

JANUSZ WALCZAK
MICHAŁ LEWANDOWSKI
POLITECHNIKA ŚLĄSKA, POLSKA

TRANSFORMACJE PRZEJŚCIA POMIĘDZY AMPLITUĄ I FAZĄ CHWILOWĄ SYGNAŁÓW A ICH REPREZENTACJAMI FALKOWYMI

TRANSITIVE MAP BETWEEN INSTANTANEOUS AMPLITUDE AND FREQUENCY OF A SIGNAL AND THEIR WAVELET REPRESENTATIONS

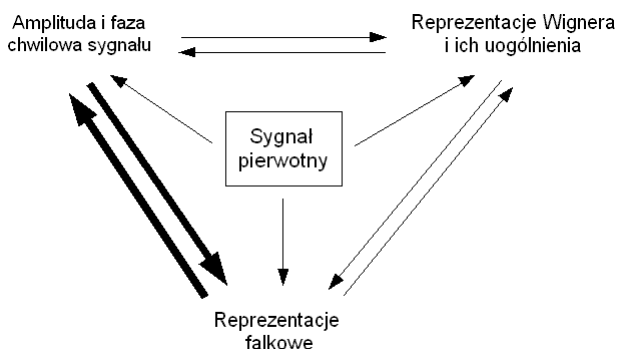
Abstract

A transitive map between instantaneous amplitude and frequency representation of a signal and their wavelet representation has been described in this paper. The formulas were derived for continuous and discrete representations. At the end of the paper an example, which illustrates one of the derived transforms, has been presented.

1. WSTĘP

Do opisu, analizy oraz syntezy sygnałów i układów niestacjonarnych wykorzystuje się dwie podstawowe klasy modeli. Pierwsza z nich opiera się na teorii procesów stochastycznych (np. [4]), druga natomiast wykorzystuje różne reprezentacje czasowo-częstotliwościowe sygnałów i układów. Wyróżnić można trzy podstawowe grupy reprezentacji czasowo-częstotliwościowych:

- 1.1. Reprezentacje bazujące na pojęciu sygnału analitycznego i stowarzyszonych z nim pojęciach amplitudy i fazy chwilowej [1].
- 1.2. Reprezentacje falkowe sygnałów [5], [7].
- 1.3. Reprezentacje Wignera-Ville'a i różne ich uogólnienia [3], [8].



Rys.1. Ilustracja różnych klas reprezentacji czasowo-częstotliwościowych i transformacji przejścia.

Relacje zachodzące pomiędzy różnymi grupami reprezentacji czasowo-częstotliwościowych noszą nazwę transformacji przejścia (rys.1). Umożliwiają one przechodzenie pomiędzy różnymi klasami opisów czasowo-częstotliwościowych a także porównywanie właściwości sygnałów na tle ich różnych reprezentacji. W literaturze [1], [3] znane są transformacje przejścia pomiędzy reprezentacjami Wignera-Ville'a a amplitudą i fazą chwilową sygnałów.

W artykule opisano transformacje przejścia pomiędzy reprezentacjami falkowymi sygnałów a reprezentacjami sygnałów w postaci amplitudy i fazy chwilowej, ilustrując przykładem uzyskane wyniki.

Inne w stosunku do opisanego w artykule podejście do wyznaczania zależności pomiędzy amplitudą i fazą chwilową a reprezentacjami falkowymi sygnałów opisano w pracy [2]. Wykorzystuje ono pojęcie tzw. nieliniowego operatora energii do ekstrakcji amplitudy i fazy chwilowej sygnałów z wykorzystaniem banku filtrów falkowych [2].

2. CHARAKTERYSTYKA WYBRANYCH REPREZENTACJI CZASOWO-CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH

2.1. Czasowo częstotliwościowe reprezentacje sygnałów analitycznych

Dla sygnałów rzeczywistych $x(t)$ o ograniczonej mocy lub ograniczonej energii, wprowadza się pojęcie [1] stowarzyszonego sygnału analitycznego $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + jH\{x(t)\} = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (1)$$

gdzie:

$H\{\cdot\}$ - operator Hilberta określony wzorem:

Publishing info:

Walczak J., Lewandowski M.: "Transformacje przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnałów a ich reprezentacjami falkowymi", XXVIII IC SPETO, Niedzica, Maj 2004, vol. II, ss. 201-203
(If you like it please make a citation)

$$H\{x(t)\} = (VP) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (2)$$

$A(t), \varphi(t)$ - amplituda i faza chwilowa sygnału analitycznego.

Amplitudę chwilową, fazę chwilową i częstotliwość chwilową $f_i(t)$ określają wzory:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + (H\{x(t)\})^2}, \quad (3)$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{H\{x(t)\}}{x(t)}, \quad (4)$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}(t), \quad (5)$$

Sygnał analityczny interpretować można jako wektor wirujący na płaszczyźnie Gaussa. Zarówno długość $A(t)$ jak i prędkość kątowna $2\pi f_i(t)$ tego wektora są zmienne w czasie. Mogą wystąpić trzy krańcowe przypadki:

1. Dla sygnałów monoharmonicznych amplituda i prędkość kątowna wektora nie zależą od czasu.
2. Dla sygnałów modulowanych amplitudowo (AM) tylko amplituda wektora jest funkcją czasu.
3. Dla sygnałów modulowanych częstotliwościowo (FM) tylko prędkość kątowna wektora zależy od czasu.

2.2. Ciągłe reprezentacje falkowe sygnałów

Stanowią one rozwinięcie idei Gabora [6] dekompozycji sygnałów na elementarne składowe (atomy) będące zlokalizowanymi w czasie fragmentami pewnego sygnału, nazywanego falką. Reprezentacje te są poprawnie zdefiniowane nie tylko dla sygnałów całkowalnych z kwadratem ale również dla sygnałów należących do wielu bardziej ogólnych przestrzeni np. BMO [7], [9].

Proste ciągłe przekształcenie falkowe sygnału $x(t) \in L^2(R)$ określa [8] wzór:

$$X(\tau, s) = W\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt, \quad (6)$$

gdzie:

W – symbol operacji (6),

$\Psi(t)$ - falka podstawowa generująca rodzinę falek

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{\tau} \right) \right\}$ powstałych poprzez translację

względem osi czasu i skalowanie ze współczynnikiem skali s falki $\Psi(t)$.

Odwrotne ciągłe przekształcenie falkowe określa wzór:

$$x(t) = W^{-1}\{X(\tau, s)\} = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, s) \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \frac{1}{s^2} ds d\tau, \quad (7)$$

gdzie:

c_ψ - stała wynikająca ze spełnienia przez falkę podstawową warunku dopuszczalności [8].

W zależności od wyboru falki podstawowej Ψ uzyskuje się różne reprezentacje czasowo-częstotliwościowe sygnałów. Wybór falki podstawowej nie jest rzeczą oczywistą, może on między innymi zależeć od tego, do identyfikacji jakich cech sygnałów stosuje się opisane reprezentacje.

2.3. Dyskretne reprezentacje falkowe

Ich znaczenie wynika głównie z możliwości analizy sygnałów z różną rozdzielczością. Analiza wielorozdzielcza sygnałów polega [7], [8] na ich dekompozycji na sumę tzw. szczegółów (detali) względem najczęściej diadycznego zbioru skal $\{2^j\}$, $j \in (-\infty, \infty)$, zgodnie ze wzorem:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x, \Psi_{jk})_{L^2} \Psi_{jk}(t), \quad (8)$$

gdzie:

$\Psi_{jk}(t)$ - falka określona wzorem:

$$\Psi_{jk}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi \left(\frac{t-2^j k}{2^j} \right), \quad (9)$$

$\Psi(t)$ - falka podstawowa,

(\cdot, \cdot) - iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2(R)$.

Funkcja $x(t)$ na ustalonym poziomie rozdzielczości j jest kombinacją liniową reprezentacji zgrubnej i szczegółowej na poziomie $j+1$. Inna interpretacja wzoru (8) wynika z dekompozycji przestrzeni $L^2(R)$ na sumy proste ciągów dwóch klas podprzestrzeni, przestrzeni $L^2(R)$ i konstrukcji w nich rzutów ortogonalnych interpretowanych jako kolejne poziomy rozdzielczości [9].

3. TRANSFORMACJE PRZEJŚCIA

Rozpatrywane w artykule transformacje przejścia dotyczą wzajemnych odwzorowań pomiędzy reprezentacjami falkowymi sygnałów a ich reprezentacjami w postaci amplitudy, fazy (częstotliwości) chwilowej (por. rys. 1).

W pierwszej kolejności rozpatrywane będą transformacje przyporządkowujące ciągłym transformatom falkowym (rozdz. 2.2) reprezentacje sygnałów w postaci amplitudy i fazy chwilowej. Wykorzystując proste przekształcenie falkowe (6) dla sygnału $x(t)$ i sygnału stowarzyszonego $H\{x(t)\}$ (2), po prostych przekształceniach oraz wykorzystaniu definicji sygnału analitycznego (1) uzyskuje się zależność:

$$X_{A,\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{j\varphi(t)} \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt =$$

Publishing info:

Walczak J., Lewandowski M.: "Transformacje przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnałów a ich reprezentacjami falkowymi", XXVIII IC SPETO, Niedzica, Maj 2004, vol. II, ss. 201-203
(If you like it please make a citation)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{j2\pi \int_0^t f_i(t) dt} \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt. \quad (10)$$

Wzór (10) określa przyporządkowanie parze $\{A(t), \varphi(t)\}$ lub $\{A(t), f_i(t)\}$ reprezentacji falkowej $F_{A,\varphi}(\tau, s)$.

Odwzorowanie odwrotne względem (10) wyznacza się podobnie. Wykorzystując wzór (7) definiujący odwrotną transformatę falkową oraz tworząc sygnał $H\{x(t)\}$ stowarzyszony z sygnałem $x(t)$, po przekształceniach uzyskuje się zależności:

$$A(t) = \frac{1}{c_\Psi} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \frac{ds d\tau}{s^2} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, s) \Gamma(\tau, s, t) \frac{ds d\tau}{s^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, s) \Gamma(\tau, s, t) \frac{ds d\tau}{s^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \frac{ds d\tau}{s^2}}, \quad (12)$$

gdzie:

$$\Gamma(\tau, s, t) = (VP) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{u-\tau}{s} \right) \frac{1}{t-u} du. \quad (13)$$

Wzory te określają przyporządkowanie transformacie falkowej $X(s, \tau)$ (6) sygnału $x(t)$ jego amplitudy i fazy chwilowej. Jądro $\zeta(\cdot)$ operacji zespolonej określonej wzorem (1) jest sygnałem analitycznym przyporządkowanym falce $\frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right)$ i jest związane z funkcją $\Gamma(\cdot)$ (13) zależnością:

$$\zeta(\tau, s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) + jH \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t-\tau}{s} \right) + j\Gamma(\tau, s, t). \quad (14)$$

Metodyka wyznaczania transformacji przejścia dla dyskretnych reprezentacji falkowych (rozdz.2.3) jest bardzo podobna do opisanej powyżej. Wykorzystując definicję szeregu falkowego (8) oraz wzory (1), (2), (3), (4) po prostych przekształceniach uzyskuje się zależność amplitudy chwilowej i fazy chwilowej sygnału $x(t)$ od dyskretnej reprezentacji falkowej (8):

$$A(t) = \left\{ \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x, \Psi_{jk})_{L^2} \Psi_{jk}(t) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x, \Psi_{jk})_{L^2} \Psi_{jk}^H(t) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x, \Psi_{jk})_{L^2} \Psi_{jk}^H(t)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x, \Psi_{jk})_{L^2} \Psi_{jk}(t)}, \quad (16)$$

gdzie:

$$\Psi_{jk}^H(t) = (VP) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi \left(\frac{u-2^j k}{2^j} \right) \frac{1}{u-t} du \quad (17)$$

transformata Hilberta falki $\Psi_{jk}(\cdot)$.

Odwrotna transformata przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnału $x(t)$ a współczynnikami szeregu falkowego (8) wynika wprost z zastosowania zależności (por. wzór (1)):

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad (18)$$

do wzoru:

$$(x, \Psi_{jk})_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi_{jk}^*(t) dt \quad (19)$$

definiującego iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$.

Stąd:

$$(x, \Psi_{jk})_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cos \varphi(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi_{jk}^* \left(\frac{t-2^j k}{2^j} \right) dt. \quad (20)$$

W ten sposób określić można współczynniki szeregu falkowego (8) na podstawie znanych: amplitudy i fazy chwilowej sygnału.

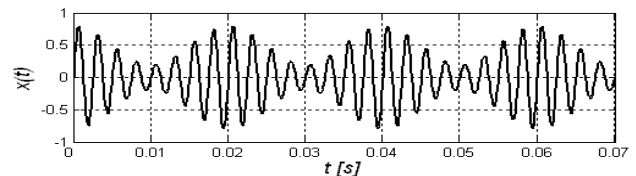
4. PRZYKŁAD

Prezentowany przykład ilustruje transformację przejścia opisaną wzorem (10).

Dany jest sygnał testowy $x(t)$ o postaci:

$$x(t) = [0.5 + 0.3 \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)] \cdot \sin(2\pi \cdot 400 \cdot t), \quad (21)$$

którego przebieg czasowy przedstawiono na rys. 2.



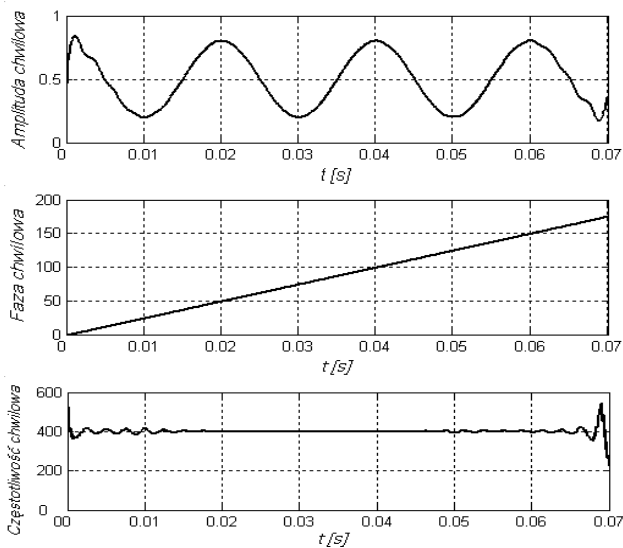
Rys.2. Sygnał testowy $x(t)$.

Wyznaczono sygnał analityczny $z(t)$ stowarzyszony z sygnałem $x(t)$ a następnie amplitudę i fazę chwilową sygnału $z(t)$ zgodnie ze wzorami (1), (2), (3), (4), (5). Wyznaczone: amplitudę i fazę chwilową przedstawiono na rys.3.

Publishing info:

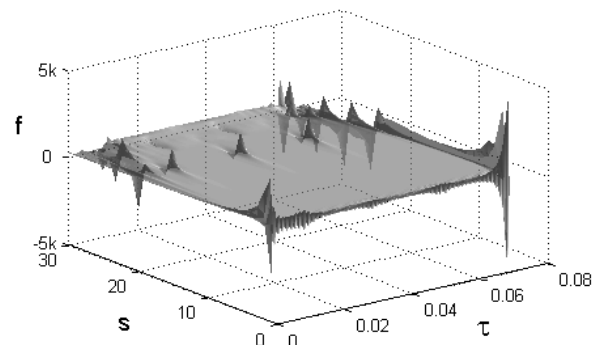
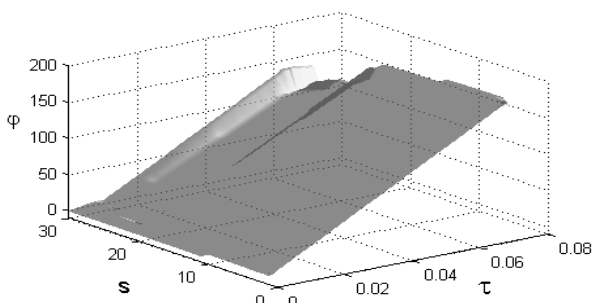
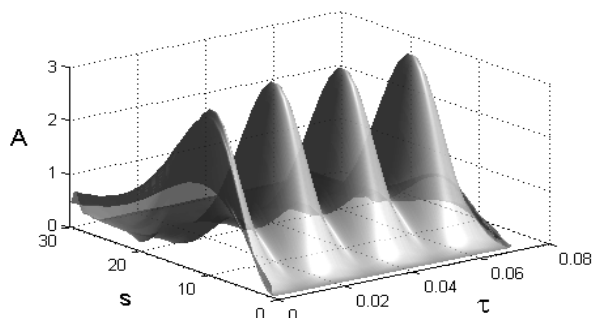
Walczak J., Lewandowski M.: "Transformacje przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnałów a ich reprezentacjami falkowymi", XXVIII IC SPETO, Niedzica, Maj 2004, vol. II, ss. 201-203

(If you like it please make a citation)



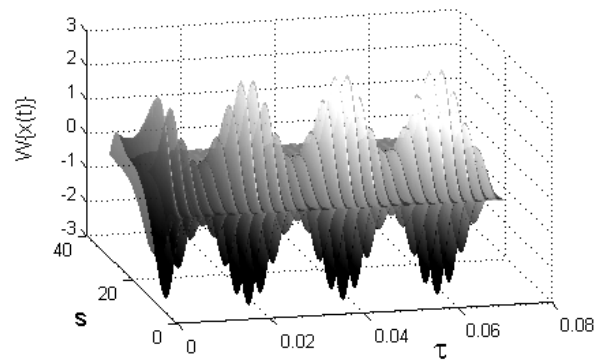
Rys.3. Amplituda, faza i częstotliwość chwilowa sygnału $z(t)$.

Następnie wykorzystując wzór (10) wyznaczono reprezentację falkową sygnału $z(t)$. Reprezentacje falkowe amplitudy A , fazy φ , i częstotliwości f chwilowej przedstawiono na rys.4.



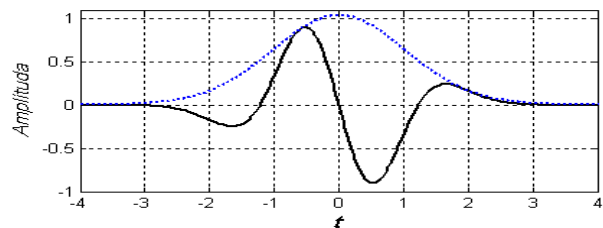
Rys.4. Reprezentacja falkowa amplitudy A , fazy φ , i częstotliwości f chwilowej sygnału $z(t)$.

Porównując rysunki 3 i 4 można dostrzec podobieństwo między reprezentacjami odpowiadających sobie wielkości. Aby możliwe było podobne porównanie reprezentacji dla postaci czasowej sygnału $x(t)$ i jego reprezentacji falkowej, na rysunku 5 przedstawiono ciągłą transformatę falkową sygnału $x(t)$.



Rys.5. Ciągła transformata falkowa sygnału $x(t)$

Jako falkę podstawową stosowaną przy wyznaczaniu omówionych reprezentacji falkowych, wybrano trzecią pochodną funkcji Gaussa. Wybrana falka podstawowa wraz ze swoją amplitudą chwilową została przedstawiona na rys.6.



Rys.6. Falka podstawowa „gaus3” – linia ciągła i jej amplituda chwilowa – linia kropkowana.

5. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono wzajemne transformacje przejścia pomiędzy reprezentacjami sygnału w postaci amplitudy, fazy i częstotliwości chwilowej, ściśle związanymi z pojęciem sygnału analitycznego, a ich reprezentacjami falkowymi. Zależności matematyczne podano zarówno dla ciągłych jak i dyskretnych falkowych reprezentacji sygnałów. Jedną z transformacji przejścia zilustrowano przykładem opartym na sygnale sinusoidalnym zmodulowanym amplitudowo.

6. LITERATURA

- [1] Boashash B.: Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal. Part I. Fundamentals. Proc. IEEE, April 1992 Vol. 80, No 4, pp. 520-539.
- [2] Bovik A.C., Maragos P.: AM-FM Detection and Separation in Noise Using Multiband Energy Operators. IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, No.12, Dec. 1999, pp. 32-35.

Publishing info:

Walczak J., Lewandowski M.: “Transformacje przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnałów a ich reprezentacjami falkowymi”, XXVIII IC SPETO, Niedzica, Maj 2004, vol. II, ss. 201-203
(If you like it please make a citation)

- [3] Cohen L.: Time-Frequency Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1995.
- [4] Coper G.R. , Mc Gillem C.D.: Probabilistic Methods in Signal and Systems. Rinehart & Winston, New York, 1991.
- [5] Chui C.K.: An Introduction to Wavelets. Academic Press, New York, 1992.
- [6] Feichtinger H. G., Strohmer T.: Gabor Analysis and Algorithms. Theory and Applications. Birkhauser, 1998.
- [7] Meyer Y.: Wavelets and Operators. Cambridge studies in Advanced Mathematics Vol. 37, Cambridge Univ. Press, London 1992.
- [8] Poularikas A. B.: The Transforms and Applications Handbook. CRC Press, Inc. Florida 1995.
- [9] Wojtaszczyk P.: Teoria falek. PWN, Warszawa 2000.

prof. dr hab. inż. Janusz WALCZAK
email: janusz.walczak@polsl.pl
mgr inż. Michał LEWANDOWSKI
email: michal.lewandowski@polsl.pl

INSTYTUT ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI
POLITECHNIKA ŚLĄSKA,
ul. Akademicka 10,
44-100 GLIWICE, POLSKA

Publishing info:

**Walczak J., Lewandowski M.: “Transformacje przejścia pomiędzy amplitudą i fazą chwilową sygnałów a ich reprezentacjami falkowymi”, XXVIII IC SPETO, Niedzica, Maj 2004, vol. II, ss. 201-203
(If you like it please make a citation)**
