Что общего имеют энгелевые и полугрупповые тождества?

Olga Macedońska

Institute of Mathematics, Silesian University of Technology,
Gliwice 44-100, Poland
e-mail: o.macedonska@polsl.pl

Аннотация

Статья связана с вопросом Р. Бернса: *Что общего имеют энгелевые и полугрупповые тождества гарантируя, что конечно порожденные локально ступенчатые группы, им удовлетворяющие, содержат нильпотентную подгруппу конечного индекса?* Мы показываем, что энгелевые и полугрупповые тождества имеют одинаковую так называемую *энгелевую конструкцию*, а каждая конечно порожденная локально ступенчатая группа, удовлетворяющая тождеству с такой конструкцией, должна содержать нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Abstract

The work is inspired by a question of R.Burns: *What do the Engel laws and positive laws have in common that forces finitely generated locally graded groups satisfying them to be nilpotent-by-finite?* The answer is that these laws have the same so called Engel construction.

Вступление

Пусть $F = \langle x, y \rangle$ — это свободная группа ранга 2, u — слово, а S — подмножество в F.

Определение 1. *Будем говорить, что тождество* $w \equiv 1$ *имеет конструкцию* $u \,\widetilde{\in}\, S$ *если оно эквивалентно тождеству* $u \equiv s$ *для некоторого* $s \in S$.

Слова с одинаковой конструкцией обладают некоторыми общими свойствами. Например, для тождества с конструкцией $[x,y] \mathrel{\widetilde{\in}} F''$ необходимо, чтобы группа G, ему удовлетворяющая, имела совершенный коммутант, т.е. $G' = G''$.

Будем обозначать $x^{y^i} = y^{-i} x\, y^i$, $[x,y] = x^{-1} y^{-1} x y$, $[x,\, {}_i y]$ — это энгелевый коммутатор $[...[[x,y],y],...,y]$, где y повторяется i раз и $[x,\, {}_0 y] = x$. Через E_n обозначим следующую подгруппу, порожденную энгелевыми коммутаторами:

$$E_n = \langle\, [x,\, {}_i y],\ 0 \leq i \leq n \rangle.$$

Мы покажем, что каждое бинарное коммутаторное тождество эквивалентно тождеству со следующей, так называемой, **энгелевой конструкцией**

$$[x,y]^{k_1}\, [x,\, {}_2 y]^{k_2} ...\ [x,\, {}_n y]^{k_n} \mathrel{\widetilde{\in}} E_n'.$$

Пусть $w \equiv 1$ — это бинарное тождество, $\mathfrak{V}$ — многообразие, им определяемое. Докажем следующее

- Каждая конечно порожденная группа в $\mathfrak{V}$ имеет конечно порожденный коммутант тогда и только тогда, когда тождество $w \equiv 1$ влечет тождество со следующей энгелевой конструкцией

$$[x,\, {}_n y] \mathrel{\widetilde{\in}} E_{n-1}. \tag{1}$$

- Полугрупповые тождества и энгелевые тождества имеют энгелевую конструкцию типа (1). Тождество $x^k \equiv 1$ тоже влечет тождество с энгелевой конструкцией (1).

- Каждая конечно порожденная локально ступенчатая группа с тождеством, имеющим энгелевую конструкцию типа (1), является почти нильпотентной.

Энгелева конструкция тождеств

Покажем, что каждое бинарное коммутаторное тождество эквивалентно тождеству $w \equiv 1$, в котором для некоторого n слово w является произведением энгелевых коммутаторов $[x,\, {}_i y]$, $1 \leq i \leq n$.

Теорема 1. *Каждое бинарное коммутаторное тождество $w \equiv 1$ имеет следующую энгелеву конструкцию:*

$$[x,y]^{k_1}\, [x,\, {}_2 y]^{k_2} ...\ [x,\, {}_n y]^{k_n} \mathrel{\widetilde{\in}} E_n', \quad k \geq 0,\ k_i \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $w \equiv 1$ — коммутаторное тождество. Заметим, что F' лежит в нормальном замыкании элемента x в F, которое свободно порождено всеми элементами вида x^{y^i}, $i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, w является произведением некоторых x^{y^i} с $-m \leq i \leq -m+n$. Сопряжение при помощи y^m дает нам эквивалентное тождество, в котором $w \in \langle x^{y^i},\ 0 \leq i \leq n \rangle$. В этой подгруппе мы можем заменить свободные образующие x^{y^i} на $x^{-1}x^{y^i} = [x, y^i]$, тогда получим

$$w \in \langle x^{y^i}, 0 \leq i \leq n \ \rangle = \langle x,\ [x, y^i],\ 1 \leq i \leq n \ \rangle. \tag{3}$$

Докажем по индукции, что $\langle\, x,\ [x, y^i],\ 1 \leq i \leq n \rangle \subseteq E_n$, показывая для всех $k > 0$, что $[x, y^k] \in E_{k-1}[x,\ _k y]$. Для $k = 1$ это очевидно. Предположим теперь, что $[x, y^k] \in E_{k-1}[x,\ _k y]$. Если заменить $x \to [x, y]$ то

$$[[x, y], y^k] \in E_k[x,\ _{k+1}y]. \tag{4}$$

Теперь, применяя индуктивное предположение и его следствие к коммутаторному тождеству

$$[x, y^{k+1}] = [x, y^k]\, [x, y]\, [[x, y], y^k], \tag{5}$$

мы получим для $k \geq 0$, что

$$[x, y^{k+1}] \in E_k[x,\ _{k+1}y]. \tag{6}$$

На основании (3) получаем

$$w \in \langle x,\ [x, y^i],\ 1 \leq i \leq n \ \rangle \subseteq E_n.$$

Следовательно, каждое коммутаторное тождество эквивалентно тождеству $w \equiv 1$, в котором для некоторого n слово w является произведением энгелевых коммутаторов $[x,\ _i y]$, $1 \leq i \leq n$.
Упорядочивая эти коммутаторы *modulo* E'_n, мы получаем тождество со следующей конструкцией:

$$[x, y]^{k_1}\, [x,\ _2y]^{k_2} \ldots\ [x,\ _ny]^{k_n}\ \widetilde{\in}\ E'_n, \quad k_i \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

$\square$

Свойство Милнора и $\mathfrak{R}$-тождества

Для рассмотрения тождеств специального вида напомним определение свойства Милнора для групп, название которого было предложено Ф.Поинт в [11].

Определение 2. *Группа G обладает свойством Милнора, если для любых элементов g, $h \in G$ подгруппа $\langle h^{-i} g\, h^i,\ i \in \mathbb{Z}\rangle$ является конечно порожденной.*

Заметим, что группа $\langle h^{-i} g\, h^i,\ i \in \mathbb{Z}\rangle$ инвариантна относительно сопряжения при помощи h, а значит, что если она конечно порождена, то равна $\langle h^{-i} g\, h^i,\ i \in \mathbb{N}\rangle$.
Название свойства мотивировалось результатом Милнора ([8] Lemma 3), который доказал, что если конечно порожденная группа G обладает этим свойством, A — абелева нормальная подгруппа в G такая, что G/A циклическая, то A является конечно порожденной. В 1976 году Россет заметил, что предположение абелевости A может быть отброшено и доказал следующие факты, которые мы приводим.

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная группа со свойством Милнора.*
(i) *Тогда коммутант G' конечно порожден.*
(ii) *Если G/N циклическая, то подгруппа N конечно порождена.*
(iii) *Если G/N полициклическая, то подгруппа N конечно порождена.*

Доказательство. Пункты (i) и (ii) доказаны в ([12] Lemmas 2,3), ([7] Lemma 3, Corollary 4). В статье [7] группы со свойством Милнора называются *restrained.* Докажем (iii). Если G/N полициклическая, то она имеет конечный нормальный ряд с циклическими факторами $G = N_0 \rhd N_1 \rhd \cdots \rhd N_m = N$. Теперь, посредством m последовательных применений (ii) мы заключаем, что подгруппа N конечно порождена. $\square$

Определим класс тождеств, называемых $\mathfrak{R}$-тождествами (от *restraining*), и покажем, что каждая группа с $\mathfrak{R}$-тождеством обладает свойством Милнора.

Определение 3. *Тождество называется $\mathfrak{R}$-тождеством, если оно влечет тождество со следующей энгелевой конструкцией, в которой $k_i \in \mathbb{Z}, n \geq 1$:*

$$[x, y]^{k_1}\, [x,\, _2y]^{k_2} \ldots\, [x,\, _{n-1}y]^{k_{n-1}}\, [x,\, _ny]\ \widetilde{\in}\ E'_{n-1}. \tag{7}$$

Пример 1. *Видно, что n-энгелево тождество* $[x,\ {}_n y] \equiv 1$ *является* $\mathfrak{R}$-*тождеством.*

Пример 2. *Каждое тождество вида* $x^k \equiv 1$ *является* $\mathfrak{R}$-*тождеством, так как оно влечет тождество* $[x, y^k] \equiv 1$, *из которого по* (6) *следует тождество типа* (7).

Теорема 2. *Тождество является* $\mathfrak{R}$-*тождеством тогда и только тогда, когда каждая группа, ему удовлетворяющая, обладает свойством Милнора.*

Доказательство. Обозначим $P_k = \langle x,\ x^{y^i},\, 1 \le i \le k\ \rangle$ и покажем, что $[x,\ {}_k y] \in P_{k-1} x^{y^k}$.
Для $k = 1$ это ясно. Предположим, что $[x,\ {}_k y] \in P_{k-1} x^{y^k}$, тогда

$$[x,\ {}_{k+1} y] \in (P_{k-1} x^{y^k})^{-1} (P_{k-1} x^{y^k})^y \subseteq P_k x^{y^{k+1}}.$$

Отсюда следует для $k \ge 0$, что $E_k \subseteq P_k$. Это влечет равенство $E_k = P_k$, потому что

$$E_k \subseteq P_k = \langle x,\ x^{y^i},\, 1 \le i \le k\ \rangle \overset{(3)}{=} \langle x,\ [x, y^i],\, 1 \le i \le k\ \rangle \overset{(6)}{\subseteq} E_k.$$

Следовательно, конструкция $[x,\ {}_n y] \mathrel{\widetilde{\in}} E_{n-1}$ эквивалентна $x^{y^n} \mathrel{\widetilde{\in}} P_{n-1}$, т.е.

$$x^{y^n} \mathrel{\widetilde{\in}} \langle\, x,\, x^y, x^{y^2}, ..., x^{y^{n-1}} \rangle. \tag{8}$$

Благодаря возможности сопряжения при помощи y^{-n}, получаем, что каждое $\mathfrak{R}$-тождество также имеет конструкцию

$$x \mathrel{\widetilde{\in}} \langle\, x^{y^{-n}},\, x^{y^{-(n-1)}}, ..., x^{y^{-2}}, x^{y^{-1}} \rangle, \tag{9}$$

и, если заменить $y \to y^{-1}$, то получим

$$x \mathrel{\widetilde{\in}} \langle\, x^y,\, x^{y^2},\, ..., x^{y^{(n-1)}}, x^{y^n} \rangle. \tag{10}$$

Пусть G — относительно свободная группа, свободно порожденная элементами $a, b, ...$ и удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству. Тогда (10) влечет

$$a \in \langle\, a^b,\, a^{b^2},\, ..., a^{b^{(n-1)}}, a^{b^n} \rangle, \tag{11}$$

Если мы сопряжем (11) при помощи b^{-1}, то получим

$$a^{b^{-1}} \in \langle\, a,\ a^{b}, , ..., a^{b^{(n-2)}}, a^{b^{(n-1)}} \rangle \overset{(11)}{\subseteq} \langle\, a^{b},\ a^{b^2},\ ..., a^{b^{(n-1)}}, a^{b^n} \rangle.$$

Повторяя сопряжение при помощи b^{-1}, получим для каждого $i>0$,

$$a^{b^{-i}} \in \langle\, a^{b},\ a^{b^2},\ ..., a^{b^{(n-1)}}, a^{b^n} \rangle. \tag{12}$$

Подобным образом для (9) имеем

$$a \in \langle\, a^{b^{-n}},\ a^{b^{-(n-1)}}, ..., a^{b^{-2}}, a^{b^{-1}} \rangle. \tag{13}$$

Сопряжение при помощи b дает

$$a^{b} \in \langle\, a^{b^{-n+1}},\ a^{b^{-n}}, ..., a^{b^{-1}}, a \rangle \overset{(13)}{\subseteq} \langle\, a^{b^{-n}},\ a^{b^{-n+1}}, ..., a^{b^{-1}} \rangle.$$

Повторяя сопряжение, мы получим для каждого $i>0$, что

$$a^{b^{i}} \in \langle\, a^{b^{-n}},\ a^{b^{(-n+1)}}, ...,\ a^{b^{-1}} \rangle,$$

что вместе с (12) показывает в итоге, что подгруппа

$$\langle b^{-i} a\, b^{i},\quad i\in\mathbb{Z}\rangle = \langle\, a^{b^{-n}}, a^{b^{-(n-1)}}, \dots,\ a^{b^{-1}},\ a,\ \ a^{b}, ..., a^{b^{n-1}}, a^{b^n} \rangle \tag{14}$$

является конечно порожденной. Поскольку для каждых g, h в любой группе, удовлетворяющей $\mathfrak{R}$-тождеству, подгруппа $\langle h^{-i} g\, h^{i},\ i\in\mathbb{Z}\rangle$ является образом $\langle\, b^{-i} a\, b^{i},\ i\in\mathbb{Z}\,\rangle$, мы заключаем, что $\mathfrak{R}$-тождество влечет свойство Милнора.

Обратно, пусть G — относительно свободная группа со свободными образующими a, b. Если подгруппа $\langle b^{-i} a\, b^{i},\ i\in\mathbb{Z}\rangle$ конечно порождена, то существует n, для которого выполняется условие (14). Сопряжение при помощи b^n дает

$$\langle b^{-i} a\, b^{i},\quad i\in\mathbb{Z}\rangle = \langle\, a, a^{b}, a^{b^2}, \dots,\ a^{b^{2n}} \rangle = \langle b^{-i} a\, b^{i},\quad i\in\mathbb{N}\rangle. \tag{15}$$

Отсюда получаем

$$a^{b^{2n+1}} \in \langle\, a, a^{b}, a^{b^2}, \dots,\ a^{b^{2n}} \rangle.$$

Поскольку каждое определяющее соотношение на свободных образующих является тождеством ([9] 13.21), то G удовлетворяет тождеству с конструкцией типа (8), которая определяет $\mathfrak{R}$-тождество. □

Теорема 3. *Тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством тогда и только тогда, когда в каждой конечно порожденной группе, ему удовлетворяющей, коммутант конечно порожден.*

Доказательство. Если G удовлетворяет $\mathfrak{R}$-тождеству, то по теореме 2 G обладает свойством Милнора и по лемме 1 (i) коммутант G' конечно порожден.

Обратно, пусть G является относительно свободной группой, определенной тождеством $w \equiv 1$ со свободными образующими a, b, и пусть коммутант G' конечно порожден. Тогда нормальное замыкание a равно $\langle b^{-i} a\, b^{i},\ \ i \in \mathbb{Z} \rangle = \langle a \rangle \big[\langle a \rangle,\, \langle b \rangle \big] = \langle a \rangle G'$, а значит, конечно порождено. Тогда для некоторого n выполняется условие (14). Отсюда следует, что G удовлетворяет свойству Милнора. Теперь по теореме 2 G удовлетворяет некоторому $\mathfrak{R}$-тождеству. $\square$

Полугрупповые тождества — это тождества вида $u(x_l, x_2,\ \dots . x_n) = v(x_l, x_2,\ \dots x_n)$, где u, v — разные слова в свободной группе $\langle x_l, x_2 \dots . \rangle$, в записи которых не появляются отрицательные степени элементов $x_l, x_2,\ \dots x_n$.

Пример 3. *Каждое полугрупповое тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством.*

Доказательство. Каждое полугрупповое тождество индуцирует бинарное полугрупповое тождество, если подставить $x_i \to xy^i$. Многими авторами было показано ([6], [7], [11], [2] p.520) что группа G, удовлетворяющая полугрупповому тождеству, обладает свойством Милнора. Тогда по теореме 2 полугрупповое тождество является $\mathfrak{R}$-тождеством. $\square$

Пример 4. *Для каждого простого p многообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ является многообразием всех абелевых групп, а $\mathfrak{A}_p$ – многообразием всех абелевых групп периода p, не удовлетворяет никакому $\mathfrak{R}$-тождеству.*

Доказательство. Многообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ содержит 2-порожденную группу $W := C_p wr C$ — сплетение циклической группы порядка p, $C_p = \langle a \rangle$ и бесконечной циклической группы $C = \langle b \rangle$. Коммутант W' этого сплетения содержит элементы $a^{-1} a^{b^i}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, а следовательно W' имеет бесконечный носитель, а следовательно, не может быть конечно порожден. Теперь по теореме 2 получаем, что $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ не удовлетворяет никакому $\mathfrak{R}$-тождеству. $\square$

Конечно порожденная конечно аппроксимируемая группа, удовлетворяющая энгелевому тождеству, либо полугрупповому тождеству, является почти нильпотентной. Это доказано для энгелевых тождеств в [14], а для полугрупповых тождеств — в [13]. Мы показали в примерах 2 и 3, что энгелевые тождества и полугрупповые тождества являются $\mathfrak{R}$-тождествами. Следующая лемма расширяет упомянутые выше результаты на все $\mathfrak{R}$-тождества.

Лемма 2. *Каждая конечно порожденная конечно аппроксимируемая группа, удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству, является почти нильпотентной.*

Доказательство. В работе ([3] Theorem A) показано, что если каждая *конечно порожденная метабелеву* группа, удовлетворяющая тождеству $w \equiv 1$, является почти нильпотентной, то то же самое верно для всех конечно аппроксимируемых групп. При этом параметры (нильпотентность и период) зависят только от тождества.

Таким образом, достаточно показать, что каждая конечно порожденная метабелева группа, удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству, является почти нильпотентной. Пусть G — конечно порожденная разрешимая группа (например, метабелева), удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству. Из работы ([5], теорема C) следует, что G является либо почти нильпотентной, либо многообразие $var\, G$ содержит подмногообразие $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$. Так как последнее невозможно (согласно примеру 4), то лемма доказана. $\square$

Следующее свойство $\mathfrak{R}$-тождеств связано с конечным резидуалом R группы G, т.е. пересечением всех подгрупп конечного индекса в G.

Теорема 4. *В каждой конечно порожденной группе G, удовлетворяющей $\mathfrak{R}$-тождеству, резидуал R конечно порожден.*

Доказательство. По предположению группа G/R удовлетворяет $\mathfrak{R}$-тождеству. Тогда по теореме 2 она обладает свойством Милнора, по лемме 2, G/R является почти нильпотентной, т. е. G/R содержит нильпотентную подгруппу H/R конечного индекса. Поскольку $|G:H|=|(G/R):(H/R)| < \infty$ и G конечно порождена, то H и H/R – конечно порожденные группы. Будучи конечно порожденной нильпотентной группой, H/R является полициклической (см. [9] 31.12). Поскольку H/R также обладает свойством Милнора, то по лемме 1 (*iii*) резидуал R конечно порожден. $\square$

$\mathfrak{R}$-тождества и локально ступенчатые группы

Как энгелевые, так и полугрупповые тождества являются $\mathfrak{R}$-тождествами. Это общее свойство необходимо и достаточно для ответа на вопрос: "почему энгелевые и полугрупповые тождества заставляют конечно порожденные локально ступенчатые группы быть почти нильпотентными?"

Напомним, что группа G называется *локально ступенчатой*, если каждая нетривиальная конечно порожденная подгруппа в G содержит собственную нормальную подгруппу конечного индекса. Класс локально ступенчатых групп замкнут относительно подгрупп и расширений, а также содержит все группы, локально аппроксимируемые группами из этого класса.

Понятие локально ступенчатой группы было введено С. Н. Черниковым в 1970 году [4], чтобы отделить такие группы, как бесконечные группы Бернсайда и монстры Ольшанкого-Тарского.

Теперь мы можем доказать следующее.

Теорема 5. *Каждая конечно порожденная локально ступенчатая группа удовлетворяющая $\mathfrak{R}$-тождеству почти нильпотентна.*

Доказательство. Пусть G будет конечно порожденной локально ступенчатой группой. По Теореме 4, резидуал R конечно порожден. Поскольку G локально ступенчатая, R (если $R \neq 1$) содержит собственную нормальную подгруппу конечного индекса $T \subsetneq R$.

Тогда ([9], 41.43), T содержит подгруппу K конечного индекса в R и вполне характеристическую в R, $K \subseteq T \subsetneq R$. Следовательно K нормальна в G. Поскольку R/K конечна и G/R почти нильпотентна, ввиду $(G/K)/(R/K) \cong G/R$ имеем, что G/K является расширением конечной при помощи почти нильпотентной. Поскольку расширение конечной при помощи нильпотентной – почти нильпотентно, то G/K почти нильпотентна, и следовательно конечно аппроксимируема. Следовательно $R \subseteq K$, что противоречит условию $K \subseteq T \subsetneq R$.

Значит $R = 1$ и G конечно аппроксимируема. Тогда по Лемме 2, G почти нильпотентна. □

Более того, пусть $\mathfrak{N}_c$ обозначает многообразие всех нильпотентных групп класса $\leq c$, $\mathfrak{B}_e$ — многообразие, состоящее из всех локально конечных групп периодов, делящих e (тот факт, что класс $\mathfrak{B}_e$ является многообразием, следует из решения Е.И. Зельмановым ограниченной проблемы Бернсайда.) На основании результата из работы [3], упомянутой в доказательстве леммы 2, получаем

Следствие 1. *Для каждого $\mathfrak{R}$-тождества существуют положительные целые числа c и e, зависящие только от этого тождества, такие, что каждая локально ступенчатая группа, удовлетворяющая этому тождеству, лежит в произведении многообразий $\mathfrak{N}_c\mathfrak{B}_e$.*

Замечание Вне класса локально ступенчатых групп существуют конечно порожденные группы, удовлетворяющие $\mathfrak{R}$-тождеству, которые не являются почти нильпотентными. Например, свободные группы Бернсайда $B(r, n), r > 1$ удовлетворяют $\mathfrak{R}$-тождеству $x^n \equiv 1$. Если n достаточно большое, то группы бесконечны (результат Новикова и Адяна [1]), а следовательно, не являются почти нильпотентными. Заметим также, что конечно порожденные группы, удовлетворяющие $\mathfrak{R}$-тождеству $xy^n = y^n x$, не являются почти нильпотентными для достаточно большого n. Другой пример дают группы Ольшанкого и Сторожева из [10].

Вопрос. Как выглядят $\mathfrak{R}$-тождества, которые не влекут ни энгелевых, ни полугрупповых тождеств?

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

[1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, Наука, Москва, 1975.

[2] Robert G.Burns, Olga Macedońska, Yuri Medvedev, *Groups Satisfying Semigroup Laws, and Nilpotent-by-Burnside Varieties*, J. of Algebra **195** (1997), 510–525.

[3] Burns, R. G., Medvedev, Yu., *Group laws implying virtual nilpotence*, J. Austral. Math. Soc. **74** (2003), 295–312.

[4] Черников С.Е., *Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп* Доклады академии наук СССР **194**, 1970 1280–1283.

[5] Groves, J.R.J., *Varieties of soluble groups and a dichotomy of P.Hall*, Bull. Austral. Math. Soc. **5** (1971), 391–410.

[6] K.W. Gruenberg, *Two theorems on Engel groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 377–380.

[7] Y. K. Kim and A. H. Rhemtulla, *Weak maximality conditions and polycyclic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 711–714.

[8] J. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Diff. Geom. **2** (1968), 447–449.

[9] H. Neumann, VARIETIES OF GROUPS, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[10] A.Yu.Ol'shanskii and A.Storozhev, *A group variety defined by a semigroup law*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), **60**, (1996), 255–259.

[11] F. Point, *Milnor identities*, Comm. Algebra **24** (12) (1996) 3725–3744.

[12] S. Rosset, *A property of groups of non-exponential growth*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 24–26.

[13] J. F. Semple and A.Shalev, *Combinatorial conditions in residually finite groups, I*, J.Algebra **157** (1993), 43–50.

[14] J. S. Wilson, *Two-generator conditions for residually finite groups*, Bull. London Math. Soc **23** (1991), 239–248.