

# MES W ANALIZIE SPREŻYSTEJ UKŁADÓW PRĘTOWYCH

---

Przykłady obliczeń

*Ruszty*

Lidia FEDOROWICZ  
Jan FEDOROWICZ  
Magdalena MROZEK  
Dawid MROZEK

Gliwice 2017r.

## Rozwiązanie zadań Rozdziału 8

### UKŁADY PŁASKIE PRZESTRZENNIE OBCIĄŻONE - RUSZTY

Niniejszy tekst jest częścią skryptu pt.: „*MES w analizie sprężystej układów prętowych. Przykłady obliczeń*” i stanowi przedłużenie rozdziału 8 skryptu.

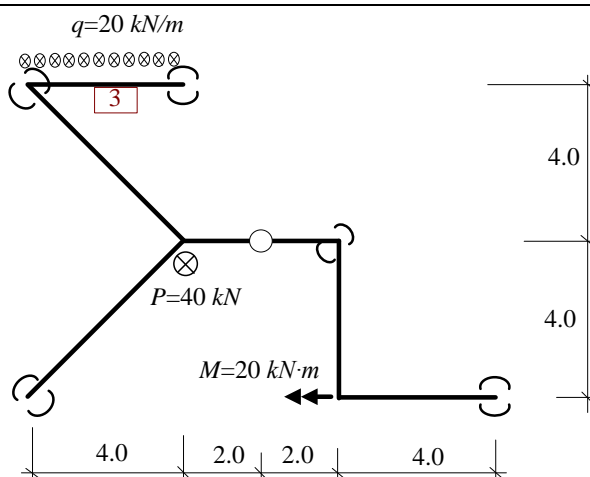
W pliku zawarto szczegółowo przedstawione krok po kroku rozwiązania trzech pokazanych poniżej zadań, obejmujących układy płaskie przestrzennie obciążone (ruszty) z wykorzystaniem MES. Numeracja zadań w pliku jest kontynuacją numeracji ze skryptu. Numeracja rysunków, tablic i wzorów rozpoczyna się od nr 1 z dołączonym numerem rozdziału skryptu. Wszystkie konieczne odwołania do treści zawartych w skrypcie są wyraźnie zaznaczone i opisane z podaniem nr rozdziału i odpowiedniego numeru wzoru bądź rysunku i napisane są czcionką pochyłą koloru różowego.

Wszystkie oznaczenia używane w pliku, algorytm postępowania przy rozwiązywaniu zadań oraz podstawy teoretyczne MES podano w skrypcie.

**RUSZTY – zadania rozwiązane w pliku**

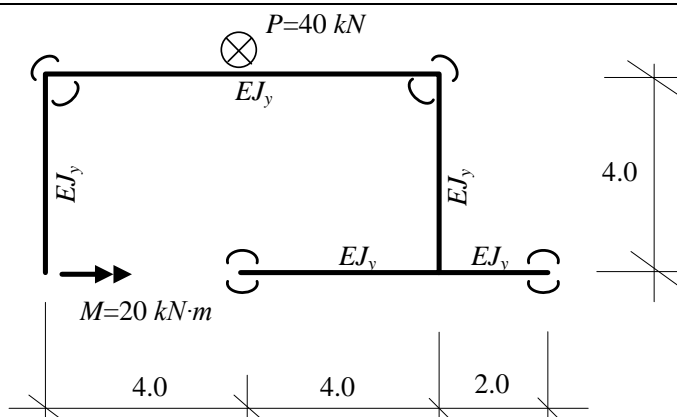
**8.2. Zadanie 2**

Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



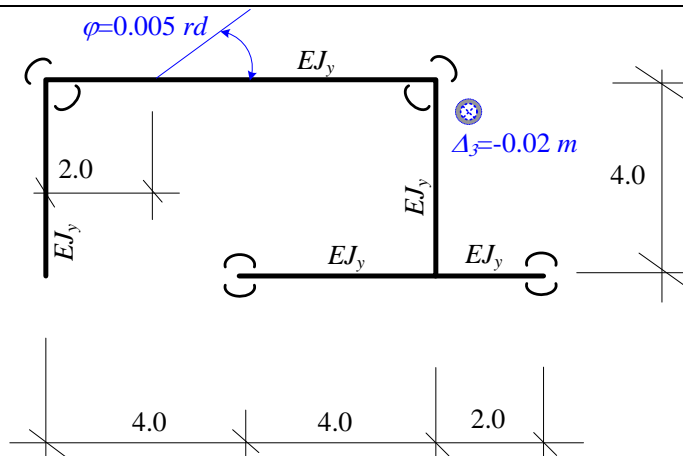
**8.3. Zadanie 3**

Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



**8.4. Zadanie 4**

Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.

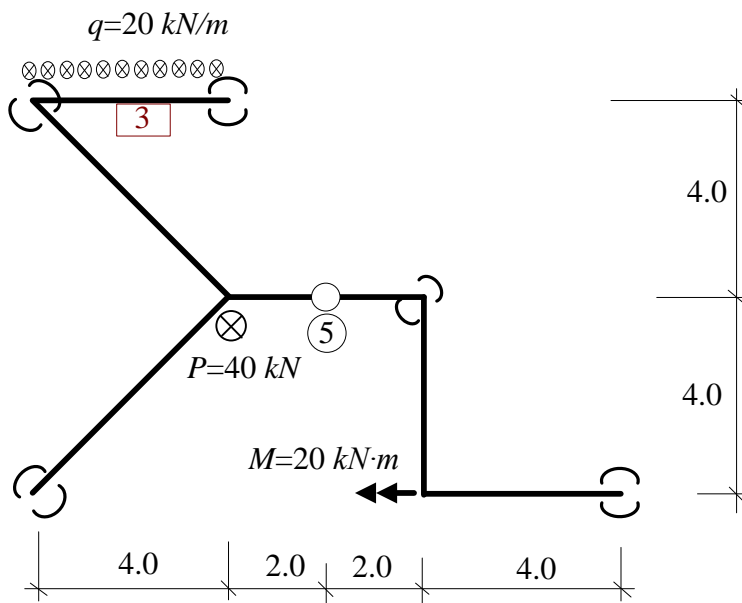


## 8 UKŁADY PŁASKIE PRZESTRZENNIE OBCIĄŻONE - RUSZTY

### 8.2 Zadanie 2

#### **DANE:**

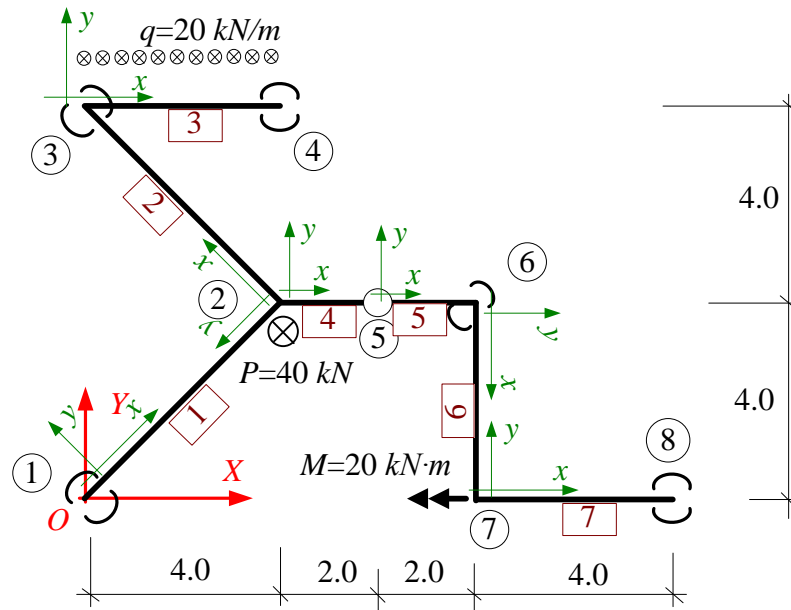
Dany jest układ płaski przestrzennie obciążony jak na Rys. 8-1. Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



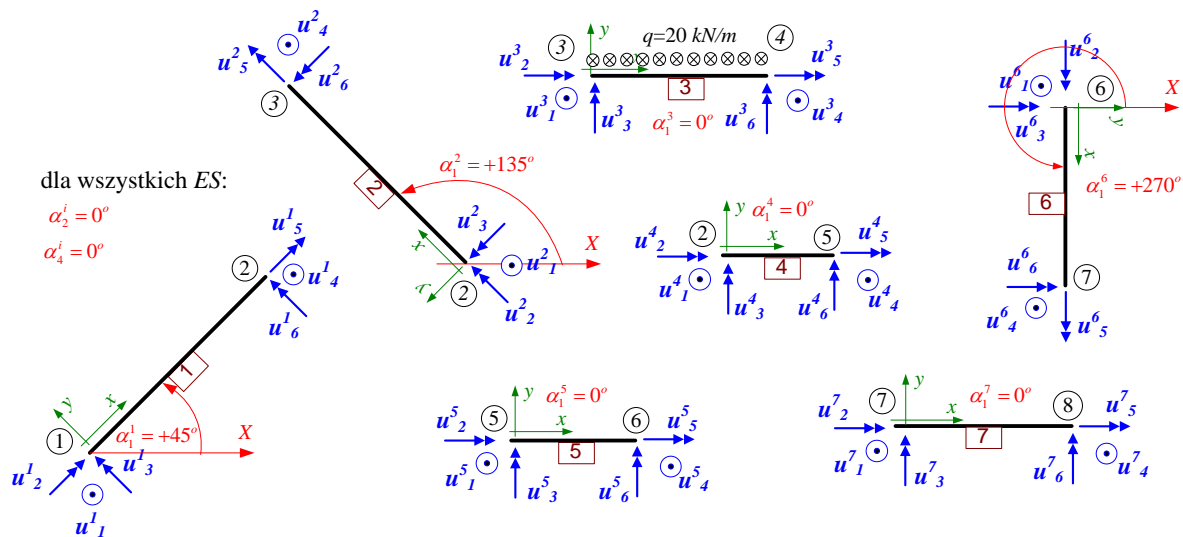
Rys. 8-1. Schemat statyczny rusztu z zadania 1

#### **KROK (A): Zdefiniowanie modelu MES**

Przyjmujemy globalny układ współrzędnych  $XOY$  (np. pokazany na rys. 8-2), numerujemy węzły oraz przęta układu. Przyjmujemy do rozwiązania element skończony w postaci prostego odcinka przęta z dwoma węzłami, po trzy stopnie swobody w każdym węźle – *rozdział 1, Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.* Dyskretyzację układu wprowadzamy dzieląc układ na siedem elementów skończonych odpowiadających przętom – Rys. 8-2. W każdym elemencie skończonym przyjmujemy początek układu oraz związany z nim układ współrzędnych lokalnych  $xOy$ , wg zasad opisanych w *rozdziale 1*. Przyjęto, w tym zadaniu, do obliczeń wartość sztywności  $EJ_y=1.0 \text{ kNm}^2$  ( $E=1 \text{ kPa}$ ,  $J_y=1.0 \text{ m}^4$ ),  $GC=0.2 \text{ kNm}^2$  ( $G=0.4E$ ,  $C=0.5 \text{ m}^4$ ).



Rys. 8-2. Schemat statyczny ruszty z zadania 2, numeracja węzłów, ES, przyjęcie globalnego układu współrzędnych, przyjęcie lokalnych układów współrzędnych i początków elementów skończonych



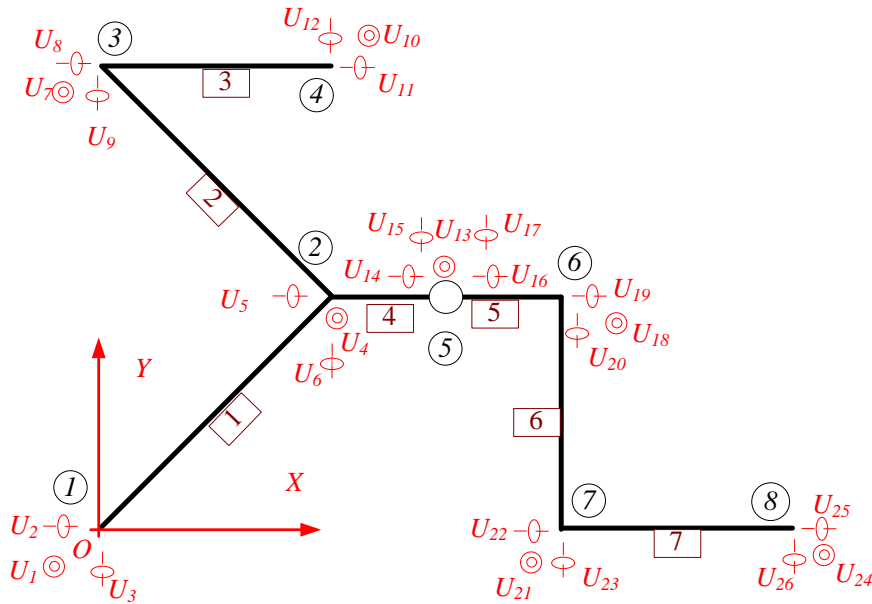
Rys. 8-3. Podział ramy zadania 2 na ES, przyjęcie układów współrzędnych lokalnych i początków ES, numeracja niewiadomych węzłowych ES w lokalnych układach współrzędnych,

Wyznaczamy liczbę stopni swobody i wprowadzamy numerację stopni swobody układu, związaną z globalnym układem współrzędnych. W zadaniu mamy osiem węzłów, przy czym w węźle nr 5 ES-4 i ES-5 połączone są przegubem kulistym. Oznacza to, że przekroje przywęzłowe w węźle nr 5 z lewej i prawej strony węzła mogą mieć różne obroty wokół globalnych osi  $OX$  i  $OY$ . Zatem liczbę stopni swobody obliczamy jako:

$$s_w = 3 \cdot w + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26, \quad (8-1)$$

a więc nasz układ statyczny ma 26 stopni swobody, a wektor przemieszczeń układu można zdefiniować w globalnym układzie współrzędnych następująco:

$$\{U\} = \{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10} \ U_{11} \ U_{12} \ U_{13} \ U_{14} \ U_{15} \ U_{16} \ U_{17} \ U_{18} \ U_{19} \ U_{20} \ U_{21} \ U_{22} \ U_{23} \ U_{24} \ U_{25} \ U_{26}\}^T \quad (8-2)$$



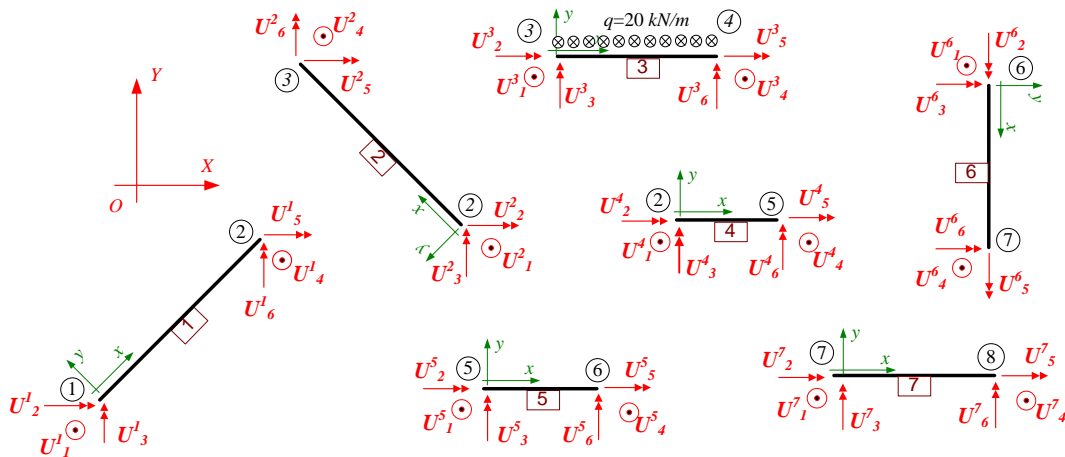
Rys. 8-4. Przyjęta numeracja stopni swobody obliczanej ramy w globalnym układzie współrzędnych

Przyjętą numerację stopni swobody w rozwiązywanym zadaniu pokazano na Rys. 8-2.

Definiujemy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych ES (1÷7) w układzie lokalnym – wzór (1-114) – Rys. 8-3:

$$\begin{aligned}
 \{u^1\} &= \{w_1^1 \quad \phi_{x1}^1 \quad \phi_{y1}^1 \quad w_2^1 \quad \phi_{x2}^1 \quad \phi_{y2}^1\}^T = \{u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_4^1 \quad u_5^1 \quad u_6^1\}^T, \\
 \{u^2\} &= \{w_2^2 \quad \phi_{x2}^2 \quad \phi_{y2}^2 \quad w_3^2 \quad \phi_{x3}^2 \quad \phi_{y3}^2\}^T = \{u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad u_4^2 \quad u_5^2 \quad u_6^2\}^T, \\
 \{u^3\} &= \{w_3^3 \quad \phi_{x3}^3 \quad \phi_{y3}^3 \quad w_4^3 \quad \phi_{x4}^3 \quad \phi_{y4}^3\}^T = \{u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \quad u_4^3 \quad u_5^3 \quad u_6^3\}^T, \\
 \{u^4\} &= \{w_4^4 \quad \phi_{x4}^4 \quad \phi_{y4}^4 \quad w_5^4 \quad \phi_{x5}^4 \quad \phi_{y5}^4\}^T = \{u_1^4 \quad u_2^4 \quad u_3^4 \quad u_4^4 \quad u_5^4 \quad u_6^4\}^T, \\
 \{u^5\} &= \{w_5^5 \quad \phi_{x5}^5 \quad \phi_{y5}^5 \quad w_6^5 \quad \phi_{x6}^5 \quad \phi_{y6}^5\}^T = \{u_1^5 \quad u_2^5 \quad u_3^5 \quad u_4^5 \quad u_5^5 \quad u_6^5\}^T, \\
 \{u^6\} &= \{w_6^6 \quad \phi_{x6}^6 \quad \phi_{y6}^6 \quad w_7^6 \quad \phi_{x7}^6 \quad \phi_{y7}^6\}^T = \{u_1^6 \quad u_2^6 \quad u_3^6 \quad u_4^6 \quad u_5^6 \quad u_6^6\}^T, \\
 \{u^7\} &= \{w_7^7 \quad \phi_{x7}^7 \quad \phi_{y7}^7 \quad w_8^7 \quad \phi_{x8}^7 \quad \phi_{y8}^7\}^T = \{u_1^7 \quad u_2^7 \quad u_3^7 \quad u_4^7 \quad u_5^7 \quad u_6^7\}^T,
 \end{aligned}
 \tag{8-3}$$

oraz układzie globalnym (Rys. 8-5):



Rys. 8-5. stopnie swobody poszczególnych ES w globalnym układzie współrzędnych

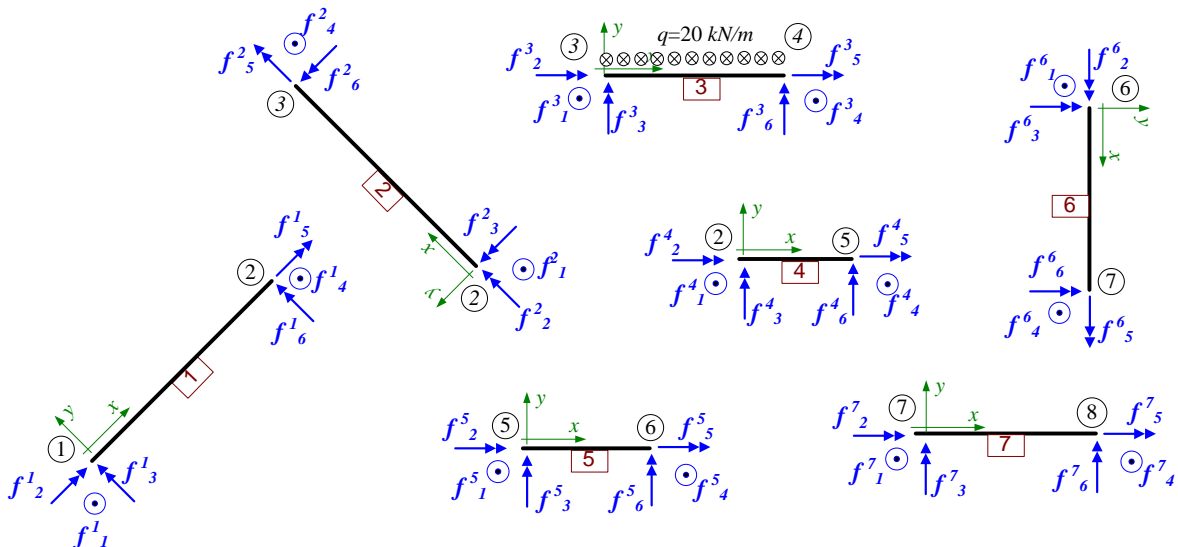
$$\begin{aligned}
 \{U^1\} &= \{U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ U_4^1 \ U_5^1 \ U_6^1\}^T, \\
 \{U^2\} &= \{U_1^2 \ U_2^2 \ U_3^2 \ U_4^2 \ U_5^2 \ U_6^2\}^T, \\
 \{U^3\} &= \{U_1^3 \ U_2^3 \ U_3^3 \ U_4^3 \ U_5^3 \ U_6^3\}^T, \\
 \{U^4\} &= \{U_1^4 \ U_2^4 \ U_3^4 \ U_4^4 \ U_5^4 \ U_6^4\}^T, \\
 \{U^5\} &= \{U_1^5 \ U_2^5 \ U_3^5 \ U_4^5 \ U_5^5 \ U_6^5\}^T, \\
 \{U^6\} &= \{U_1^6 \ U_2^6 \ U_3^6 \ U_4^6 \ U_5^6 \ U_6^6\}^T, \\
 \{U^7\} &= \{U_1^7 \ U_2^7 \ U_3^7 \ U_4^7 \ U_5^7 \ U_6^7\}^T,
 \end{aligned}
 \tag{8-4}$$

Podobnie zdefiniujemy wektory sił działających w węzłach poszczególnych *ES* (1÷7) w układzie lokalnym – wzór (1-131) – Rys. 8-6:

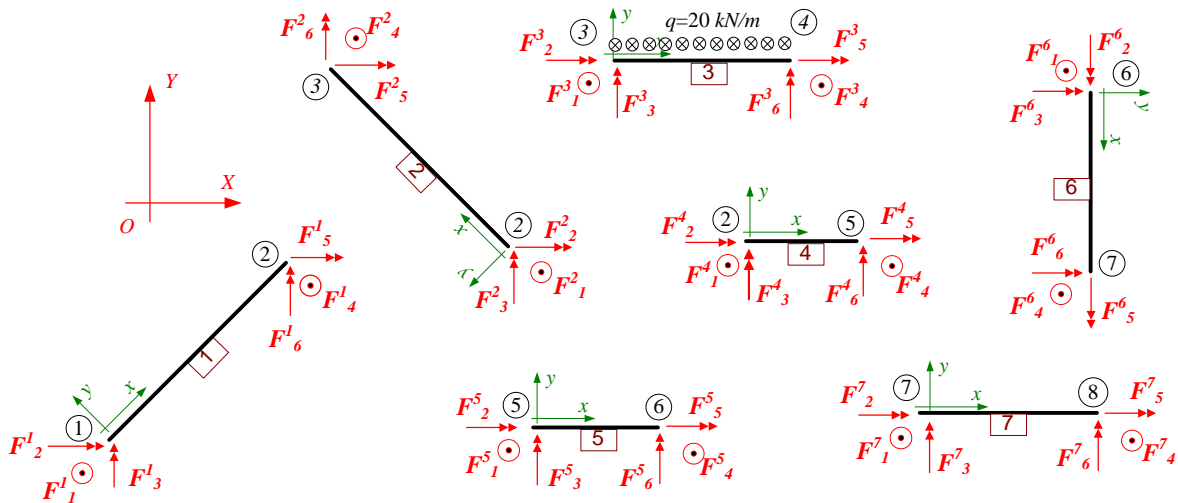
$$\begin{aligned}
 \{f^1\} &= \{V_{z1}^1 \ M_{x1}^1 \ M_{y1}^1 \ V_{z2}^1 \ M_{x2}^1 \ M_{y2}^1\}^T = \{f_1^1 \ f_2^1 \ f_3^1 \ f_4^1 \ f_5^1 \ f_6^1\}^T, \\
 \{f^2\} &= \{V_{z2}^2 \ M_{x2}^2 \ M_{y2}^2 \ V_{z3}^2 \ M_{x3}^2 \ M_{y3}^2\}^T = \{f_1^2 \ f_2^2 \ f_3^2 \ f_4^2 \ f_5^2 \ f_6^2\}^T, \\
 \{f^3\} &= \{V_{z3}^3 \ M_{x3}^3 \ M_{y3}^3 \ V_{z4}^3 \ M_{x4}^3 \ M_{y4}^3\}^T = \{f_1^3 \ f_2^3 \ f_3^3 \ f_4^3 \ f_5^3 \ f_6^3\}^T, \\
 \{f^4\} &= \{V_{z4}^4 \ M_{x4}^4 \ M_{y4}^4 \ V_{z5}^4 \ M_{x5}^4 \ M_{y5}^4\}^T = \{f_1^4 \ f_2^4 \ f_3^4 \ f_4^4 \ f_5^4 \ f_6^4\}^T, \\
 \{f^5\} &= \{V_{z5}^5 \ M_{x5}^5 \ M_{y5}^5 \ V_{z6}^5 \ M_{x6}^5 \ M_{y6}^5\}^T = \{f_1^5 \ f_2^5 \ f_3^5 \ f_4^5 \ f_5^5 \ f_6^5\}^T, \\
 \{f^6\} &= \{V_{z6}^6 \ M_{x6}^6 \ M_{y6}^6 \ V_{z7}^6 \ M_{x7}^6 \ M_{y7}^6\}^T = \{f_1^6 \ f_2^6 \ f_3^6 \ f_4^6 \ f_5^6 \ f_6^6\}^T, \\
 \{f^7\} &= \{V_{z7}^7 \ M_{x7}^7 \ M_{y7}^7 \ V_{z8}^7 \ M_{x8}^7 \ M_{y8}^7\}^T = \{f_1^7 \ f_2^7 \ f_3^7 \ f_4^7 \ f_5^7 \ f_6^7\}^T,
 \end{aligned}
 \tag{8-5}$$

oraz układzie globalnym – Rys. 8-7.:

$$\begin{aligned}
 \{F^1\} &= \{F_1^1 \ F_2^1 \ F_3^1 \ F_4^1 \ F_5^1 \ F_6^1\}^T, \\
 \{F^2\} &= \{F_1^2 \ F_2^2 \ F_3^2 \ F_4^2 \ F_5^2 \ F_6^2\}^T, \\
 \{F^3\} &= \{F_1^3 \ F_2^3 \ F_3^3 \ F_4^3 \ F_5^3 \ F_6^3\}^T, \\
 \{F^4\} &= \{F_1^4 \ F_2^4 \ F_3^4 \ F_4^4 \ F_5^4 \ F_6^4\}^T, \\
 \{F^5\} &= \{F_1^5 \ F_2^5 \ F_3^5 \ F_4^5 \ F_5^5 \ F_6^5\}^T, \\
 \{F^6\} &= \{F_1^6 \ F_2^6 \ F_3^6 \ F_4^6 \ F_5^6 \ F_6^6\}^T, \\
 \{F^7\} &= \{F_1^7 \ F_2^7 \ F_3^7 \ F_4^7 \ F_5^7 \ F_6^7\}^T.
 \end{aligned}
 \tag{8-6}$$



Rys. 8-6. Siły w węzłach *ES* w lokalnych układach współrzędnych



Rys. 8-7. Siły w węzłach ES w globalnym układzie współrzędnych

Tabela 8-1. Geometria obliczanej kratownicy

nr elementu	$X_i$	$Y_i$	$Z_i$	$X_j$	$Y_j$	$Z_j$	$l_{xy} [m]$
1	0	0	0	4	4	0	5.657
2	4	4	0	0	8	0	5.657
3	0	8	0	4	8	0	4
4	4	4	0	6	4	0	2
5	6	4	0	8	4	0	2
6	8	4	0	8	0	0	4
7	8	0	0	12	0	0	4

Tabela 8-2. Geometria obliczanej kratownicy c.d.

nr "k" elementu	$l_k [m]$	$\alpha_1^k [^\circ]$	$\cos(\alpha_1^k)$	$\sin(\alpha_1^k)$	$\cos(\alpha_2^k)$	$\sin(\alpha_2^k)$	$\cos(\alpha_3^k)$	$\sin(\alpha_3^k)$
					$\alpha_2^k = 0$	$\alpha_2^k = 0$	$\alpha_3^k = 0$	$\alpha_3^k = 0$
1	5.657	+45	0.707	0.707	1	0	1	0
2	5.657	+135	-0.707	0.707	1	0	1	0
3	4	0	1	0	1	0	1	0
4	2	0	1	0	1	0	1	0
5	2	0	1	0	1	0	1	0
6	4	+270	0	-1	1	0	1	0
7	4	0	1	0	1	0	1	0

Na podstawie Rys. 8-1 określamy kąty transformacji lokalnych układów współrzędnych związanych z poszczególnymi ES. Wartości tych kątów oraz odpowiadające im wartości funkcji sinus i cosinus



(potrzebne we wzorach **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** i **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** - rozdział **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**) zestawiono na Rys. 8-3 i Tabali 8-1 oraz Tabeli 8-2.

Zatem układ równań algebraicznych MES dla analizowanego zadania składa się 26 równań liniowych, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (8-7)$$

gdzie:

[K] – macierz sztywności całego układu z rys. 8-2 o wymiarach (26x26),

{U} – wektor poszukiwanych przemieszczeń węzłów układu z rys. 8-4 o postaci (8-2),

{F} – wektor obciążenia układu zapisany w globalnym układzie współrzędnych o wymiarze (1x26).

### **KROK (B): Budowa macierzy sztywności układu**

W kroku 2 obliczeń rozwiązujemy kolejne elementy skończone zgodnie z procedurą przedstawioną w rozdziale 3 oraz budujemy macierz [K] układu równań MES (8-7) całego układu statycznego. Rozwiązanie kolejnych elementów skończonych przeprowadzamy w lokalnym układzie współrzędnych, a następnie transponujemy go układu globalnego.

#### **Element skończony nr 1 – ES-1:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-1 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4\sqrt{2}$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad [T^1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad (8-8)$$

- macierz sztywności ES-1 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^1]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$





**Element skończony nr 2 – ES-2:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-2 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4\sqrt{2}$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}, \quad [T^2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \end{bmatrix}, \quad (8-14)$$

- macierz sztywności ES-2 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^2]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L = 4 \cdot \sqrt{2}$  m oraz  $GC/EJ_y = 0.20$  mamy:

$$[k^2]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.066 & 0 & -0.188 & -0.066 & 0 & -0.188 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0 \\ -0.188 & 0 & 0.707 & 0.188 & 0 & 0.354 \\ -0.066 & 0 & 0.188 & 0.066 & 0 & 0.188 \\ 0 & -0.035 & 0 & 0 & 0.035 & 0 \\ -0.188 & 0 & 0.354 & 0.188 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad (8-15)$$

- macierz sztywności ES-2 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-14) i (8-15):

$$[k^2]_G = [T^2]^T \cdot [k^2]_L \cdot [T^2] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.066 & 0.133 & 0.133 & -0.066 & 0.133 & 0.133 \\ 0.133 & 0.371 & 0.336 & -0.133 & 0.159 & 0.194 \\ 0.133 & 0.336 & 0.371 & -0.133 & 0.194 & 0.159 \\ -0.066 & -0.133 & -0.133 & 0.066 & -0.133 & -0.133 \\ 0.133 & 0.159 & 0.194 & -0.133 & 0.371 & 0.366 \\ 0.133 & 0.194 & 0.159 & -0.133 & 0.336 & 0.371 \end{bmatrix}, \quad (8-16)$$

- wektor alokacji ES-2 – Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{al^2\} = \{4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9\}^T, \quad (8-17)$$





### Element skończony nr 3 – ES-3:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-3 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-20)$$

- macierz sztywności ES-3 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^3]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^3]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-21)$$

- macierz sztywności ES-3 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-20) i (8-21):

$$[k^3]_G = [T^3]^T \cdot [k^3]_L \cdot [T^3] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & -0.375 & 0 & -0.188 & -0.375 & 0 \\ -0.375 & 1 & 0 & 0.375 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 \\ -0.188 & 0.375 & 0 & 0.188 & 0.375 & 0 \\ -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 \end{bmatrix}, \quad (8-22)$$

- wektor alokacji ES-3– Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{al^3\} = \{7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12\}^T, \quad (8-23)$$





- poszerzenie oraz wpisanie macierzy sztywności  $ES-3$ , zapisanej w układzie globalnym, do wymiarów macierzy sztywności całego układu *wzór (3-18)*:

$$[k^3]_{w[k]} = [A^3] \cdot [k^3]_G \cdot [A^3]^T =$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.188	0	-0.375	-0.188	0	-0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.050	0	0	-0.050	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.375	0	1.000	0.375	0	0.500	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.188	0	0.375	0.188	0	0.375	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.050	0	0	0.050	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.375	0	0.500	0.375	0	1.000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(8-25)

**Element skończony nr 4 – ES-4:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-4 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=2.0$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^4]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-26)$$

- macierz sztywności ES-4 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^4]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=2.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^4]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-27)$$

- macierz sztywności ES-4 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-26) i (8-27):

$$[k^4]_G = [T^4]^T \cdot [k^4]_L \cdot [T^4] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-28)$$

- wektor alokacji ES-4– Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{at^4\} = \{4 \ 5 \ 6 \ 13 \ 14 \ 15\}^T, \quad (8-29)$$



- poszerzenie oraz wpisanie macierzy sztywności ES-4, zapisanej w układzie globalnym, do wymiarów macierzy sztywności całego układu – wzór (3-18):

$$[k^4]_{w[k1]} = [A^4] \cdot [k^4]_G \cdot [A^4]^T =$$

$$= EJ_y \cdot$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.500	0	1.500	0	0	0	0	0	0	0	-1.500	0	-1.500	0	0	0
0	0	0	0	0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.100	0	0	0	0
0	0	0	-1.500	0	2.000	0	0	0	0	0	0	0	1.500	0	1.000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1.500	0	1.500	0	0	0	0	0	0	0	1.500	0	1.500	0	0	0
0	0	0	0	-0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.100	0	0	0	0
0	0	0	-1.500	0	1.000	0	0	0	0	0	0	0	1.500	0	2.000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Element skończony nr 5 – ES-5:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-5 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=2.0$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^5]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-32)$$

- macierz sztywności ES-5 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^5]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix},$$

a po podstawieniu dla  $L=2.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^5]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-33)$$

- macierz sztywności ES-5 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-32) i (8-33):

$$[k^5]_G = [T^5]^T \cdot [k^5]_L \cdot [T^5] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-34)$$

- wektor alokacji ES-5 – Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{al^5\} = \{13 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20\}^T, \quad (8-35)$$





**Element skończony nr 6 – ES-6:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-6 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0\text{ m}$  oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T^6]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8-38)$$

- macierz sztywności ES-6 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^6]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0\text{m}$  oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^6]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-39)$$

- macierz sztywności ES-6 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-38) i (8-39):

$$[k^6]_G = [T^6]^T \cdot [k^6]_L \cdot [T^6] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & -0.375 & 0 & -0.188 & -0.375 & 0 \\ -0.375 & 1.000 & 0 & 0.375 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 \\ -0.188 & 0.375 & 0 & 0.188 & 0.375 & 0 \\ -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 \end{bmatrix}, \quad (8-40)$$

- wektor alokacji ES-6 – Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{al^6\} = \{18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23\}^T, \quad (8-41)$$



- macierz topologii ES-6 oraz macierz transponowana topologii ES-6 – wzór (3-18) oraz Rys. 3-10:

$$[A^6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A^6]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8-42)$$



**Element skończony nr 7 – ES-7:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-7 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0$  m oraz danych z Tabeli 8-1 i Tabeli 8-2:

$$[T^7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^7]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-44)$$

- macierz sztywności ES-7 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^7]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^7]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-45)$$

- macierz sztywności ES-7 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-44) i (8-45):

$$[k^7]_G = [T^7]^{-T} \cdot [k^7]_L \cdot [T^7] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-46)$$

- wektor alokacji ES-7 – Rys. 8-3 i Rys. 8-4:

$$\{al^7\} = \{21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26\}^T, \quad (8-47)$$





### KROK (C): Budowa wektora obciążenia układu

W rozwiązywanym zadaniu występuje obciążenie węzłowe w węźle nr 2 siłą skupioną  $P=40 \text{ kN}$  odpowiadającą niewiadomej  $U_4$  oraz w węźle nr 7 momentem skupionym  $M=20 \text{ kN}\cdot\text{m}$  odpowiadającym niewiadomej  $U_{22}$ . Wektor obciążeń węzłowych układu całego układu jest zatem równy:

$$\{F\}^w = \{0 \ 0 \ 0 \ -40 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (8-50)$$

W rozwiązywanym zadaniu obciążony jest również  $ES-3$  równomiernie rozłożonym obciążeniem o intensywności  $q=20 \text{ kN/m}$ . Brak jest natomiast obciążenia elementów  $ES-1$ ,  $ES-2$ ,  $ES-4$ ,  $ES-5$ ,  $ES-6$ , i  $ES-7$ .

#### Element Skończony $ES-1$ :

Element  $ES-1$  jest nieobciążony, więc:

$$\{f^1\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-51)$$

oraz

$$\{F\}^{(1)} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (7-52)$$

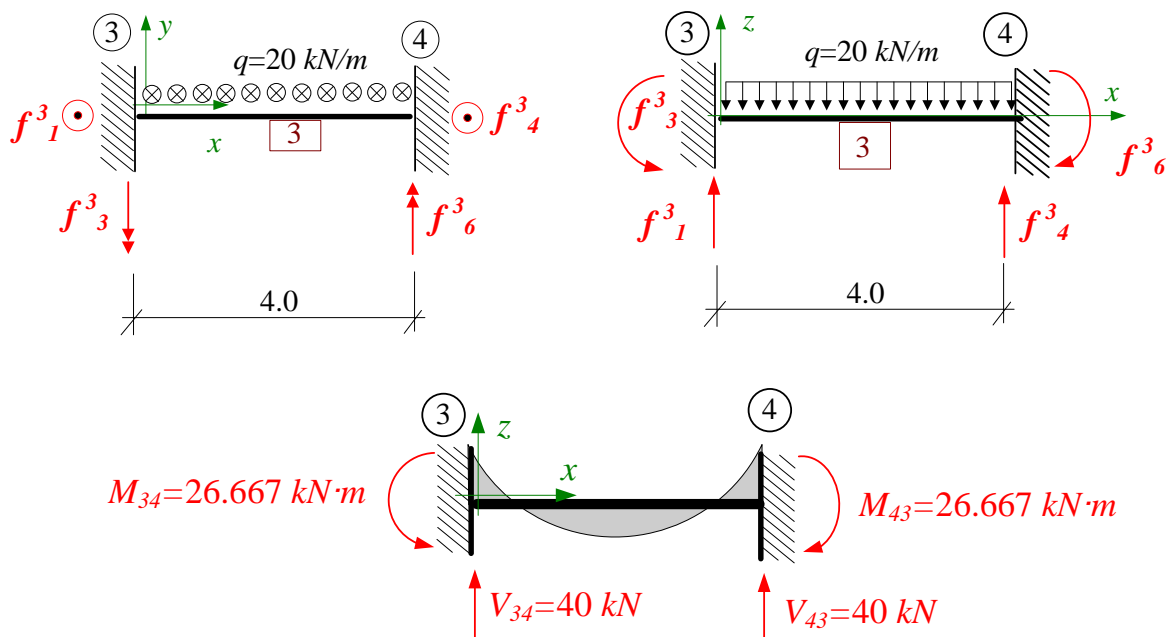
#### Element Skończony $ES-2$ :

Element  $ES-1$  jest nieobciążony, więc:

$$\{f^2\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-53)$$

oraz

$$\{F\}^{(2)} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (7-54)$$



Rys. 8-8. Wyznaczanie zastępczego statycznie równwartego obciążenia węzłowego elementu  $ES-3$



**Element Skończony ES-7:**

Element *ES-1* jest nieobciążony, więc:

$$\{f^7\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-64)$$

oraz

$$\{F\}^{(7)} = \{0 \ 0\}^T. \quad (7-65)$$

Wektor obciążenia całego układu obliczymy sumując:

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{F\}^w - \left( \{F\}^{(1)} + \{F\}^{(2)} + \{F\}^{(3)} + \{F\}^{(4)} + \{F\}^{(5)} + \{F\}^{(6)} + \{F\}^{(7)} \right) = \\ &= \{0 \ 0 \ 0 \ -40 \ 0 \ 0 \ -40 \ 0 \ 26.667 \ -40 \ 0 \ -26.667 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \end{aligned} \quad (7-66)$$

**KROK (D): Wprowadzenie warunków brzegowych**

Układ równań MES rozwiązywanego zadania zapisujemy w postaci:

$$\left( \sum_{j=1}^{j=7} [k^j]_{w[K]} \right) \cdot \{U\} = \{F\}. \quad (8-67)$$

W rozwiązywanym zadaniu warunki brzegowe (Rys. 8-2 i Rys. 8-4) zapiszemy w postaci:

$$U_1 = U_7 = U_{10} = U_{18} = U_{24} = 0, \quad (8-68)$$





**KROK (F): Obliczanie przekrojowych sił wewnętrznych**

Siły wewnętrzne obliczamy w układzie lokalnym. Wobec tego, w pierwszej kolejności określamy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych *ES* (obok wyznaczonych wektorów przemieszczeń węzłów *ES* podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych przemieszczeń stosowane w mechanice budowli):

- element nr 1 w układzie globalnym i lokalnym (wzory (8-8), (8-12) i (8-70):

$$\{U^1\} = [A^1]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -28.2843 \\ 1883.7229 \\ -7195.4806 \\ 141.4214 \\ 1714.0173 \end{Bmatrix}, \quad \{u^1\} = [T^1] \cdot \{U^1\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1311.9933 \\ 1351.9933 \\ -7195.4806 \\ 1311.9933 \\ 1111.9933 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \phi_{x1}^1 \\ \phi_{y1}^1 \\ w_2^1 \\ \phi_{x2}^1 \\ \phi_{x2}^1 \end{Bmatrix}, \quad (8-71)$$

- element nr 2 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-14), (8-18) i (8-70):

$$\{U^2\} = [A^2]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -7195.4806 \\ 141.4214 \\ 1714.0173 \\ 0 \\ 1442.4978 \\ 186.6667 \end{Bmatrix}, \quad \{u^2\} = [T^2] \cdot \{U^2\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -7195.4806 \\ 1111.9933 \\ 1311.9933 \\ 0 \\ -888.0067 \\ -1151.9933 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_2^2 \\ \phi_{x2}^2 \\ \phi_{y2}^2 \\ w_3^2 \\ \phi_{x3}^2 \\ \phi_{x3}^2 \end{Bmatrix}, \quad (8-72)$$

- element nr 3 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-20), (8-24) i (8-70):

$$\{U^3\} = [A^3]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1442.4978 \\ 186.6667 \\ 0 \\ 1442.4978 \\ -120.0000 \end{Bmatrix}, \quad \{u^3\} = [T^3] \cdot \{U^3\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1442.4978 \\ 186.6667 \\ 0 \\ 1442.4978 \\ -120.0000 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_3^3 \\ \phi_{x3}^3 \\ \phi_{y3}^3 \\ w_4^3 \\ \phi_{x4}^3 \\ \phi_{x4}^3 \end{Bmatrix}, \quad (8-73)$$

- element nr 4 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-26), (8-30) i (8-70):

$$\{U^4\} = [A^4]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -7195.4806 \\ 141.4214 \\ 1714.0173 \\ -10596.8485 \\ 141.4214 \\ 1694.0173 \end{Bmatrix}, \quad \{u^4\} = [T^4] \cdot \{U^4\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -7195.4806 \\ 141.4214 \\ 1714.0173 \\ -10596.8485 \\ 141.4214 \\ 1694.0173 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_2^4 \\ \phi_{x2}^4 \\ \phi_{y2}^4 \\ w_5^4 \\ \phi_{x5}^4 \\ \phi_{x5}^4 \end{Bmatrix}, \quad (8-74)$$

- element nr 5 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-32), (8-36) i (8-70):

$$\{U^5\} = [A^5]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -10596.8485 \\ 4871.7576 \\ -5305.0909 \\ 0 \\ 4871.7576 \\ -5285.0909 \end{Bmatrix}, \quad \{u^5\} = [T^5] \cdot \{U^5\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -10596.8485 \\ 4871.7576 \\ -5305.0909 \\ 0 \\ 4871.7576 \\ -5285.0909 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_5^5 \\ \phi_{x5}^5 \\ \phi_{y5}^5 \\ w_6^5 \\ \phi_{x6}^5 \\ \phi_{x6}^5 \end{Bmatrix}, \quad (8-75)$$

- element nr 6 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-38), (8-42) i (8-70):

$$\{U^6\} = [A^6]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 4871.7576 \\ -5285.0909 \\ -19433.6970 \\ 4831.7576 \\ -4885.0909 \end{Bmatrix}, \quad \{u^6\} = [T^6] \cdot \{U^6\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 5285.0909 \\ 4871.7576 \\ -19433.6970 \\ 4885.0909 \\ 4831.7576 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_6^6 \\ \phi_{x6}^6 \\ \phi_{y6}^6 \\ w_7^6 \\ \phi_{x7}^6 \\ \phi_{x7}^6 \end{Bmatrix}, \quad (8-76)$$

- element nr 7 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-44), (8-48) i (8-70):

$$\{U^7\} = [A^7]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -19433.6970 \\ 4831.7576 \\ 4885.0909 \\ 0 \\ 4831.7576 \\ -4845.0909 \end{Bmatrix}, \quad \{u^7\} = [T^7] \cdot \{U^7\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -19433.6970 \\ 4831.7576 \\ -4885.0909 \\ 0 \\ 4831.7576 \\ -4845.0909 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_7^7 \\ \phi_{x7}^7 \\ \phi_{y7}^7 \\ w_8^7 \\ \phi_{x8}^7 \\ \phi_{x8}^7 \end{Bmatrix}, \quad (8-77)$$

Siły wewnętrzne, wyznaczone na podstawie przemieszczeń (8-71) do (8-77) wyznaczonych w układach lokalnych oraz wyrażen (8-9), (8-15), (8-21), (8-27), (8-33), (8-39) i (8-45) wynoszą:

- element nr 1 i element nr 2:

$$\{f^1\}^{(u,\varphi)} = [k^1]_L \cdot \{u^1\} = \begin{Bmatrix} 15.000 \\ 0 \\ 0 \\ -15.000 \\ 0 \\ -84.853 \end{Bmatrix}, \quad \{f^2\}^{(u,\varphi)} = [k^2]_L \cdot \{u^2\} = \begin{Bmatrix} -15.000 \\ 70.110 \\ 14.142 \\ 15.000 \\ -70.110 \\ 70.110 \end{Bmatrix}, \quad (8-78)$$

- element nr 3 i element nr 4:

$$\{f^3\}^{(u,\varphi)} = [k^3]_L \cdot \{u^3\} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 0 \\ 126.667 \\ 25 \\ 0 \\ -26.667 \end{Bmatrix}, \quad \{f^4\}^{(u,\varphi)} = [k^4]_L \cdot \{u^4\} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (8-79)$$

- element nr 5 i element nr 6:

$$\{f^5\}^{(u,\varphi)} = [k^5]_L \cdot \{u^5\} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}, \quad \{f^6\}^{(u,\varphi)} = [k^6]_L \cdot \{u^6\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \\ -5 \\ -20 \\ -20 \end{Bmatrix}, \quad (8-80)$$

- element nr 7:

$$\{f^7\}^{(u,\varphi)} = [k^7]_L \cdot \{u^7\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8-81)$$

Ostateczne siły wewnętrzne wynoszą (obok wyznaczonych wektorów sił węzłowych ES podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych sił wewnętrznych stosowane w mechanice budowli):

$$\{f^1\} = \{f^1\}^{(u,\varphi)} + \{f^1\}^o = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -84.853 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -84.853 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z1}^1 \\ M_{x1}^1 \\ M_{y1}^1 \\ V_{z2}^1 \\ M_{x2}^1 \\ M_{y2}^1 \end{Bmatrix} \quad (8-82)$$

$$\{f^2\} = \{f^2\}^{(u,\varphi)} + \{f^2\}^o = \begin{Bmatrix} -15 \\ 70.110 \\ 14.142 \\ 15 \\ -70.110 \\ 70.110 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15 \\ 70.110 \\ 14.142 \\ 15 \\ -70.110 \\ 70.110 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z2}^2 \\ M_{x2}^2 \\ M_{y2}^2 \\ V_{z3}^2 \\ M_{x3}^2 \\ M_{y3}^2 \end{Bmatrix} \quad (8-83)$$

$$\{f^3\} = \{f^3\}^{(u,\varphi)} + \{f^3\}^o = \begin{Bmatrix} -25 \\ 0 \\ 126.667 \\ 25 \\ 0 \\ -26.667 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \\ -26.667 \\ 40 \\ 0 \\ 26.667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 100 \\ 65 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-84)$$

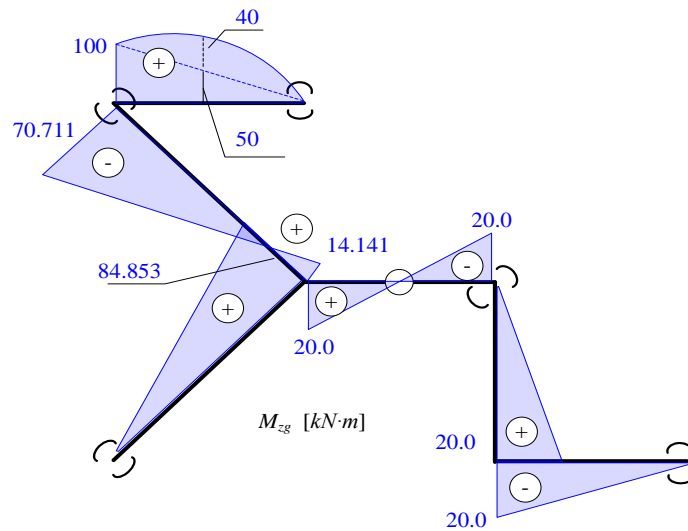
$$\{f^4\} = \{f^4\}^{(u,\varphi)} + \{f^4\}^o = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z2}^4 \\ M_{x2}^4 \\ M_{y2}^4 \\ V_{z5}^4 \\ M_{x5}^4 \\ M_{y5}^4 \end{Bmatrix} \quad (8-85)$$

$$\{f^5\} = \{f^5\}^{(u,\varphi)} + \{f^5\}^o = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z5}^5 \\ M_{x5}^5 \\ M_{y5}^5 \\ V_{z6}^5 \\ M_{x6}^5 \\ M_{y6}^5 \end{Bmatrix} \quad (8-86)$$

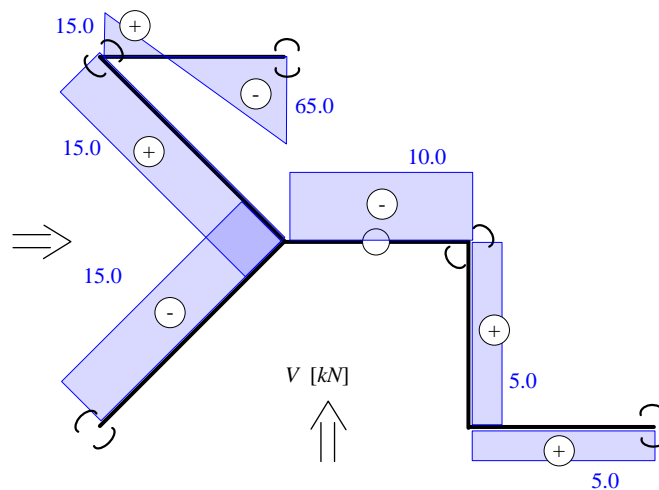
$$\{f^6\} = \{f^6\}^{(u,\varphi)} + \{f^6\}^o = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \\ -5 \\ -20 \\ -20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \\ -5 \\ -20 \\ -20 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z6}^6 \\ M_{x6}^6 \\ M_{y6}^6 \\ V_{z7}^6 \\ M_{x7}^6 \\ M_{y7}^6 \end{Bmatrix} \quad (8-87)$$

$$\{f^7\} = \{f^7\}^{(u,\varphi)} + \{f^7\}^o = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ -20 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z7}^7 \\ M_{x7}^7 \\ M_{y7}^7 \\ V_{z8}^7 \\ M_{x8}^7 \\ M_{y8}^7 \end{Bmatrix} \quad (8-88)$$

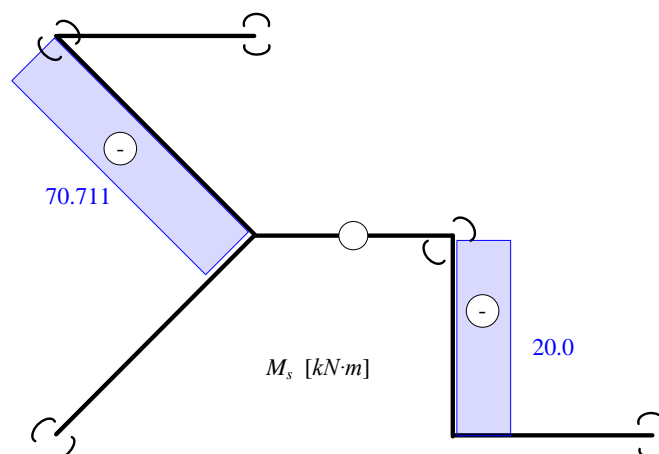
Otrzymane rozwiązanie z uwzględnieniem oznaczeń i znakowania stosowanego w mechanice budowli pokazano w postaci wykresów sił wewnętrznych na Rys. 8-9, Rys. 8- i Rys. 8-11.



Rys. 8-9. Wykresy momentów zginających w zadaniu nr 2



Rys. 8-10. Wykresy sił poprzecznych w zadaniu nr 2 (przy założonych kierunkach patrzenia)

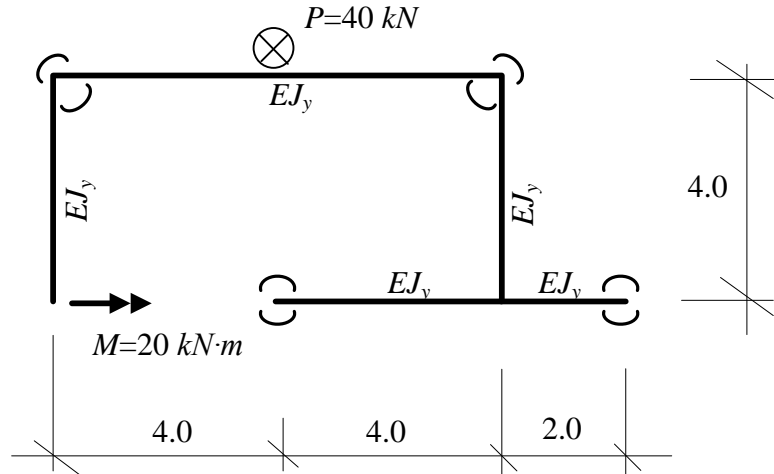


Rys. 8-11. Wykresy momentów skręcających w zadaniu nr 2

## 8.3 Zadanie 3

**DANE:**

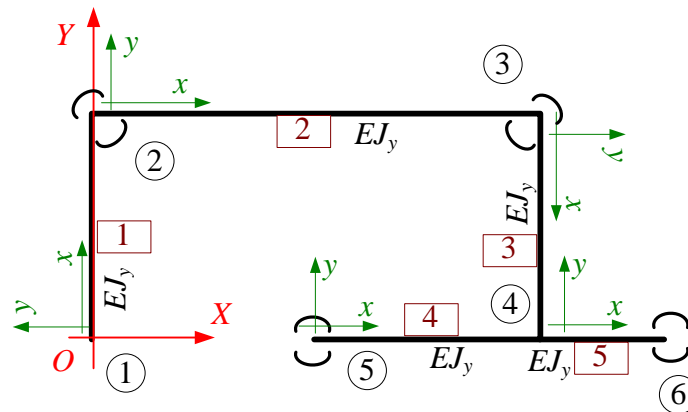
Dana jest płaska rama przestrzennie obciążona jak na Rys. 8-12. Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



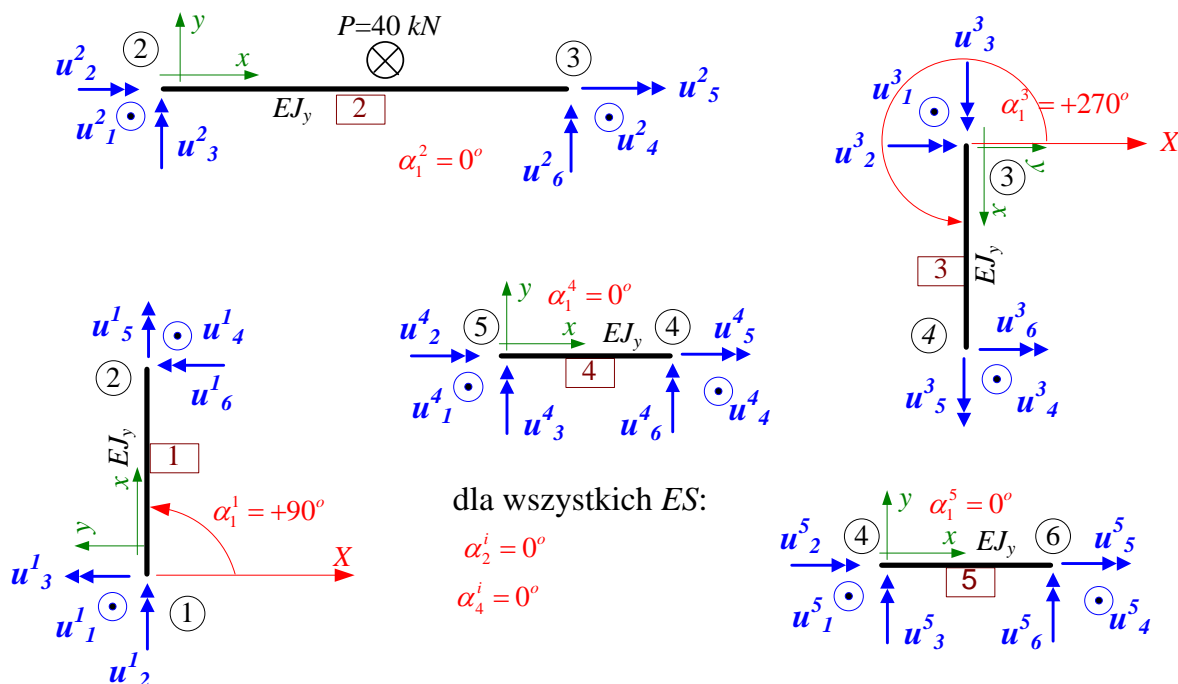
Rys. 8-12. Schemat statyczny rusztu z zadania 3

**KROK (A): Zdefiniowanie modelu MES**

Przyjmujemy globalny układ współrzędnych  $XOY$  (np. pokazany na rys. 7-13), numerujemy węzły oraz pręty układu. Przyjmujemy do rozwiązania element skończony w postaci prostego odcinka pręta z dwoma węzłami, po trzy stopnie swobody w każdym węźle – *rozdział 1, Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.* Dyskretyzację układu wprowadzamy dzieląc układ na PIĘĆ elementów skończonych odpowiadające prętom – Rys. 8-2 i Rys. 8-2. W każdym elemencie skończonym przyjmujemy początek układu oraz związany z nim układ współrzędnych lokalnych  $xOy$ , wg zasad opisanych w *rozdziale 1* Przyjęto, w tym zadaniu, do obliczeń wartość sztywności  $EJ_y = 1.0 \text{ kNm}^2$  ( $E = 1 \text{ kPa}$ ,  $J_y = 1.0 \text{ m}^4$ ),  $GC = 0.2 \text{ kNm}^2$  ( $G = 0.4E$ ,  $C = 0.5 \text{ m}^4$ ).



Rys. 8-13. Schemat statyczny rusztu z zadania 3, numeracja węzłów, ES, przyjęcie lokalnych układów współrzędnych i początków elementów skończonych, przyjęcie globalnego układu współrzędnych



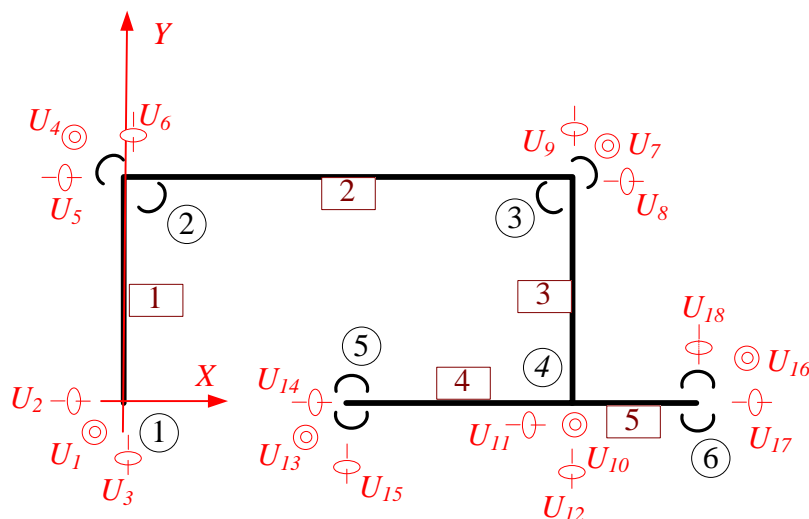
Rys. 8-14. Podział ramy zadania 3 na ES, przyjęcie układów współrzędnych lokalnych i początków ES, numeracja niewiadomych węzłowych ES w lokalnych układach współrzędnych, kąty transformacji lokalnych układów współrzędnych

Wyznaczamy liczbę stopni swobody i wprowadzamy numerację stopni swobody układu, związaną z globalnym układem współrzędnych. W zadaniu mamy sześć węzłów. Zatem liczbę stopni swobody obliczamy jako:

$$s_w = 3 \cdot w = 3 \cdot 6 = 18, \quad (8-89)$$

a więc nasz układ statyczny ma 18 stopni swobody, a wektor przemieszczeń układu można zdefiniować w globalnym układzie współrzędnych następująco:

$$\{U\} = \{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10} \ U_{11} \ U_{12} \ U_{13} \ U_{14} \ U_{15} \ U_{16} \ U_{17} \ U_{18}\}^T \quad (8-90)$$



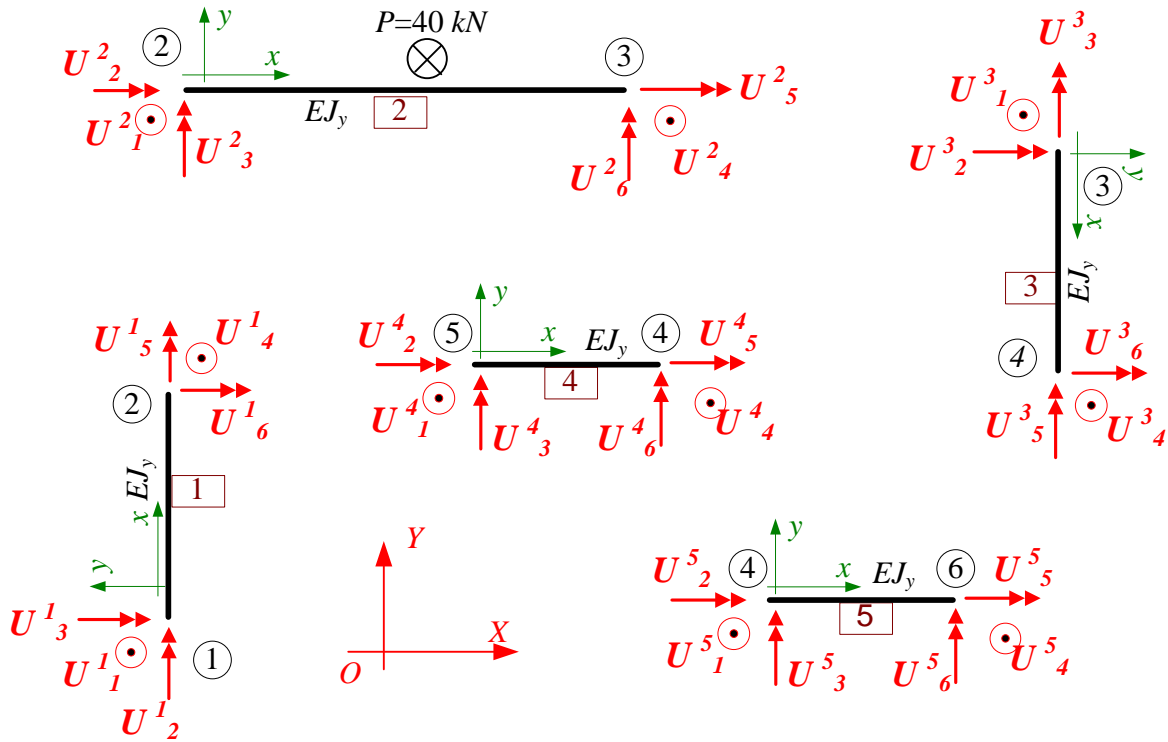
Rys. 8-15. Przyjęta numeracja stopni swobody obliczanej ramy w globalnym układzie współrzędnych

Przyjętą numerację stopni swobody w rozwiązywanym zadaniu pokazano na Rys. 8-2.

Definiujemy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych  $ES$  (1÷5) w lokalnych układach współrzędnych – *wzór (1-114)* – Rys. 8-14:

$$\begin{aligned} \{u^1\} &= \{w_1^1 \ \phi_{x1}^1 \ \phi_{y1}^1 \ w_2^1 \ \phi_{x2}^1 \ \phi_{y2}^1\}^T = \{u_1^1 \ u_2^1 \ u_3^1 \ u_4^1 \ u_5^1 \ u_6^1\}^T, \\ \{u^2\} &= \{w_2^2 \ \phi_{x2}^2 \ \phi_{y2}^2 \ w_3^2 \ \phi_{x3}^2 \ \phi_{y3}^2\}^T = \{u_1^2 \ u_2^2 \ u_3^2 \ u_4^2 \ u_5^2 \ u_6^2\}^T, \\ \{u^3\} &= \{w_3^3 \ \phi_{x3}^3 \ \phi_{y3}^3 \ w_4^3 \ \phi_{x4}^3 \ \phi_{y4}^3\}^T = \{u_1^3 \ u_2^3 \ u_3^3 \ u_4^3 \ u_5^3 \ u_6^3\}^T, \\ \{u^4\} &= \{w_4^4 \ \phi_{x4}^4 \ \phi_{y4}^4 \ w_5^4 \ \phi_{x5}^4 \ \phi_{y5}^4\}^T = \{u_1^4 \ u_2^4 \ u_3^4 \ u_4^4 \ u_5^4 \ u_6^4\}^T, \\ \{u^5\} &= \{w_4^5 \ \phi_{x4}^5 \ \phi_{y4}^5 \ w_6^5 \ \phi_{x6}^5 \ \phi_{y6}^5\}^T = \{u_1^5 \ u_2^5 \ u_3^5 \ u_4^5 \ u_5^5 \ u_6^5\}^T, \end{aligned} \quad (8-91)$$

oraz układzie globalnym (Rys. 8-16):



Rys. 8-16. stopnie swobody poszczególnych  $ES$  w globalnym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned} \{U^1\} &= \{U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ U_4^1 \ U_5^1 \ U_6^1\}^T, \\ \{U^2\} &= \{U_1^2 \ U_2^2 \ U_3^2 \ U_4^2 \ U_5^2 \ U_6^2\}^T, \\ \{U^3\} &= \{U_1^3 \ U_2^3 \ U_3^3 \ U_4^3 \ U_5^3 \ U_6^3\}^T, \\ \{U^4\} &= \{U_1^4 \ U_2^4 \ U_3^4 \ U_4^4 \ U_5^4 \ U_6^4\}^T, \\ \{U^5\} &= \{U_1^5 \ U_2^5 \ U_3^5 \ U_4^5 \ U_5^5 \ U_6^5\}^T, \end{aligned} \quad (8-92)$$

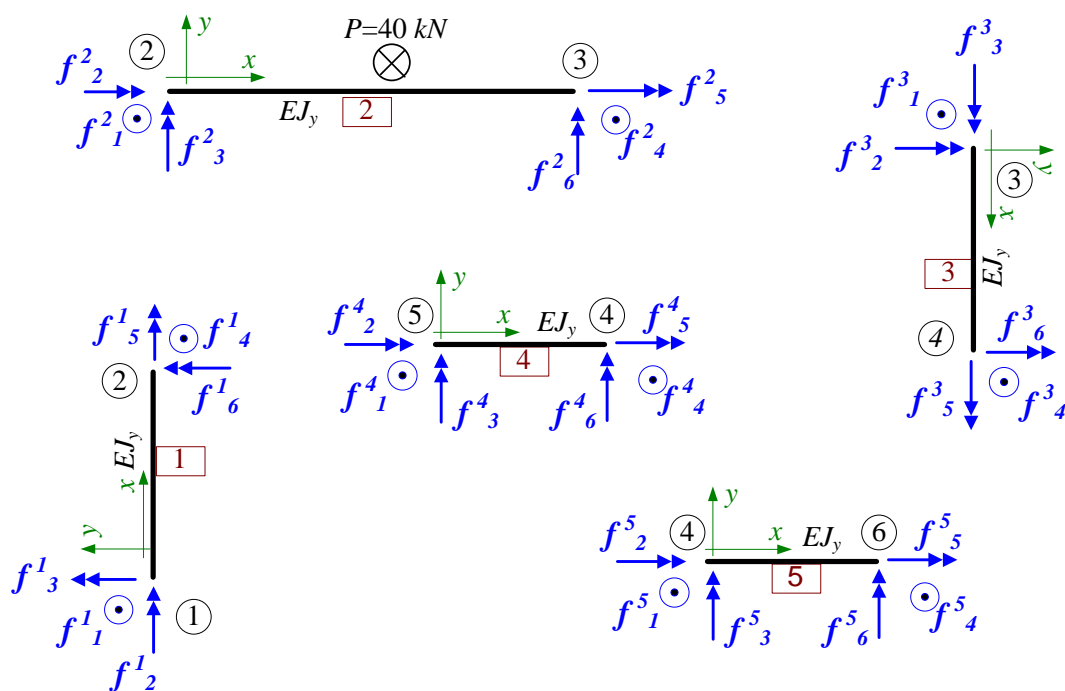
Podobnie zdefiniujemy wektory sił działających w węzłach poszczególnych  $ES$  (1÷5) w lokalnych układach współrzędnych – *wzór (1-131)* – Rys. 8-17:

$$\begin{aligned} \{f^1\} &= \{V_{z1}^1 \ M_{x1}^1 \ M_{y1}^1 \ V_{z2}^1 \ M_{x2}^1 \ M_{y2}^1\}^T = \{f_1^1 \ f_2^1 \ f_3^1 \ f_4^1 \ f_5^1 \ f_6^1\}^T, \\ \{f^2\} &= \{V_{z2}^2 \ M_{x2}^2 \ M_{y2}^2 \ V_{z3}^2 \ M_{x3}^2 \ M_{y3}^2\}^T = \{f_1^2 \ f_2^2 \ f_3^2 \ f_4^2 \ f_5^2 \ f_6^2\}^T, \\ \{f^3\} &= \{V_{z3}^3 \ M_{x3}^3 \ M_{y3}^3 \ V_{z4}^3 \ M_{x4}^3 \ M_{y4}^3\}^T = \{f_1^3 \ f_2^3 \ f_3^3 \ f_4^3 \ f_5^3 \ f_6^3\}^T, \\ \{f^4\} &= \{V_{z5}^4 \ M_{x5}^4 \ M_{y5}^4 \ V_{z4}^4 \ M_{x4}^4 \ M_{y4}^4\}^T = \{f_1^4 \ f_2^4 \ f_3^4 \ f_4^4 \ f_5^4 \ f_6^4\}^T, \\ \{f^5\} &= \{V_{z4}^5 \ M_{x4}^5 \ M_{y4}^5 \ V_{z6}^5 \ M_{x6}^5 \ M_{y6}^5\}^T = \{f_1^5 \ f_2^5 \ f_3^5 \ f_4^5 \ f_5^5 \ f_6^5\}^T, \end{aligned} \quad (8-93)$$

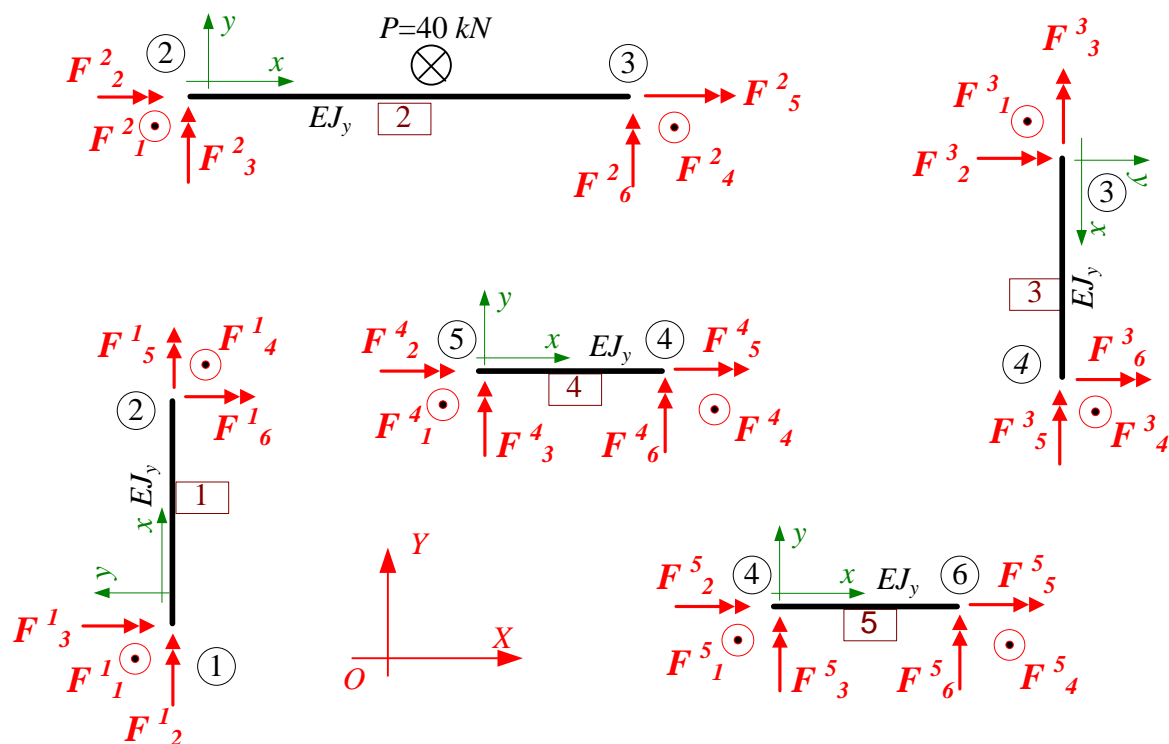


oraz globalnym układzie współrzędnych – Rys. 8-18:

$$\begin{aligned} \{F^1\} &= \{F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_3^1 \quad F_4^1 \quad F_5^1 \quad F_6^1\}^T, \\ \{F^2\} &= \{F_1^2 \quad F_2^2 \quad F_3^2 \quad F_4^2 \quad F_5^2 \quad F_6^2\}^T, \\ \{F^3\} &= \{F_1^3 \quad F_2^3 \quad F_3^3 \quad F_4^3 \quad F_5^3 \quad F_6^3\}^T, \\ \{F^4\} &= \{F_1^4 \quad F_2^4 \quad F_3^4 \quad F_4^4 \quad F_5^4 \quad F_6^4\}^T, \\ \{F^5\} &= \{F_1^5 \quad F_2^5 \quad F_3^5 \quad F_4^5 \quad F_5^5 \quad F_6^5\}^T. \end{aligned} \quad (8-94)$$



Rys. 8-17. Siły w węzłach ES w lokalnych układach współrzędnych



Rys. 8-18. Siły w węzłach ES w globalnym układzie współrzędnych

Tabela 8-3. Geometria obliczanej kratownicy

nr elementu	$X_i$	$Y_i$	$Z_i$	$X_j$	$Y_j$	$Z_j$	$l_{xy} [m]$
1	0	0	0	0	4	0	4
2	0	4	0	8	4	0	8
3	8	4	0	8	0	0	4
4	4	0	0	8	0	0	4
5	8	0	0	10	0	0	2

Tabela 8-4. Geometria obliczanej kratownicy c.d.

nr "k" elementu	$l_k [m]$	$\alpha_1^k [^\circ]$	$\cos(\alpha_1^k)$	$\sin(\alpha_1^k)$	$\cos(\alpha_2^k)$ $\alpha_2^k = 0$	$\sin(\alpha_2^k)$ $\alpha_2^k = 0$	$\cos(\alpha_3^k)$ $\alpha_3^k = 0$	$\sin(\alpha_3^k)$ $\alpha_3^k = 0$
1	4	+90	0	1	1	0	1	0
2	8	0	1	0	1	0	1	0
3	4	+270	0	-1	1	0	1	0
4	4	0	1	0	1	0	1	0
5	2	0	1	0	1	0	1	0

Na podstawie Rys. 8-12 określamy kąty transformacji lokalnych układów współrzędnych związanych z poszczególnymi ES. Wartości tych kątów oraz funkcji sinus i cosinus tych kątów (*potrzebne we wzorach Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania. i Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania. - rozdział Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.*) podano na Rys. 8-14 oraz zestawiono w Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4

Zatem układ równań algebraicznych MES dla analizowanego zadania składa się 18 równań liniowych, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (8-95)$$

gdzie:

[K] – macierz sztywności całego układu z rys. 8-12 o wymiarach (18x18),

{U} – wektor poszukiwanych przemieszczeń węzłów układu z rys. 8-12 o postaci (8-90),

{F} – wektor obciążenia układu zapisany w globalnym układzie współrzędnych o wymiarze (1x18).

### **KROK (B): Budowa macierzy sztywności układu**

W kroku 2 obliczeń rozwiązujemy kolejne elementy skończone zgodnie z procedurą przedstawioną w rozdziale 3 oraz budujemy macierz [K] układu równań MES (8-95) całego układu

stycznego. Rozwiązanie kolejnych elementów skończonych przeprowadzamy w lokalnym układzie współrzędnych, a następnie transponujemy go układu globalnego.

### Element skończony nr 1 – ES-1:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-1 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0\text{ m}$ , oraz danych z Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4:

$$[T^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T^1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8-96)$$

- macierz sztywności ES-1 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^1]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} \\ \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \end{bmatrix} = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0\text{m}$  oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^1]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-97)$$

- macierz sztywności ES-1 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-8) i (8-9):

$$[k^1]_G = [T^1]^T \cdot [k^1]_L \cdot [T^1] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 \\ 0.375 & 1.000 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 \\ -0.188 & -0.375 & 0 & 0.188 & -0.375 & 0 \\ 0.375 & 0.500 & 0 & -0.375 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 \end{bmatrix}, \quad (8-98)$$

- wektor alokacji ES-1 – Rys. 8-14 i Rys. 8-15:

$$\{a^1\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6\}^T, \quad (8-99)$$



### Element skończony nr 2 – ES-2:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-2 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=8.0\text{ m}$ , oraz danych z Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4:

$$[T^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T^2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-102)$$

- macierz sztywności ES-2 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^2]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} \\ -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \end{bmatrix} = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=8\text{ m}$  oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^2]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.023 & 0 & -0.094 & -0.023 & 0 & -0.094 \\ 0 & 0.025 & 0 & 0 & -0.025 & 0 \\ -0.094 & 0 & 0.500 & 0.094 & 0 & 0.250 \\ -0.023 & 0 & 0.094 & 0.023 & 0 & 0.094 \\ 0 & -0.025 & 0 & 0 & 0.025 & 0 \\ -0.094 & 0 & 0.250 & 0.094 & 0 & 0.500 \end{bmatrix}, \quad (8-103)$$

- macierz sztywności ES-2 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-102) i (8-103):

$$[k^2]_G = [T^2]^T \cdot [k^2]_L \cdot [T^2] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.023 & 0 & -0.094 & -0.023 & 0 & -0.094 \\ 0 & 0.025 & 0 & 0 & -0.025 & 0 \\ -0.094 & 0 & 0.500 & 0.094 & 0 & 0.250 \\ -0.023 & 0 & 0.094 & 0.023 & 0 & 0.094 \\ 0 & -0.025 & 0 & 0 & 0.025 & 0 \\ -0.094 & 0 & 0.250 & 0.094 & 0 & 0.500 \end{bmatrix}, \quad (8-104)$$

- wektor alokacji ES-2 – Rys. 8-14 i Rys. 8-15:

$$\{al^2\} = \{4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9\}^T, \quad (8-105)$$



### Element skończony nr 3 – ES-3:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-3 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0$  m, oraz danych z Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4:

$$[T^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T^3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8-108)$$

- macierz sztywności ES-3 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^3]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} \\ \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \end{bmatrix} = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^3]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-109)$$

- macierz sztywności ES-3 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-108) i (8-109):

$$[k^3]_G = [T^3]^T \cdot [k^3]_L \cdot [T^3] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & -0.375 & 0 & -0.188 & -0.375 & 0 \\ -0.375 & 1.000 & 0 & 0.375 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 \\ -0.188 & 0.375 & 0 & 0.188 & 0.375 & 0 \\ -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 & 1.000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 \end{bmatrix}, \quad (8-110)$$

- wektor alokacji ES-3 – Rys. 8-14 i Rys. 8-15:

$$\{al^3\} = \{7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12\}^T, \quad (8-111)$$





**Element skończony nr 4 – ES-4:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-4 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=4.0\text{ m}$ , oraz danych z Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4:

$$[T^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^4]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-114)$$

- macierz sztywności ES-4 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^4]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} \\ \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \end{bmatrix} = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix},$$

a po podstawieniu dla  $L=4.0\text{m}$  oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^4]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-115)$$

- macierz sztywności ES-4 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-26) i (8-27):

$$[k^4]_G = [T^4]^T \cdot [k^4]_L \cdot [T^4] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0 & -0.375 & -0.188 & 0 & -0.375 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1 & 0.375 & 0 & 0.500 \\ -0.188 & 0 & 0.375 & 0.188 & 0 & 0.375 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.500 & 0.375 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-116)$$

- wektor alokacji ES-4 – Rys. 8-14 i Rys. 8-15:

$$\{al^4\} = \{13 \ 14 \ 15 \ 10 \ 11 \ 12\}^T, \quad (8-117)$$



**Element skończony nr 5 – ES-5:**

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-5 wg wzorów (2-60) i (2-61) dla  $L=2.0$  m, oraz danych z Tabeli 8-3 i Tabeli 8-4:

$$[T^5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^5]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8-120)$$

- macierz sztywności ES-5 w lokalnym układzie współrzędnych wg (1-128) ma postać:

$$[k^5]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} \\ -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} \end{bmatrix} = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & 0 & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & 0 & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 & 0 & \frac{GC}{EJ_y} \cdot \frac{GC}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

a po podstawieniu dla  $L=2.0$ m oraz  $GC/EJ_y=0.20$  mamy:

$$[k^5]_L = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-121)$$

- macierz sztywności ES-5 w globalnym układzie współrzędnych – wzory (2-77) oraz (8-120) i (8-121):

$$[k^5]_G = [T^5]^T \cdot [k^5]_L \cdot [T^5] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 1.500 & 0 & -1.500 & -1.500 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 2.000 & 1.500 & 0 & 1.000 \\ -1.500 & 0 & 1.500 & 1.500 & 0 & 1.500 \\ 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0.100 & 0 \\ -1.500 & 0 & 1.000 & 1.500 & 0 & 2.000 \end{bmatrix}, \quad (8-122)$$

- wektor alokacji ES-5 – Rys. 8-14 i Rys. 8-15:

$$\{al^5\} = \{10 \ 11 \ 12 \ 16 \ 17 \ 18\}^T, \quad (8-123)$$



### KROK (C): Budowa wektora obciążenia układu

W rozwiązywanym zadaniu występuje obciążenie węzłowe w węźle nr 1 momentem skupionym  $M=20 \text{ kN}\cdot\text{m}$  oraz odpowiadającym niewiadomej  $U_2$ . Wektor obciążeń węzłowych układu całego układu jest zatem równy:

$$\{F\}^w = \{0 \ 20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (8-126)$$

W rozwiązywanym zadaniu obciążony jest również  $ES-3$  pionową siłą skupioną w środku rozpiętości. Brak jest natomiast obciążenia elementów  $ES-1$ ,  $ES-2$ ,  $ES-4$  i  $ES-5$ .

#### Element Skończony $ES-1$ :

Element  $ES-1$  jest nieobciążony, więc:

$$\{f^1\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-127)$$

oraz

$$\{F\}^{(1)} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (7-128)$$

#### Element Skończony $ES-2$ :

Element  $ES-1$  jest nieobciążony, więc:

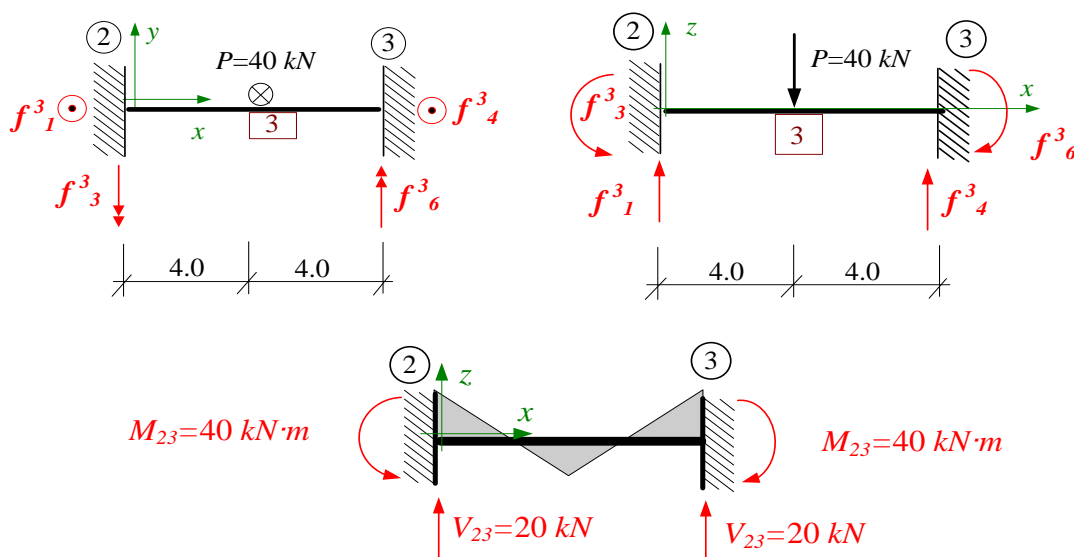
$$\{f^2\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-129)$$

oraz

$$\{F\}^{(2)} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (7-130)$$

#### Element Skończony $ES-3$ :

Element  $ES-3$  jest obciążony siłą skupioną  $P=40 \text{ kN}$  działającą w środku rozpiętości elementu - (Rys. 8-2 i Rys. 8-15). Równowarte statycznie, zastępcze obciążenie węzłowe  $ES-3$  w lokalnym układzie współrzędnych obliczymy w sposób pokazany na Rys. 8-19.



Rys. 8-19. Wyznaczanie zastępczego obciążenia węzłowego elementu  $ES-3$

Mamy:

$$\begin{aligned} \{f^3\}^o = \{f^3\}^q &= \left\{ \frac{P}{2} \quad 0 \quad -\frac{P \cdot l}{8} \quad \frac{P}{2} \quad 0 \quad -\frac{P \cdot l}{8} \right\}^T = \\ &= \{40 \quad 0 \quad -40 \quad 20 \quad 0 \quad 40\}^T \end{aligned} \quad (7-131)$$

Przeprowadzamy transformację wektora (7-131) do układu globalnego (wzór 2-70):

$$\{F^3\}^o = \{F^3\}^q = [T^3]^T \cdot \{f^3\}^o = \{20 \quad 0 \quad -40 \quad 20 \quad 0 \quad 40\}^T, \quad (7-132)$$

a wektor obciążeń całego układu wynikający z obciążenia ES-3 ma postać (wzór (3-33)):

$$\begin{aligned} \{F\}^{(3)} &= [A^3] \cdot \{F^3\}^o = \\ &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0 \quad -40 \quad 20 \quad 0 \quad 40 \quad 0 \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \end{aligned} \quad (7-133)$$

### Element Skończony ES-4:

Element ES-1 jest nieobciążony, więc:

$$\{f^4\}^o = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T, \quad (7-134)$$

oraz

$$\begin{aligned} \{F\}^{(4)} &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T. \end{aligned} \quad (7-135)$$

### Element Skończony ES-5:

Element ES-1 jest nieobciążony, więc:

$$\{f^5\}^o = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T, \quad (7-136)$$

oraz

$$\begin{aligned} \{F\}^{(5)} &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T. \end{aligned} \quad (7-137)$$

Wektor obciążenia całego układu obliczymy sumując:

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{F\}^w - \left( \{F\}^{(1)} + \{F\}^{(2)} + \{F\}^{(3)} + \{F\}^{(4)} + \{F\}^{(5)} \right) = \\ &= \{0 \quad 20 \quad 0 \quad -20 \quad 0 \quad 40 \quad -20 \quad 0 \quad -40 \quad 0 \\ &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \end{aligned} \quad (7-138)$$

## KROK (D): Wprowadzenie warunków brzegowych

Układ równań MES rozwiązywanego zadania zapisujemy w postaci:

$$\left( \sum_{j=1}^{j=5} [k^j]_{w[K]} \right) \cdot \{U\} = \{F\}. \quad (8-139)$$

W rozwiązywanym zadaniu warunki brzegowe (Rys. 8-12 i Rys. 8-15) zapiszemy w postaci:

$$U_4 = U_7 = U_{13} = U_{16} = 0, \quad (8-140)$$



**KROK (E): Rozwiązanie układu równań MES**

Rozwiązanie układu równań (8-141) ma postać:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ_y} \begin{Bmatrix} -3490.3704 \\ 912.5926 \\ 151.1111 \\ 0 \\ 832.5926 \\ 151.1111 \\ 0 \\ 32.5926 \\ -142.2222 \\ -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \\ 0 \\ -7.4074 \\ 13.3333 \\ 0 \\ -7.4074 \\ -13.3333 \end{Bmatrix} \quad (8-142)$$

**KROK (F): Obliczanie przekrojowych sił wewnętrznych**

Siły wewnętrzne obliczamy w układzie lokalnym. Wobec tego, w pierwszej kolejności określamy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych ES (obok wyznaczonych wektorów przemieszczeń węzłów ES podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych przemieszczeń stosowane w mechanice budowli):

- element nr 1 w układzie globalnym i lokalnym (wzory (8-96), (8-100) i (8-142):

$$\{U^1\} = [A^1]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \begin{Bmatrix} -3490.3704 \\ 912.5926 \\ 151.1111 \\ 0 \\ 832.5926 \\ 151.1111 \end{Bmatrix}, \quad \{u^1\} = [T^1] \cdot \{U^1\} = \frac{1}{EJ_y} \begin{Bmatrix} -3490.3704 \\ 151.1111 \\ -912.5926 \\ 0 \\ 151.1111 \\ -832.5926 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \phi_{x1}^1 \\ \phi_{y1}^1 \\ w_2^1 \\ \phi_{x2}^1 \\ \phi_{x2}^1 \end{Bmatrix} \quad (8-143)$$

- element nr 2 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-102), (8-106) i (8-142):

$$\{U^2\} = [A^2]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \begin{Bmatrix} 0 \\ 832.5926 \\ 151.1111 \\ 0 \\ 32.5926 \\ -142.2222 \end{Bmatrix}, \quad \{u^2\} = [T^2] \cdot \{U^2\} = \frac{1}{EJ_y} \begin{Bmatrix} 0 \\ 832.5926 \\ 151.1111 \\ 0 \\ 32.5926 \\ -142.2222 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_2^2 \\ \phi_{x2}^2 \\ \phi_{y2}^2 \\ w_3^2 \\ \phi_{x3}^2 \\ \phi_{x3}^2 \end{Bmatrix}, \quad (8-144)$$



- element nr 3 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-108), (8-112) i (8-142):

$$\{U^3\} = [A^3]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 32.5926 \\ -142.2222 \\ -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \end{Bmatrix}, \quad \{u^3\} = [T^3] \cdot \{U^3\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 142.2222 \\ 32.5926 \\ -23.7037 \\ 8.8889 \\ -7.4074 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_3^3 \\ \phi_{x3}^3 \\ \phi_{y3}^3 \\ w_4^3 \\ \phi_{x4}^3 \\ \phi_{y4}^3 \end{Bmatrix}, \quad (8-145)$$

- element nr 4 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-114), (8-118) i (8-142):

$$\{U^4\} = [A^4]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.4074 \\ 13.3333 \\ -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \end{Bmatrix}, \quad \{u^4\} = [T^4] \cdot \{U^4\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.4074 \\ 13.3333 \\ -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_5^4 \\ \phi_{x5}^4 \\ \phi_{y5}^4 \\ w_4^4 \\ \phi_{x4}^4 \\ \phi_{y4}^4 \end{Bmatrix}, \quad (8-146)$$

- element nr 5 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-120), (8-124) i (8-142):

$$\{U^5\} = [A^5]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \\ 0 \\ -7.4074 \\ -13.3333 \end{Bmatrix}, \quad \{u^5\} = [T^5] \cdot \{U^5\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -23.7037 \\ -7.4074 \\ -8.8889 \\ 0 \\ -7.4074 \\ -13.3333 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} w_4^5 \\ \phi_{x4}^5 \\ \phi_{y4}^5 \\ w_6^5 \\ \phi_{x6}^5 \\ \phi_{y6}^5 \end{Bmatrix}, \quad (8-147)$$

Siły wewnętrzne, wyznaczone na podstawie przemieszczeń (8-143) do (8-147) wyznaczonych w układach lokalnych oraz wyrażeń (8-97), (8-103), (8-109), (8-115) i (8-121) wynoszą:

- element nr 1 i element nr 2:

$$\{f^1\}^{(u,\varphi)} = [k^1]_L \cdot \{u^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}, \quad \{f^2\}^{(u,\varphi)} = [k^2]_L \cdot \{u^2\} = \begin{Bmatrix} -0.833 \\ 20 \\ 40 \\ 0.833 \\ -20 \\ -33.333 \end{Bmatrix}; \quad (8-148)$$

- element nr 3 i element nr 4:

$$\{f^3\}^{(u,\varphi)} = [k^3]_L \cdot \{u^3\} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 6.667 \\ 20 \\ 3 \\ -6.667 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{f^4\}^{(u,\varphi)} = [k^4]_L \cdot \{u^4\} = \begin{Bmatrix} 2.778 \\ 0 \\ 0 \\ -2.778 \\ 0 \\ -11.111 \end{Bmatrix}; \quad (8-149)$$

- element nr 5:

$$\{f^7\}^{(u,\varphi)} = [k^7]_L \cdot \{u^7\} = \begin{Bmatrix} -2.222 \\ 0 \\ 4.444 \\ 2.222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-150)$$

Ponieważ w analizowanym zadaniu obciążony jest jedynie *ES-3* ostateczne siły wewnętrzne wynoszą (obok wyznaczonych wektorów sił węzłowych *ES* podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych sił wewnętrznych stosowane w mechanice budowli):

$$\{f^1\} = \{f^1\}^{(u,\varphi)} + \{f^1\}^o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-151)$$

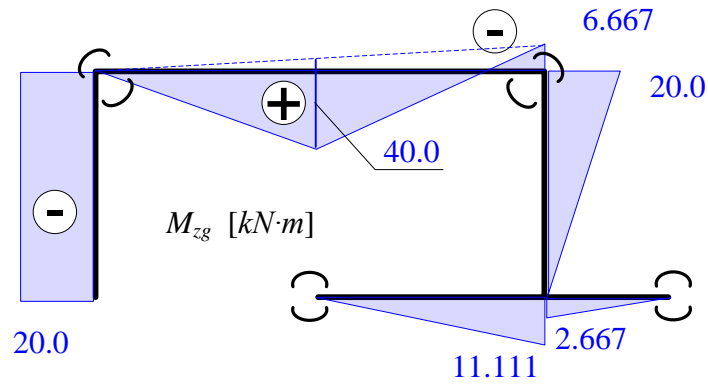
$$\{f^2\} = \{f^2\}^{(u,\varphi)} + \{f^2\}^o = \begin{Bmatrix} -0.833 \\ 20 \\ 40 \\ 0.833 \\ -20 \\ -33.333 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ -40 \\ 20 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19.167 \\ 20 \\ 0 \\ 20.833 \\ -20 \\ 6.667 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-152)$$

$$\{f^3\} = \{f^3\}^{(u,\varphi)} + \{f^3\}^o = \begin{Bmatrix} -5 \\ 6.667 \\ 20 \\ 3 \\ -6.667 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 6.667 \\ 20 \\ 3 \\ -6.667 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-153)$$

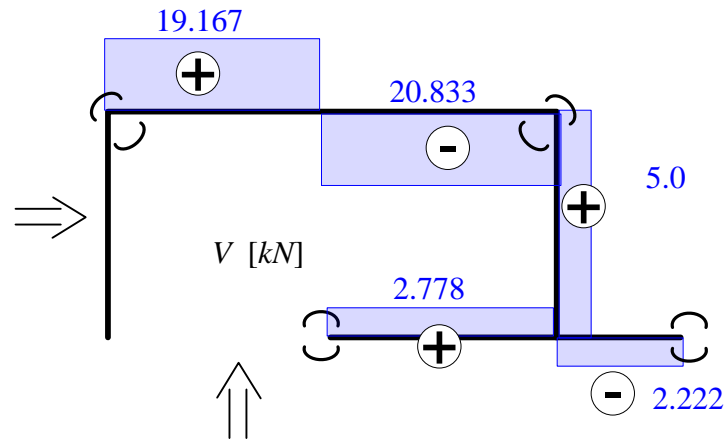
$$\{f^4\} = \{f^4\}^{(u,\varphi)} + \{f^4\}^o = \begin{Bmatrix} 2.778 \\ 0 \\ 0 \\ -2.778 \\ 0 \\ -11.111 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.778 \\ 0 \\ 0 \\ -2.778 \\ 0 \\ -11.111 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-154)$$

$$\{f^5\} = \{f^5\}^{(u,\varphi)} + \{f^5\}^o = \begin{Bmatrix} -2.222 \\ 0 \\ 4.444 \\ 2.222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.222 \\ 0 \\ 4.444 \\ 2.222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-155)$$

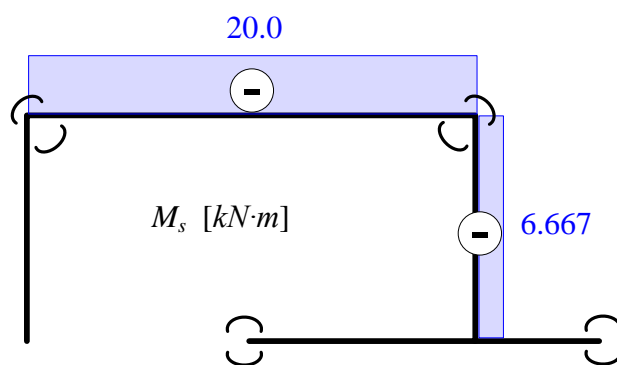
Otrzymane rozwiązanie z uwzględnieniem oznaczeń i znakowania stosowanego w mechanice budowli pokazano w postaci wykresów sił wewnętrznych na Rys. 8-, Rys. 8- i Rys. 8-.



Rys. 8-20. Wykresy momentów zginających w zadaniu nr 3



Rys. 8-21. Wykresy sił poprzecznych w zadaniu nr 3 (przy założonych kierunkach patrzenia)

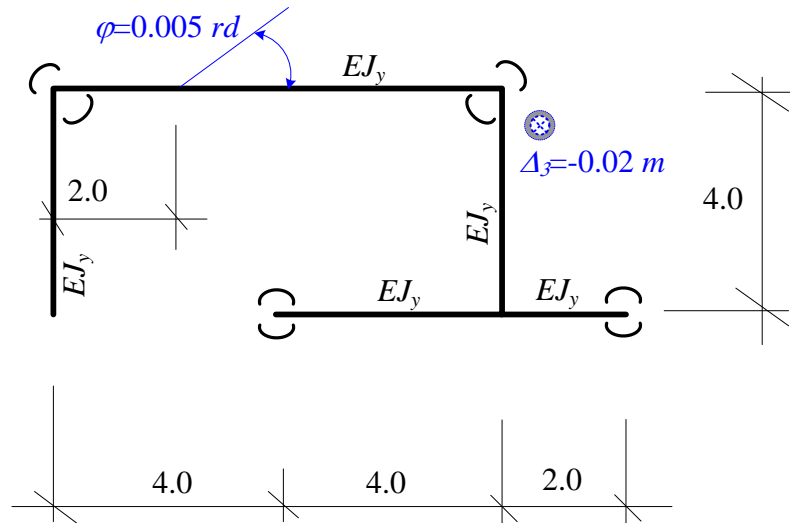


Rys. 8-22. Wykresy momentów skręcających w zadaniu nr 3

## 8.4 Zadanie 4

### DANE:

Dana jest płaska rama przestrzennie obciążona jak na Rys. 8-1-23. Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



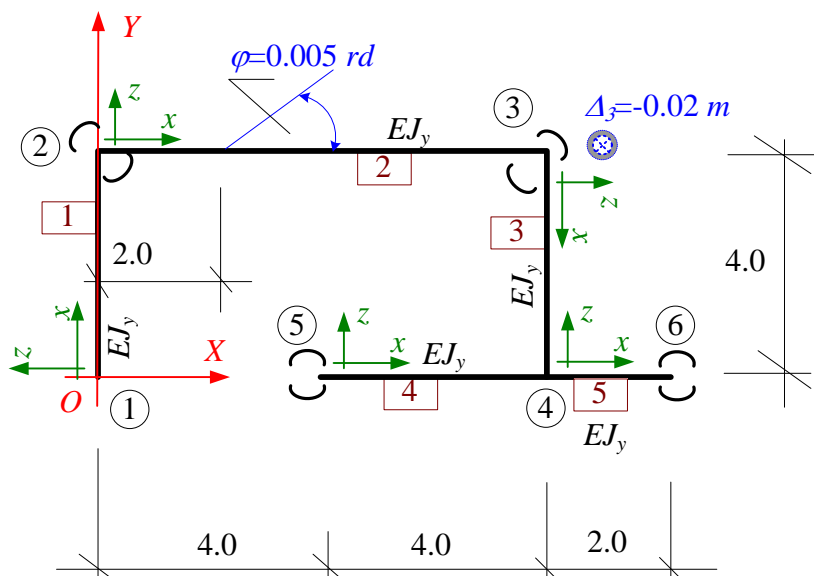
Rys. 8-23. Schemat statyczny rusztu z zadania 4

### KROK (A): Zdefiniowanie modelu MES

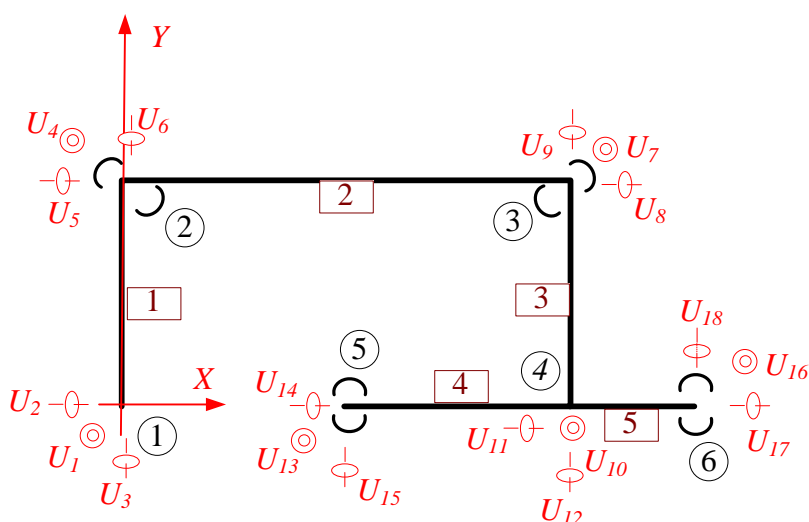
Schemat statyczny zadania jest identyczny jak w zadaniu 3. Wobec tego, do obliczeń przyjmujemy: globalny układ współrzędnych  $XOY$ , numerację węzłów oraz prętów układu, dyskretyzację zadania, początki  $ES$  i lokalne układy współrzędnych takie jak w zadaniu nr 3 – Rys. 8-2-13 do Rys. 8-2-18.

Do rozwiązania przyjmujemy również taki sam jak w zad. nr 3 element skończony w postaci prostego odcinka pręta z dwoma węzłami, po trzy stopnie swobody w każdym węźle – a także wartości danych  $EJ_y=20090.00 \text{ kNm}^2$ ,  $E=2.05 \cdot 10^8 \text{ kPa}$ ,  $J_y=9.80 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $GC=4018.00 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2$ ,  $C=4.90 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$   $C/J_y=0.5$ ,  $G/E=0.4$ .

Liczba stopni swobody, ich numeracja związana z globalnym układem współrzędnych jest taka jak w zadaniu nr 3. Podobnie, potrzebne kąty pomiędzy osiami  $Ox$  lokalnych układów współrzędnych a osią  $OX$  globalnego układu współrzędnych, a także zdefiniowane wektory przemieszczeń węzłów w układach współrzędnych lokalnych i globalnym układzie współrzędnych są takie jak w zadaniu nr 3 – wyrażenia (8-89) do (8-125) oraz Tablica 8-3 i Tablica 8-4. Dla wygody w rozwiązywaniu tego zadania na Rys. 8-24 pokazano schematycznie model obliczeniowy MES, a na Rys. 8-25 numerację przyjętych w zadaniu nr 3 (Rys. 8-15) stopni swobody układu.



Rys. 8-24. Model obliczeniowy MES rusztu z zadania 4



Rys. 8-25. Przyjęta numeracja stopni swobody obliczanej ramy w globalnym układzie współrzędnych

### **KROK (B): Budowa macierzy sztywności układu**

Macierz sztywności układu wyznaczyliśmy w zadaniu nr 3 – wyrażenie (8-141) sumując macierze składowe (8-101), (8-107), (8-112), (8-118) i (8-124) zgodnie z (8-156).

$$[K] = \sum_{j=1}^{j=5} [k^j]_{w[K]} = \left( [k^1]_{w[K]} + [k^2]_{w[K]} + [k^3]_{w[K]} + [k^4]_{w[K]} + [k^5]_{w[K]} \right). \quad (8-156)$$

Otrzymujemy:

$$[K] = EJ_y \cdot \begin{bmatrix} 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 1.000 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.375 & 0 & 0.211e7 & -0.375 & -0.094 & -0.023 & 0 & -0.094 & 0 \\ 0.375 & 0.500 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & -0.094 & 0 & 0.550 & 0.094 & 0 & 0.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.023 & 0 & 0.094 & 0.211e7 & -0.375 & 0.094 & -0.188 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & -0.094 & 0 & 0.250 & 0.094 & 0 & 0.550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 1.875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.050 & -1.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & -1.125 & -0.188 & 0 & 0.375 & -1.500 & 0 & -1.500 & 0 & 0 \\ 1.150 & 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.050 & -0.375 & 0 & 0.500 & 1.500 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & 0.188e7 & 0 & -0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.500 & -0.385 & 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.500 & 0 & 0 & 0 & 1.500e7 & 0 & 1.500 & 0 & 0 \\ -0.100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.500 & 0 & 2.000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(8-157)

### **KROK (C): Budowa wektora obciążenia układu**

W rozwiązywanym zadaniu występuje jako obciążenie wpływ błędu montażowego w postaci załomu osi *ES-2* o kąt  $\varphi = -0.003$ rd oraz pionowe osiadanie podpory w dół w węźle nr 3 o wartość  $\Delta_I = -0.02$ m. Natomiast *ES-1*, *ES-3*, *ES-4* i *ES-5* są nieobciążone.

Wobec tego wektor węzłowych obciążeń układu jest równy zeru:

$$\{F\}^w = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T. \quad (8-158)$$

### **Element Skończony ES-1:**

Element *ES-1* jest nieobciążony, więc:

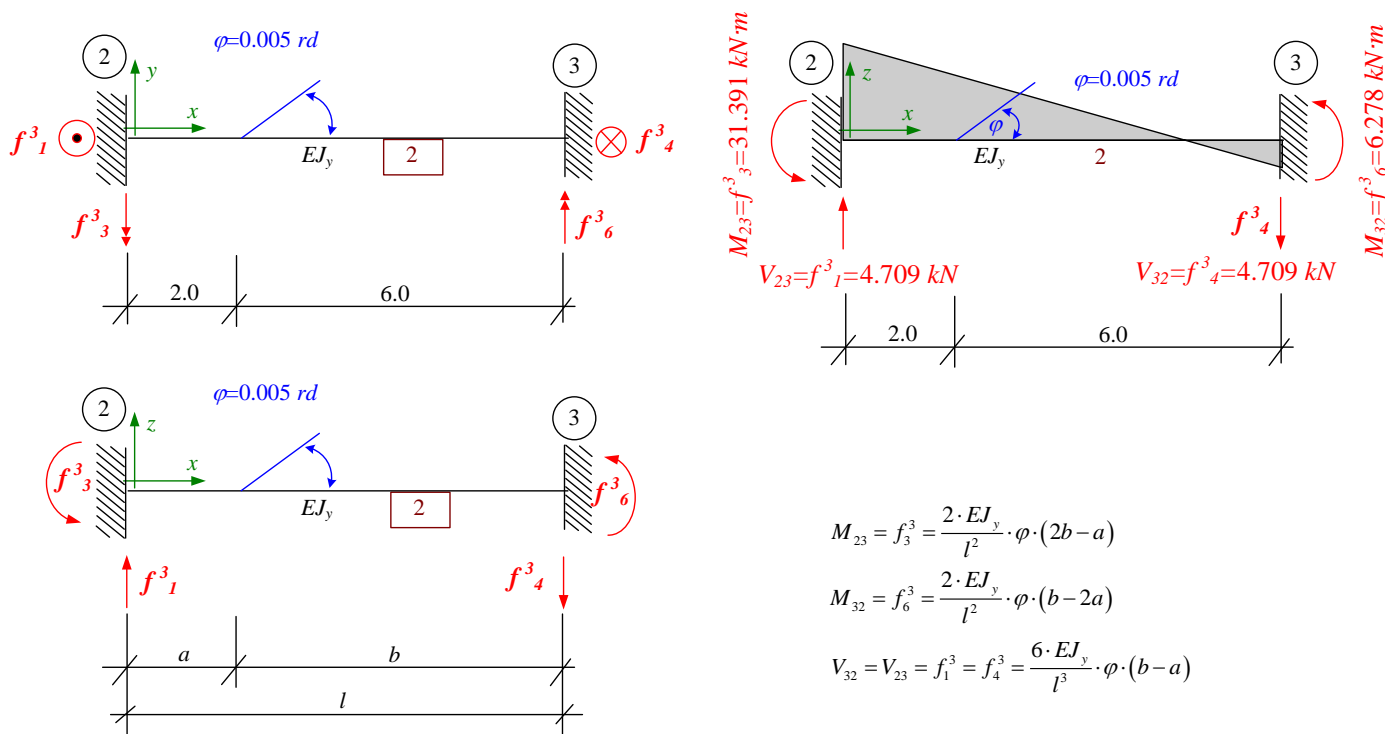
$$\{f^1\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-150)$$

oraz

$$\{F\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T. \quad (7-160)$$

### Element Skończony ES-2:

W elemencie ES-2 występuje błąd montażowy w postaci załomu osi pręta o wartość  $\varphi = -0.005 \text{ rd}$ . Statycznie równowarte obciążenie węzłowe ES-2 obliczymy w sposób pokazany na Rys. 8-26:



Rys. 8-26. Statycznie równowarte wpływi błędu motażowego obciążenia węzłowe ES-2

$$\begin{aligned} \{f^2\}^\circ &= \{f^2\}^\circ = \{V_{23} \quad 0 \quad -M_{23} \quad -V_{32} \quad 0 \quad -M_{32}\}^T = \\ &= \left\{ \frac{6 \cdot EJ_y}{l^3} \cdot \varphi \cdot (b-a) \quad 0 \quad -\frac{2 \cdot EJ_y}{l^2} \cdot \varphi \cdot (3b-a) \quad -\frac{6 \cdot EJ_y}{l^3} \cdot \varphi \cdot (b-a) \quad 0 \quad -\frac{2 \cdot EJ_y}{l^2} \cdot \varphi \cdot (b-2a) \right\}^T = \\ &= \{+4.709 \quad 0 \quad -31.391 \quad -4.709 \quad 0 \quad -6.278\}^T \end{aligned} \quad (7-161)$$

a po transformacji wektora (7-161) mamy:

$$\{F^2\}^\circ = \{F^2\}^\circ = \{+4.709 \quad 0 \quad -31.391 \quad -4.709 \quad 0 \quad -6.278\}^T. \quad (7-162)$$

Wektor obciążeń całego układu wynikający z obciążenia ES-2 ma postać (wzór (3-33)):

$$\begin{aligned} \{F\}^{(2)} &= [A^2] \cdot \{F^2\}^\circ = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -31.309 & 4.709 & 0 & -6.278 & -4.709 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \quad (7-163)$$

**Element Skończony ES-3:**

Element *ES-3* jest nieobciążony, więc:

$$\{f^3\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-164)$$

oraz

$$\{F\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T. \quad (7-165)$$

**Element Skończony ES-4:**

Element *ES-4* jest nieobciążony, więc:

$$\{f^4\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-166)$$

oraz

$$\{F\}^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T. \quad (7-167)$$

**Element Skończony ES-5:**

Element *ES-5* jest nieobciążony, więc:

$$\{f^5\}^o = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T, \quad (7-168)$$

oraz

$$\{F\}^{(5)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T. \quad (7-169)$$

Wektor obciążenia całego układu obliczymy sumując:

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{F\}^w - \left( \{F\}^{(1)} + \{F\}^{(2)} + \{F\}^{(3)} + \{F\}^{(4)} + \{F\}^{(5)} \right) = \{F\}^w - \sum_{j=1}^{j=5} \{F\}^{(j)} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4.709 & 0 & -31.309 & -4.709 & 0 & -6.278 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \quad (7-170)$$

**KROK (D): Wprowadzenie warunków brzegowych**

Układ równań MES rozwiązywanego zadania zapisujemy w postaci:

$$\left( \sum_{j=1}^{j=5} [k^j]_{w|K1} \right) \cdot \{U\} = \{F\}, \quad (8-171)$$



gdzie macierz sztywności (bez uwzględnienia wrunków brzegowych) ma postać:

$$\begin{aligned}
 [K] &= \left( \sum_{j=1}^{j=5} [k^j]_{w[K1]} \right) = \\
 &= EJ_y \cdot \begin{bmatrix}
 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.375 & 1.000 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.188 & -0.375 & 0 & 0.211 & -0.375 & -0.094 & -0.023 & 0 & -0.094 & 0 \\
 0.375 & 0.500 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -0.050 & -0.094 & 0 & 0.550 & 0.094 & 0 & 0.250 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -0.023 & 0 & 0.094 & 0.211 & -0.375 & 0.094 & -0.188 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0.375 \\
 0 & 0 & 0 & -0.094 & 0 & 0.250 & 0.094 & 0 & 0.550 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 1.875 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.050 & -1.125 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.375 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.375 & -1.125 & -0.188 & 0 & 0.375 & -1.500 & 0 & -1.500 & 0 & -1.500 \\
 1.150 & 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & -0.100 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3.050 & -0.375 & 0 & 0.500 & 1.500 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\
 0 & -0.375 & 0.188 & 0 & -0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.050 & 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.500 & -0.385 & 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1.500 & 0 & 0 & 0 & 1.500 & 0 & 1.500 & 0 & 1.500 \\
 -0.100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.100 & 0 & 0 \\
 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 & 1.500 & 0 & 2.000 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8-172}$$

W rozwiązywaniu zadaniu warunki brzegowe (Rys. 8-24 i Rys. 8-25) zapiszemy w postaci:

$$U_4 = U_{13} = U_{16} = 0, \tag{8-173}$$

oraz

$$U_7 = -0.02 \text{ m}. \tag{8-174}$$

W pierwszej kolejności wstawimy warunek brzegowy (8-174) w sposób omawiany w rozdziale 3 skrypty. Mnożymy kolumnę nr 7 (odpowiadającą niewiadomej  $U_7$  z warunku brzegowego (8-174) i zapisaną czerwoną czcionką w (8-172)) przez wartość osiadania podpory i przenosimy ją (zmieniając znak na przeciwny) na prawą stronę układu i dodając ją do kolumny wyrazów wolnych. Otrzymamy wektor obciążenia układu wynikający z wpływu osiadania podpory:

$$\{F\}^{(\Delta)} = -(-0.02) \cdot EJ_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.02344 \\ 0 \\ 0.09375 \\ 0.21094 \\ -0.37500 \\ 0.09375 \\ -0.18750 \\ -0.37500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.4172 \\ 0 \\ 37.6688 \\ 84.7547 \\ -150.6750 \\ 37.6688 \\ -75.3375 \\ -150.6750 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8-175)$$

Pozostałe warunki brzegowe uwzględniamy w sposób standardowy (np. sposobem trzecim – rozdział 3 skryptu) i uwzględnieniu obciążenia ES-1 (7-170) otrzymamy:

$$EJ_y \cdot \begin{pmatrix} 0.188 & 0.375 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.375 & 1.000 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.188 & -0.375 & 0 & 0.211e7 & -0.375 & -0.094 & -0.023 & 0 & -0.094 & 0 \\ 0.375 & 0.500 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.050 & -0.094 & 0 & 0.550 & 0.094 & 0 & 0.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.023 & 0 & 0.094 & 0.211e7 & -0.375 & 0.094 & -0.188 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.025 & 0 & -0.375 & 1.025 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & -0.094 & 0 & 0.250 & 0.094 & 0 & 0.550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 & 0.375 & 0 & 1.875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.375 & 0.500 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.050 & -1.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.188 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.709 \\ 0 \\ 31.309 \\ 4.709 \\ 0 \\ 6.278 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -9.417 \\ 0 \\ 37.669 \\ 84.755 \\ -150.675 \\ 37.669 \\ -75.338 \\ -150.675 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8-176)$$



**KROK (E): Rozwiązanie układu równań MES**

Rozwiązanie układu równań (8-177) ma postać:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 402.7567 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \\ 0 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \\ -401.8000 \\ -100.6892 \\ 22.2425 \\ 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \\ 0 \\ -100.6892 \\ -0.7175 \\ 0 \\ -100.6892 \\ 0.3588 \end{Bmatrix} \quad (8-175)$$

**KROK (F): Obliczanie przekrojowych sił wewnętrznych**

Siły wewnętrzne obliczamy w układzie lokalnym. Wobec tego, w pierwszej kolejności określamy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych *ES* (obok wyznaczonych wektorów przemieszczeń węzłów *ES* podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych przemieszczeń stosowane w mechanice budowli):

- element nr 1 w układzie globalnym i lokalnym (wzory (8-96), (8-100) i (8-175):

$$\{U^1\} = [A^1]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 402.7567 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \\ 0 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \end{Bmatrix}, \quad \{u^1\} = [T^1] \cdot \{U^1\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 402.7567 \\ 126.9975 \\ 100.6892 \\ 0 \\ 126.9975 \\ 100.6892 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \phi_{x1}^1 \\ \phi_{y1}^1 \\ w_2^1 \\ \phi_{x2}^1 \\ \phi_{x2}^1 \end{Bmatrix} \quad (8-176)$$

- element nr 2 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-102), (8-106) i (8-175):

$$\{U^2\} = [A^2]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \\ -401.8000 \\ -100.6892 \\ 22.2425 \end{Bmatrix}, \quad \{u^2\} = [T^2] \cdot \{U^2\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -100.6892 \\ 126.9975 \\ -401.8000 \\ -100.6892 \\ 22.2425 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_2^2 \\ \phi_{x2}^2 \\ \phi_{y2}^2 \\ w_3^2 \\ \phi_{x3}^2 \\ \phi_{x3}^2 \end{Bmatrix}, \quad (8-177)$$

- element nr 3 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-108), (8-112) i (8-175):

$$\{U^3\} = [A^3]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -401.8000 \\ -100.6892 \\ 22.2425 \\ 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \end{Bmatrix}, \quad \{u^3\} = [T^3] \cdot \{U^3\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} -401.8000 \\ -22.2425 \\ -100.6892 \\ 0.9567 \\ -0.7175 \\ -10.6892 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_3^3 \\ \phi_{x3}^3 \\ \phi_{y3}^3 \\ w_4^3 \\ \phi_{x4}^3 \\ \phi_{x4}^3 \end{Bmatrix}, \quad (8-178)$$

- element nr 4 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-114), (8-118) i (8-175):

$$\{U^4\} = [A^4]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -100.6892 \\ -0.7175 \\ 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \end{Bmatrix}, \quad \{u^4\} = [T^4] \cdot \{U^4\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -100.6892 \\ -0.7175 \\ 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_5^4 \\ \phi_{x5}^4 \\ \phi_{y5}^4 \\ w_4^4 \\ \phi_{x4}^4 \\ \phi_{x4}^4 \end{Bmatrix} \quad (8-179)$$

- element nr 5 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenie (8-120), (8-124) i (8-175):

$$\{U^5\} = [A^5]^T \cdot \{U\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \\ 0 \\ -100.6892 \\ 0.3588 \end{Bmatrix}, \quad \{u^4\} = [T^5] \cdot \{U^5\} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \begin{Bmatrix} 0.9567 \\ -100.6892 \\ 0.7175 \\ 0 \\ -100.6892 \\ 0.3588 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_4^5 \\ \phi_{x4}^5 \\ \phi_{y4}^5 \\ w_6^5 \\ \phi_{x6}^5 \\ \phi_{x6}^5 \end{Bmatrix} \quad (8-180)$$

Siły wewnętrzne, wyznaczone na podstawie przemieszczeń (8-176) do (8-180) wyznaczonych w układach lokalnych oraz wyrażeń (8-97), (8-103), (8-109), (8-115) i (8-121) wynoszą (obok wyznaczonych wektorów sił węzłowych ES podano dla przypomnienia w formie wektora odpowiednie oznaczenia tych sił wewnętrznych stosowane w mechanice budowli):

- element nr 1 i element nr 2:

$$\{f^1\}^{(u,\varphi)} = [k^1]_L \cdot \{u^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{f^2\}^{(u,\varphi)} = [k^2]_L \cdot \{u^2\} = \begin{Bmatrix} -4.574 \\ 0 \\ 31.391 \\ 4.574 \\ 0 \\ 5.202 \end{Bmatrix}, \quad (8-181)$$

- element nr 3 i element nr 4:

$$\{f^3\}^{(u,\varphi)} = [k^3]_L \cdot \{u^3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.076 \\ 0 \\ 0 \\ 1.076 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{f^4\}^{(u,\varphi)} = [k^4]_L \cdot \{u^4\} = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0.717 \end{Bmatrix}, \quad (8-182)$$

- element nr 5:

$$\{f^7\}^{(u,\varphi)} = [k^7]_L \cdot \{u^7\} = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0.359 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-183)$$

Ponieważ w analizowanym zadaniu obciążony jest jedynie *ES-3* ostateczne siły wewnętrzne wynoszą:

$$\{f^1\} = \{f^1\}^{(u,\varphi)} + \{f^1\}^o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z1}^1 \\ M_{x1}^1 \\ M_{y1}^1 \\ V_{z3}^1 \\ M_{x3}^1 \\ M_{y3}^1 \end{Bmatrix} \quad (8-184)$$

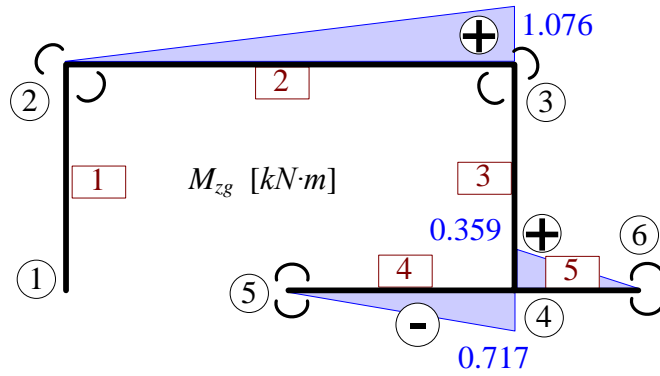
$$\{f^2\} = \{f^2\}^{(u,\varphi)} + \{f^2\}^o = \begin{Bmatrix} -4.574 \\ 0 \\ 31.391 \\ 4.574 \\ 0 \\ 5.202 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4.709 \\ 0 \\ -31.391 \\ -4.709 \\ 0 \\ -6.278 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.135 \\ 0 \\ 0 \\ -0.135 \\ 0 \\ -1.076 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z2}^2 \\ M_{x2}^2 \\ M_{y2}^2 \\ V_{z3}^2 \\ M_{x3}^2 \\ M_{y3}^2 \end{Bmatrix} \quad (8-185)$$

$$\{f^3\} = \{f^3\}^{(u,\varphi)} + \{f^3\}^o = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.076 \\ 0 \\ 30 \\ 1.076 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.076 \\ 0 \\ 30 \\ 1.076 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \end{Bmatrix} \quad (8-186)$$

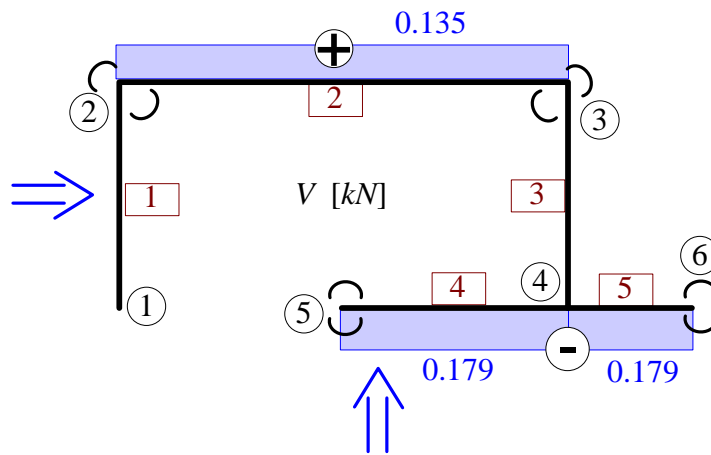
$$\{f^4\} = \{f^4\}^{(u,\varphi)} + \{f^4\}^o = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0.717 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0.717 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z5}^4 \\ M_{x5}^4 \\ M_{y5}^4 \\ V_{z4}^4 \\ M_{x4}^4 \\ M_{y4}^4 \end{Bmatrix} \quad (8-187)$$

$$\{f^5\} = \{f^5\}^{(u,\varphi)} + \{f^5\}^o = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0.359 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0 \\ 0.359 \\ 0.179 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{z4}^5 \\ M_{x4}^5 \\ M_{y4}^5 \\ V_{z6}^5 \\ M_{x6}^5 \\ M_{y6}^5 \end{Bmatrix} \quad (8-188)$$

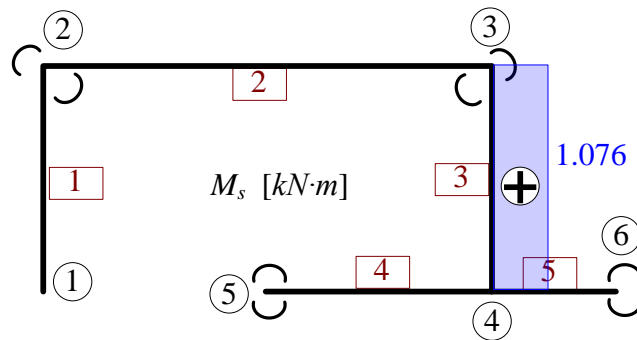
Otrzymane rozwiązanie z uwzględnieniem oznaczeń i znakowania stosowanego w mechanice budowli pokazano w postaci wykresów sił wewnętrznych na Rys. 8-, Rys. 8- i Rys. 8-.



Rys. 8-27. Wykresy momentów zginających w zadaniu nr 4



Rys. 8-28. Wykresy sił poprzecznych w zadaniu nr 4



Rys. 8-29. Wykresy momentów skręcających w zadaniu nr 4