monografie nr 212, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Opolu, Opole (1993)
- [31] J. Krawczyk: *O pewnych deformacjach powłok*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 37, Numer kolejny 198/1994, Opole, (1994)
- [32] J. Ledwoń: *Żelbetowe chłodnie kominowe. Obliczanie i konstrukcja*, Arkady, Warszawa, (1959)
- [33] H. Leszczyński: *Metody różnicowe dla równań różniczkowych zwyczajnych z impulsami*, referat na XXIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej Zastosowań Matematyki w Zakopanem-Kościelisku, wrzesień 1994 roku

- [34] A. Love: *On the small free vibrations and deformations of thin elastic shell*, Phil. Trans. Roy. Soc., 179 A, (1888)
- [35] A. Love: *Mathematical theory of elasticity*, Cambridge, (1927)
- [36] Z. E. Mazurkiewicz, R. T. Nagórski: *Powłoki obrotowe sprężyste*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1987)
- [37] W. Nowacki: *Dźwigary powierzchniowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1979)
- [38] A. Palczyński: *Hiperboliczne modele przepływu ciepła*, referat na XXIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej Zastosowań Matematyki w Zakopanem-Kościelisku, wrzesień 1994 roku
- [39] Z. Pełka: *Obliczanie numeryczne ustrojów prętowych i powierzchniowych - metoda wieloboku sznurowego*, Wydawnictwo Czasopism Technicznych NOT, Warszawa, (1965)
- [40] W. Pietraszkiewicz: *Geometrically non-linear theories of thin elastic shells*, Advances in Mechanics, Tom 12, vol. 1, (1989)
- [41] G. Rakowski i inni: *Mechanika budowli z elementami ujęcia komputerowego*, część II., Arkady, Warszawa, (1984)
- [42] T. Smoleń: *Wariacyjne ujęcie zagadnień powłok lepkosprężystych*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, seria Budownictwo, zeszyt 15, Numer kolejny 59/1981, Opole, (1981)
- [43] J. Szymczak: *Wpływ parametryzacji na rozwiązanie powłoki hiperboloidalnej*, Praca Doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice, (1988)
- [44] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, Toronto, London, (1959), w polskim tłumaczeniu przez J. Szymkiewicz, Arkady, Warszawa, (1962)
- [45] R. Walentyński: *Statyka powłok obrotowo-symetrycznych wychylonych*, referat wygłoszony na zebraniu Komisji Inżynierii Budowlanej Oddziału Polskiej Akademii Nauk w Katowicach w dniu 24 lutego 1993 roku w Gliwicach, Prace Komisji Naukowych, Zeszyt Nr 18, Katowice, (1994)

- [46] R. Walentyński: *Rozwiązanie metodami statyki równań różniczkowych powłoki obrotowo-symetrycznej*, referat na XXII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej Zastosowań Matematyki w Zakopanem-Kościelisku, wrzesień 1993 roku, (streszczenie publikowane w materiałach konferencyjnych)
- [47] R. Walentyński: *O rozwiązaniu układów równań różniczkowych powłoki obrotowej*, referat na XXIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Szkoleniowej Zastosowań Matematyki w Zakopanem-Kościelisku, wrzesień 1994 roku, (streszczenie publikowane w materiałach konferencyjnych)
- [48] R. Walentyński: *An Explicit Solution of a Particular Integral for Shells of Revolution under Non-Axially Symmetrical Loadings*, manuskrypt (1995)
- [49] St. Wolfram: *Mathematica - a System for Doing Mathematics by Computer*, version 2.21, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Champaign Illinois, (1991)
- [50] Cz. Woźniak: *Nieliniowa teoria powłok*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, (1966)
- [51] O. C. Zienkiewicz: *Metoda Elementów Skończonych*, Arkady, Warszawa, (1972)
- [52] O. C. Zienkiewicz: *The Finite Element Method*, London, (1977)

