

MES W ANALIZIE SPREŻYSTEJ UKŁADÓW PRĘTOWYCH

Przykłady obliczeń

Ramy przestrzenne

Lidia FEDOROWICZ
Jan FEDOROWICZ
Magdalena MROZEK
Dawid MROZEK

Gliwice 2017r.

Rozwiązanie zadań Rozdziału 9

RAMY PRZESTRZENNE

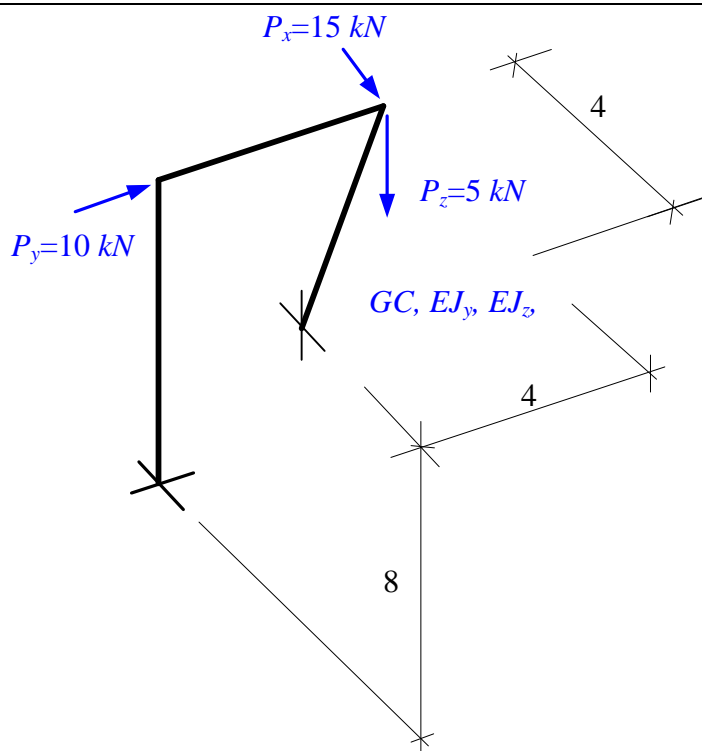
Niniejszy tekst jest częścią skryptu pt.: „*MES w analizie sprężystej układów prętowych. Przykłady obliczeń*” i stanowi przedłużenie rozdziału 9 skryptu.

W pliku zawarto szczegółowo przedstawione krok po kroku rozwiązanie jednej przestrzennej ramy z wykorzystaniem MES. Numeracja zadań w pliku jest kontynuacją numeracji ze skryptu. Numeracja rysunków, tablic i wzorów rozpoczyna się od 1 z dołączonym numerem rozdziału skryptu. Wszystkie konieczne odwołania do treści zawartych w skrypcie są wyraźnie zaznaczone i opisane z podaniem nr rozdziału i odpowiedniego numeru wzoru bądź rysunku i napisane są czcionką pochyłą koloru różowego.

Wszystkie oznaczenia używane w pliku, algorytm postępowania przy rozwiązywaniu zadań oraz podstawy teoretyczne MES podano w skrypcie.

RAMY PRZESTRZENNE – zadania rozwiązane w pliku**9.2. Zadanie 2**

Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.

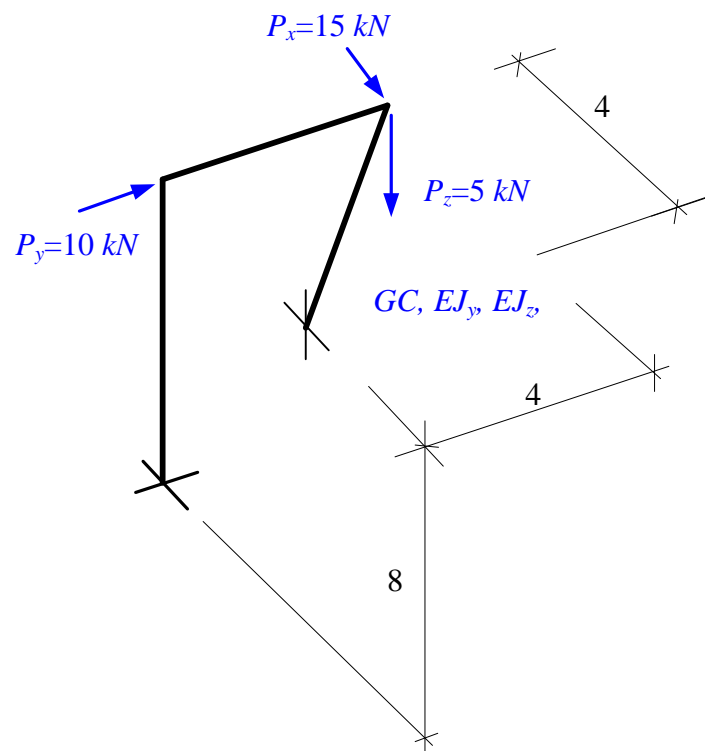


9 RAMY PRZESTRZENNE

9.2 Zadanie 2

DANE:

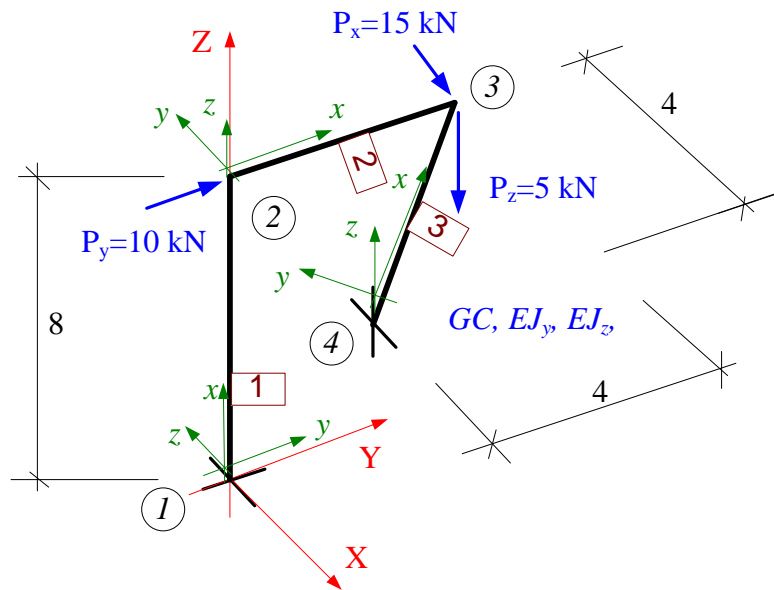
Dana jest rama przestrzenna obciążona przestrzennie jak na Rys. 9-1. Stosując MES, obliczyć siły wewnętrzne w układzie.



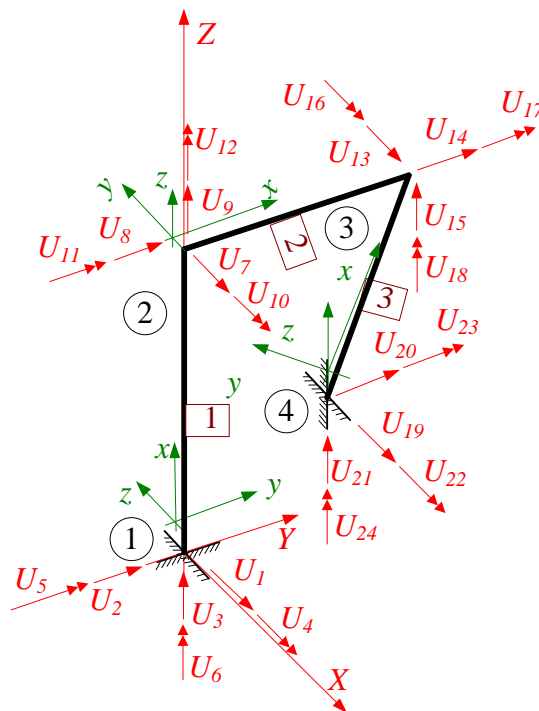
Rys. 9-1. Schemat statyczny ramy z zadania 2

KROK (A): Zdefiniowanie modelu MES

Przyjmujemy globalny układ współrzędnych XOY (np. w miejscu pokazanym na Rys. 9-2). Numerujemy węzły oraz pręty układu. Przyjmujemy do rozwiązania element skończony w postaci prostego odcinka pręta z dwoma węzłami, po sześć stopni swobody w każdym węźle – *rozdział 1, Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.*. Dyskretyzację układu wprowadzimy dzieląc układ na trzy elementy skończone, odpowiadające prętom – Rys. 9-2. W każdym elemencie skończonym przyjmujemy początek układu oraz związany z nim układ współrzędnych lokalnych xOy , wg zasad opisanych w *rozdziale 3* Przyjęto, w tym zadaniu dla uproszczenia, do obliczeń wartość sztywności $EJ_z=10 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$, $EJ_y=5.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ $GC=1.0 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ oraz $EA=20 \text{ kN}$.



Rys. 9-2. Model MES ramy z zadania 2, numeracja węzłów, ES, przyjęcie globalnego układu współrzędnych, przyjęcie lokalnych układów współrzędnych i początków ES



Rys. 9-3. Model MES ramy z zadania 2, umieracja niewiadomych przemieszczeń w globalnym układzie współrzędnych

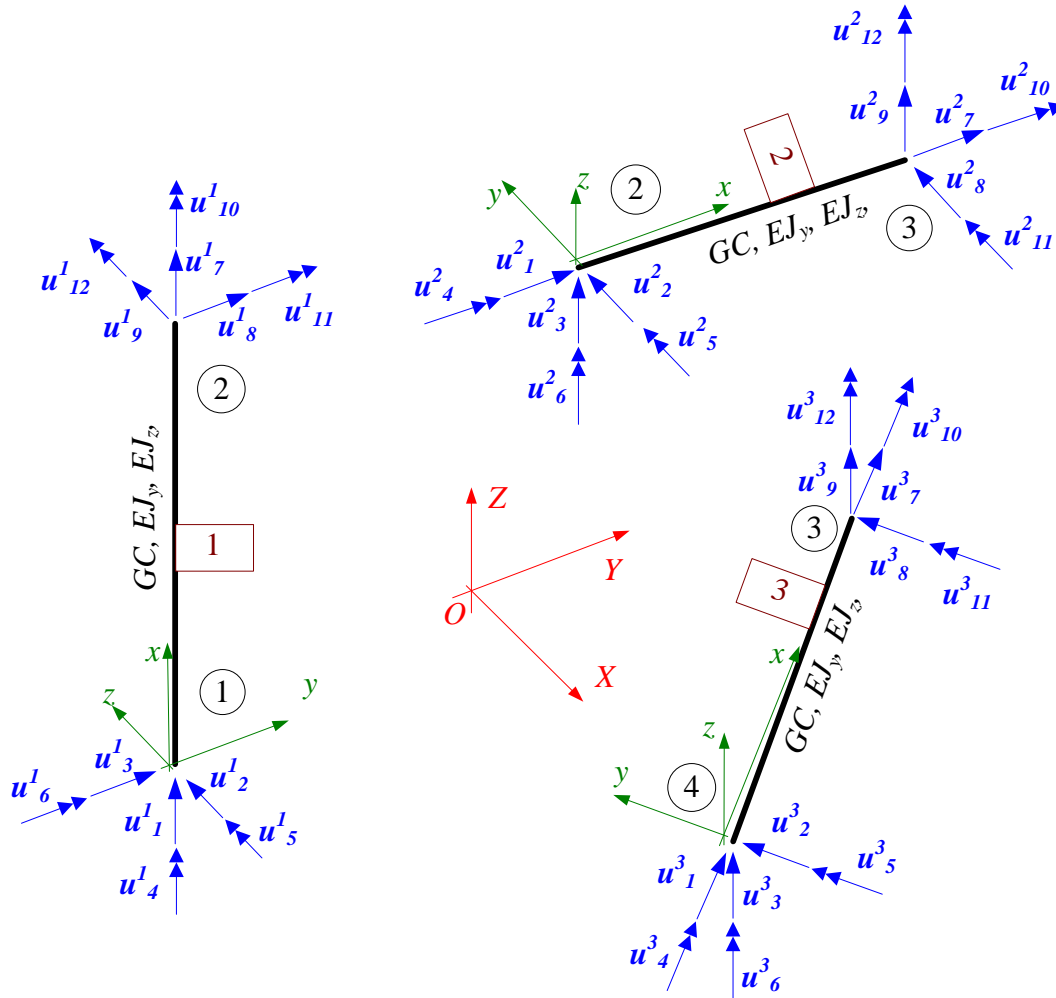
Wyznaczamy liczbę stopni swobody i wprowadzamy numerację stopni swobody układu związaną z globalnym układem współrzędnych (Rys. 9-2). W zadaniu mamy cztery węzły. Zatem liczbę stopni swobody obliczamy jako:

$$s_w = 6 \cdot w = 6 \cdot 4 = 24, \quad (9-1)$$

a więc nasz układ statyczny ma 24 stopni swobody, a wektor przemieszczeń układu można zdefiniować w globalnym układzie współrzędnych następująco:

$$\{U\} = \{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10} \ U_{11} \ U_{12} \ U_{13} \ U_{14} \ U_{15} \ U_{16} \ U_{17} \ U_{18} \ U_{19} \ U_{20} \ U_{21} \ U_{22} \ U_{23} \ U_{24}\}^T \quad (9-2)$$

Przyjętą numerację stopni swobody w rozwiązywanym zadaniu pokazano na Rys. 9-2. Definiujemy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych *ES* w układach lokalnych (wg (1-3) – Rys. 9-4):

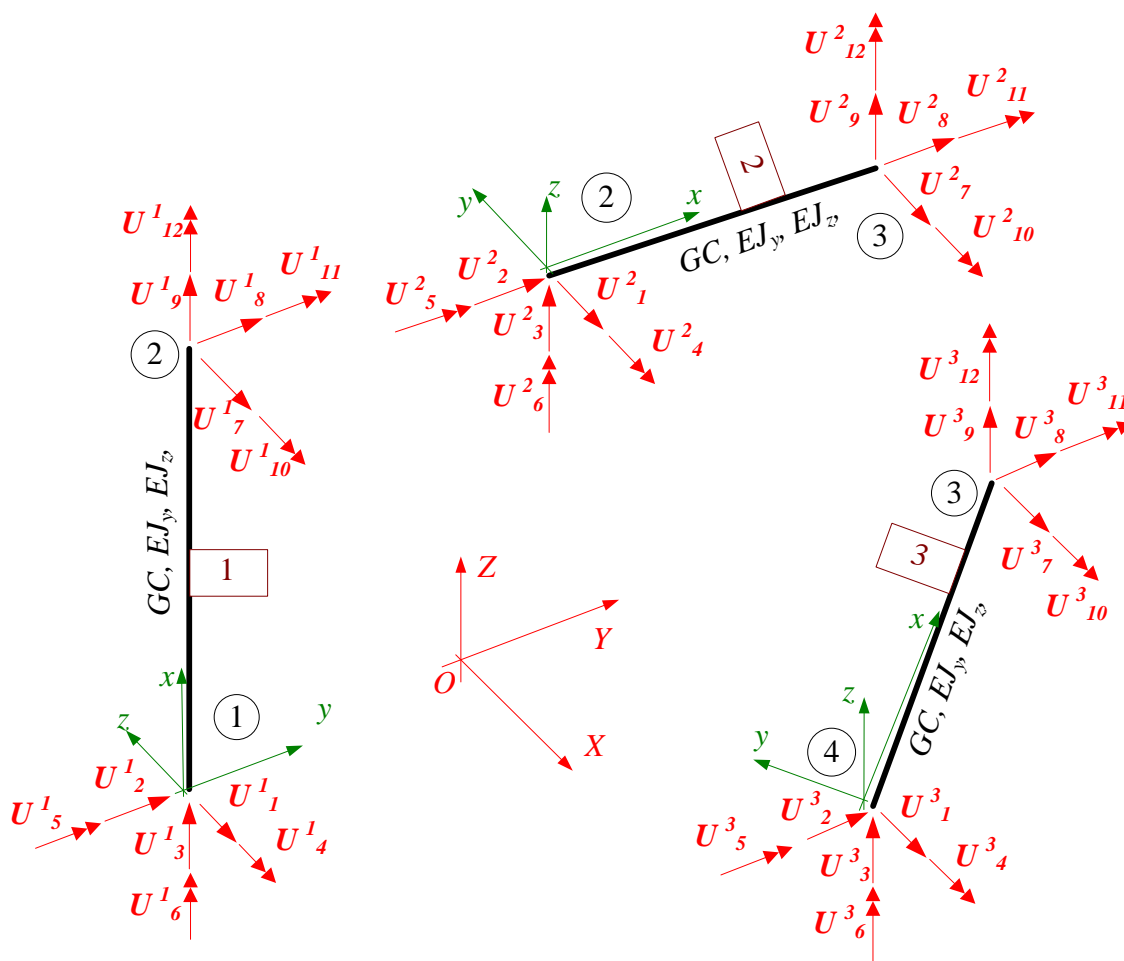


Rys. 9-4. Definicja przemieszczeń węzłów *ES* w lokalnych układach współrzędnych

$$\begin{aligned}
 \{u^1\} &= \{u_1^1 \quad v_1^1 \quad w_1^1 \quad \phi_{x1}^1 \quad \phi_{y1}^1 \quad \phi_{z1}^1 \quad u_2^1 \quad v_2^1 \quad w_2^1 \quad \phi_{x2}^1 \quad \phi_{y2}^1 \quad \phi_{z2}^1\} = \\
 &= \{u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_4^1 \quad u_5^1 \quad u_6^1 \quad u_7^1 \quad u_8^1 \quad u_9^1 \quad u_{10}^1 \quad u_{11}^1 \quad u_{12}^1\}^{TT} \\
 \{u^2\} &= \{u_2^2 \quad v_2^2 \quad w_2^2 \quad \phi_{x2}^2 \quad \phi_{y2}^2 \quad \phi_{z2}^2 \quad u_3^2 \quad v_3^2 \quad w_3^2 \quad \phi_{x3}^2 \quad \phi_{y3}^2 \quad \phi_{z3}^2\} = \\
 &= \{u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad u_4^2 \quad u_5^2 \quad u_6^2 \quad u_7^2 \quad u_8^2 \quad u_9^2 \quad u_{10}^2 \quad u_{11}^2 \quad u_{12}^2\}^T \\
 \{u^3\} &= \{u_3^3 \quad v_3^3 \quad w_3^3 \quad \phi_{x3}^3 \quad \phi_{y3}^3 \quad \phi_{z3}^3 \quad u_4^3 \quad v_4^3 \quad w_4^3 \quad \phi_{x4}^3 \quad \phi_{y4}^3 \quad \phi_{z4}^3\} = \\
 &= \{u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3 \quad u_4^3 \quad u_5^3 \quad u_6^3 \quad u_7^3 \quad u_8^3 \quad u_9^3 \quad u_{10}^3 \quad u_{11}^3 \quad u_{12}^3\}^T
 \end{aligned}
 \tag{9-3}$$

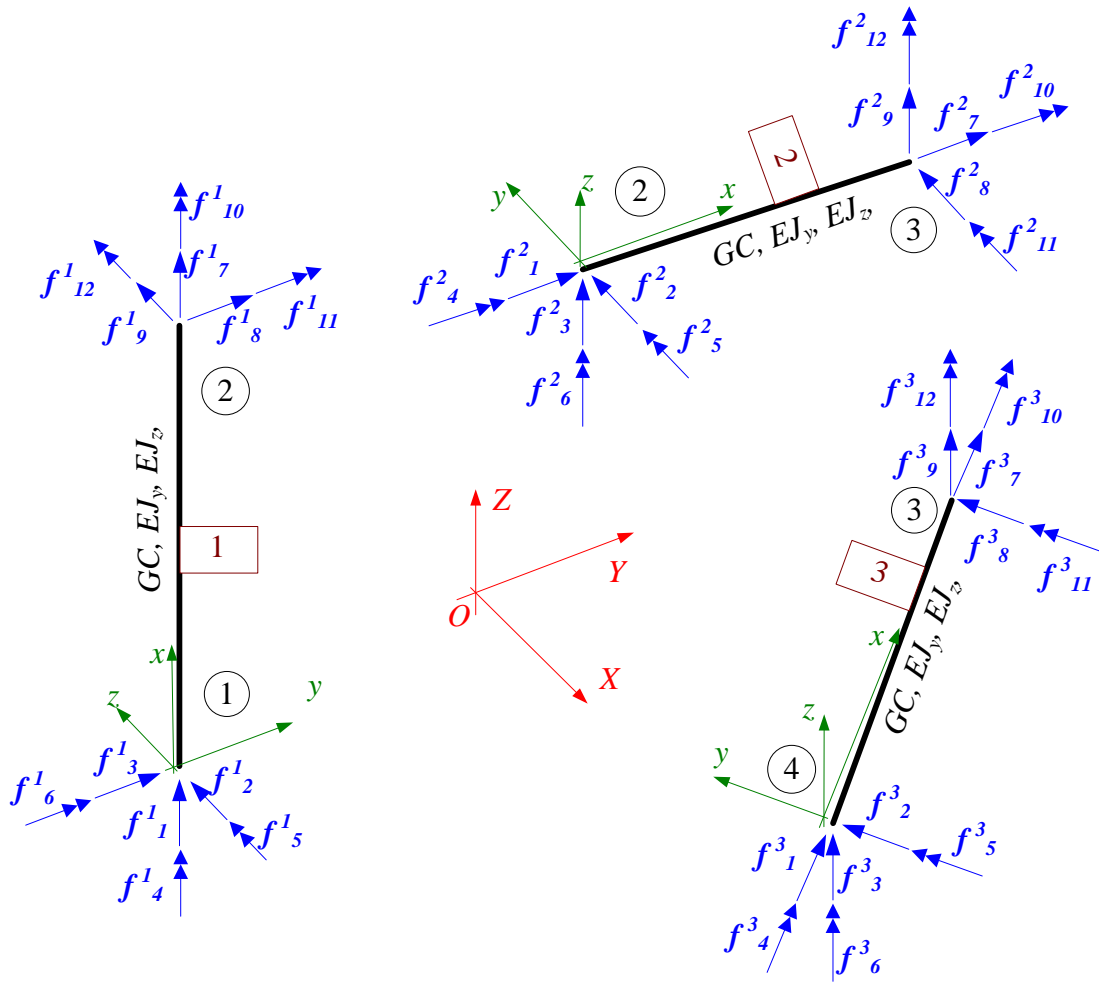
oraz w układzie globalnym – Rys. 9-5:

$$\begin{aligned}
 \{U^1\} &= \{U_1^1 \quad U_2^1 \quad U_3^1 \quad U_4^1 \quad U_5^1 \quad U_6^1 \quad U_7^1 \quad U_8^1 \quad U_9^1 \quad U_{10}^1 \quad U_{11}^1 \quad U_{12}^1\}^T, \\
 \{U^2\} &= \{U_1^2 \quad U_2^2 \quad U_3^2 \quad U_4^2 \quad U_5^2 \quad U_6^2 \quad U_7^2 \quad U_8^2 \quad U_9^2 \quad U_{10}^2 \quad U_{11}^2 \quad U_{12}^2\}^T, \\
 \{U^3\} &= \{U_1^3 \quad U_2^3 \quad U_3^3 \quad U_4^3 \quad U_5^3 \quad U_6^3 \quad U_7^3 \quad U_8^3 \quad U_9^3 \quad U_{10}^3 \quad U_{11}^3 \quad U_{12}^3\}^T,
 \end{aligned}
 \tag{9-4}$$



Rys. 9-5. Definicja przemieszczeń węzłów ES w globalnym układzie współrzędnych

Podobnie definiujemy wektory sił działających w węzłach poszczególnych elementów skończonych (1÷3) układzie lokalnym (wg (I-37) – Rys. 9-6):

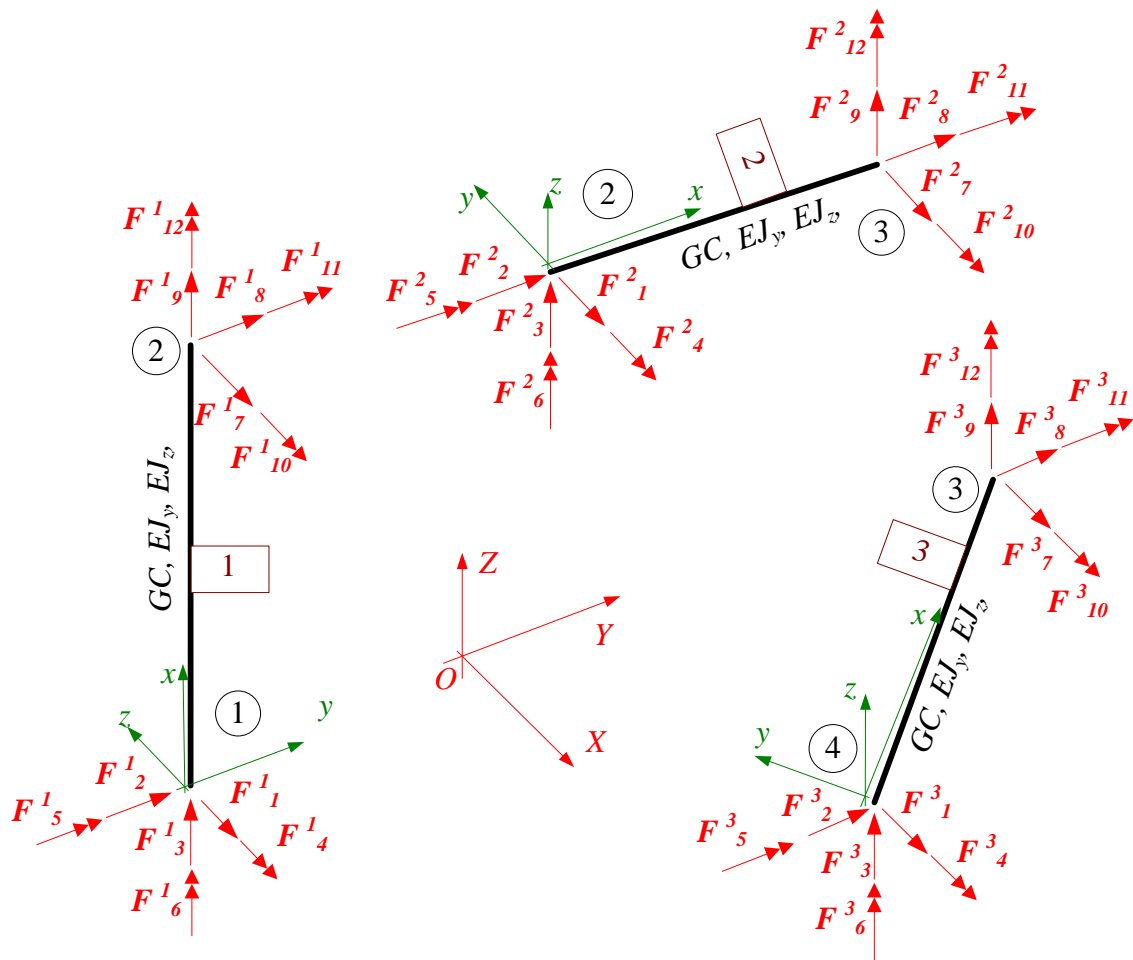


Rys. 9-6. Definicja sił węzłowych w ES w lokalnych układach współrzędnych

$$\begin{aligned}
 \{f^1\} &= \{V_{x1}^1 \quad V_{y1}^1 \quad V_{z1}^1 \quad M_{x1}^1 \quad M_{y1}^1 \quad M_{z1}^1 \quad V_{x2}^1 \quad V_{y2}^1 \quad V_{z2}^1 \quad M_{x2}^1 \quad M_{y2}^1 \quad M_{z2}^1\}^T = \\
 &= \{f_1^1 \quad f_2^1 \quad f_3^1 \quad f_4^1 \quad f_5^1 \quad f_6^1 \quad f_7^1 \quad f_8^1 \quad f_9^1 \quad f_{10}^1 \quad f_{11}^1 \quad f_{12}^1\}^T, \\
 \{f^2\} &= \{V_{x2}^2 \quad V_{y2}^2 \quad V_{z2}^2 \quad M_{x2}^2 \quad M_{y2}^2 \quad M_{z2}^2 \quad V_{x3}^2 \quad V_{y3}^2 \quad V_{z3}^2 \quad M_{x3}^2 \quad M_{y3}^2 \quad M_{z3}^2\}^T = \\
 &= \{f_1^2 \quad f_2^2 \quad f_3^2 \quad f_4^2 \quad f_5^2 \quad f_6^2 \quad f_7^2 \quad f_8^2 \quad f_9^2 \quad f_{10}^2 \quad f_{11}^2 \quad f_{12}^2\}^T, \\
 \{f^3\} &= \{V_{x4}^3 \quad V_{y4}^3 \quad V_{z4}^3 \quad M_{x4}^3 \quad M_{y4}^3 \quad M_{z4}^3 \quad V_{x3}^3 \quad V_{y3}^3 \quad V_{z3}^3 \quad M_{x3}^3 \quad M_{y3}^3 \quad M_{z3}^3\}^T = \\
 &= \{f_1^3 \quad f_2^3 \quad f_3^3 \quad f_4^3 \quad f_5^3 \quad f_6^3 \quad f_7^3 \quad f_8^3 \quad f_9^3 \quad f_{10}^3 \quad f_{11}^3 \quad f_{12}^3\}^T,
 \end{aligned} \tag{9-5}$$

oraz w układzie globalnym – Rys. 9-7:

$$\begin{aligned}
 \{F^1\} &= \{F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_3^1 \quad F_4^1 \quad F_5^1 \quad F_6^1 \quad F_7^1 \quad F_8^1 \quad F_9^1 \quad F_{10}^1 \quad F_{11}^1 \quad F_{12}^1\}^T, \\
 \{F^2\} &= \{F_1^2 \quad F_2^2 \quad F_3^2 \quad F_4^2 \quad F_5^2 \quad F_6^2 \quad F_7^2 \quad F_8^2 \quad F_9^2 \quad F_{10}^2 \quad F_{11}^2 \quad F_{12}^2\}^T, \\
 \{F^3\} &= \{F_1^3 \quad F_2^3 \quad F_3^3 \quad F_4^3 \quad F_5^3 \quad F_6^3 \quad F_7^3 \quad F_8^3 \quad F_9^3 \quad F_{10}^3 \quad F_{11}^3 \quad F_{12}^3\}^T.
 \end{aligned} \tag{9-6}$$



Rys. 9-7. Definicja sił węzłowych w ES w globalnym układzie współrzędnych

Na podstawie Rys. 9-1 i Rys. 9-2 określamy dla każdego ES kąty pomiędzy osiami globalnego układu współrzędnych a odpowiednimi osiami lokalnego układu współrzędnych danego ES. Wartości tych kątów oraz odpowiadające im wartości funkcji cosinus i sinus (*potrzebne do wzorów (2-41) i (2-42) – rozdział 2 skryptu*) podano w Tabeli 9-1 i Tabeli 9-2.

Tabela 9-1 Geometria obliczanej kratownicy

nr elementu	X_i	Y_i	Z_i	X_j	Y_j	Z_j	α_1^i (°)	α_2^i (°)	α_3^i (°)	l_i^{xy} [m]
1	0	0	0	0	0	8	0	+90	0	0
2	0	0	8	0	4	8	90	0	0	4
3	4	0	8	0	4	8	+135	0	0	5.657

Tabela 9-2 Geometria obliczanej kratownicy c.d.

nr „i” elementu	l_i [m]	$\cos(\alpha_1^i)$	$\sin(\alpha_1^i)$	$\cos(\alpha_2^i)$	$\sin(\alpha_2^i)$	$\cos(\alpha_3^i)$	$\sin(\alpha_3^i)$
1	8	1	0	0	1	1	0
2	4	0	1	1	0	1	0
3	5.657	-0.707	0.707	1	0	1	0

Zatem układ równań MES w naszym zadaniu składa się z dwudziestu czterech równań liniowych, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}, \quad (9-7)$$

gdzie:

$[K]$ – macierz sztywności całego układu o wymiarach (24 x 24),

$\{U\}$ – wektor poszukiwanych przemieszczeń węzłów w postaci (9-2),

$\{F\}$ – wektor obciążenia układu o wymiarach (1 x 24).

Ponieważ rozwiązywany układ statyczny jest obciążony jedynie w węzłach, zatem $\{F\}^o=0$, a wektor obciążenia $\{F\}$ (wzór 3-48) zredukuje się do postaci

$$\{F\} = \{F\}^w. \quad (9-8)$$

KROK (B): Budowa macierzy sztywności $[K]$ układu

W kroku 2 obliczeń rozwiązujemy kolejne elementy skończone zgodnie z procedurą przedstawioną w rozdziale 3 oraz budujemy macierz układu $[K]$ równań MES (9-7) całego układu statycznego. Rozwiązanie kolejnych ES przeprowadzamy w lokalnych układach współrzędnych, a następnie transponujemy je układu globalnego.

Element skończony nr 1 – ES-1:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-1 wg (2-41) i (2-42) przy $L=8.0$ m oraz danych z Tabeli 9-1 i Tabeli 9-2:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T_1]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9-9)$$

- macierz sztywności $ES-I$ w lokalnym układzie współrzędnych (wzór (1-34)):

$$[k^1]_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix}$$

po podstawieniu:

$$[k^1]_L = \begin{bmatrix} 2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.234 & 0 & 0 & 0 & 0.938 & 0 & -0.234 & 0 & 0 & 0 & 0.938 \\ 0 & 0 & 0.117 & 0 & -0.469 & 0 & 0 & 0 & -0.117 & 0 & -0.469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.469 & 0 & 2.500 & 0 & 0 & 0 & 0.469 & 0 & 1.250 & 0 \\ 0 & 0.094 & 0 & 0 & 0 & 5.000 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 2.500 \\ -2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.234 & 0 & 0 & 0 & -0.938 & 0 & 0.234 & 0 & 0 & 0 & -0.938 \\ 0 & 0 & -0.117 & 0 & 0.469 & 0 & 0 & 0 & 0.117 & 0 & 0.469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.469 & 0 & 1.250 & 0 & 0 & 0 & 0.469 & 0 & 2.500 & 0 \\ 0 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix} \quad (9-10)$$

- macierz sztywności $ES-I$ w globalnym układzie współrzędnych (wzór (2-77) i wyrażenia (9-9) i (9-10)):

$$[k^1]_G = [T^1]^T \cdot [k^1]_L \cdot [T^1] = \begin{bmatrix} 0.117 & 0 & 0 & 0 & 0.469 & 0 & -0.117 & 0 & 0 & 0 & 0.469 & 0 \\ 0 & 0.234 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & -0.234 & 0 & -0.938 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.938 & 0 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0.938 & 0 & 2.500 & 0 & 0 \\ 0.469 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 & -0.469 & 0 & 0 & 0 & 1.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.125 \\ -0.117 & 0 & 0 & 0 & -0.469 & 0 & 0.117 & 0 & 0 & 0 & -0.469 & 0 \\ 0 & -0.234 & 0 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.234 & 0 & 0.938 & 0 \\ 0 & 0 & -2.500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.938 & 0 & 2.500 & 0 & 0 & 0 & 0.938 & 0 & 5.000 & 0 & 0 \\ 0.469 & 0 & 0 & 0 & 1.250 & 0 & -0.469 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 \end{bmatrix} \quad (9-11)$$

- wektor alokacji $ES-I$ – Rys. 9-3 i Rys. 9-4:

$$\{al^1\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12\}^T, \quad (9-12)$$

- macierz sztywności *ES-2* w lokalnym układzie współrzędnych (wzór (1-34)):

$$[k^2]_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix}$$

po podstawieniu:

$$[k^2]_L = EJ_z \cdot \begin{bmatrix} 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 1.875 \\ 0 & 0 & 1.875 & 0 & -3.750 & 0 & 0 & 0 & -1.875 & 0 & -3.750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.750 & 0 & 10.000 & 0 & 0 & 0 & 3.750 & 0 & 5.000 & 0 \\ 0 & 1.875 & 0 & 0 & 0 & 5.000 & 0 & -1.875 & 0 & 0 & 0 & 2.500 \\ -5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & -1.875 & 0 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & -1.875 \\ 0 & 0 & -1.875 & 0 & 3.750 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 0 & 3.750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.750 & 0 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 3.750 & 0 & 10.000 & 0 \\ 0 & 1.875 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 0 & -1.875 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix}, \quad (9-17)$$

- macierz sztywności *ES-2* w globalnym układzie współrzędnych (wzór (2-77) i wyrażenia (9-9) i (9-10)):

$$[k^2]_G = [T^2]^T \cdot [k^2]_L \cdot [T^2] = \begin{bmatrix} 0.938 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.875 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.875 \\ 0 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.875 & 3.750 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.875 & 3.750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.750 & 10.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.750 & 5.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.250 & 0 \\ -1.875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 & 1.875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.500 \\ -0.938 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.875 \\ 0 & -5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.875 & -3.750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & -3.750 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.750 & 5.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.750 & 10.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.250 & 0 \\ -1.875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & 1.875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.000 \end{bmatrix}, \quad (9-18)$$

- wektor alokacji *ES-2* – Rys. 9-3 i Rys. 9-4:

$$\{aI^2\} = \{7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18\}^T, \quad (9-19)$$

Element skończony nr 3 – ES-3:

- macierz transformacji i macierz transformacji transponowana dla ES-3 wg dla ES-3 wg (2-41) i (2-42) przy $L=4\sqrt{2}$ m oraz danych z Tabeli 9-1 i Tabeli 9-2:

$$[T^2] = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9-23)$$

$$[T^2]^T = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-24)$$

- macierz sztywności ES-3 w lokalnym układzie współrzędnych (wzór (1-34)):

$$[k^2]_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GC}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GC}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix}$$

po podstawieniu:

$$[k^2]_L = \begin{bmatrix} 3.536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.331 & 0 & 0 & 0 & 0.938 & 0 & -0.331 & 0 & 0 & 0 & 0.938 \\ 0 & 0 & 0.663 & 0 & -1.875 & 0 & 0 & 0 & -0.663 & 0 & -1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.177 & 0 \\ 0 & 0 & -1.875 & 0 & 7.071 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 0 & 3.536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.536 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 1.768 \\ -3.536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.331 & 0 & 0 & 0 & -0.938 & 0 & 0.331 & 0 & 0 & 0 & -0.938 \\ 0 & 0 & -0.663 & 0 & 1.875 & 0 & 0 & 0 & 0.663 & 0 & 1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.177 & 0 \\ 0 & 0 & -1.875 & 0 & 3.536 & 0 & 0 & 0 & 1.875 & 0 & 7.071 & 0 \\ 0 & 0.938 & 0 & 0 & 0 & 1.768 & 0 & -0.938 & 0 & 0 & 0 & 3.536 \end{bmatrix}, \quad (9-25)$$

- macierz sztywności $ES-3$ w globalnym układzie współrzędnych (wzór (2-77) i wyrażenia (9-9) i (9-10)):

$$[k^2]_G = [T^2]^T \cdot [k^2]_L \cdot [T^2] = \begin{bmatrix} 1.933 & -1.602 & 0 & 0 & 0 & -0.663 & -1.933 & 1.602 & 0 & 0 & 0 & -0.663 \\ -1.602 & 1.933 & 0 & 0 & 0 & -0.663 & 1.602 & -1.933 & 0 & 0 & 0 & -0.663 \\ 0 & 0 & 0.663 & 1.326 & 1.326 & 0 & 0 & 0 & -0.663 & 1.326 & 1.326 & 0 \\ 0 & 0 & 1.326 & 3.624 & 3.447 & 0 & 0 & 0 & -1.326 & 1.679 & 1.856 & 0 \\ 0 & 0 & 1.326 & 3.447 & 3.624 & 0 & 0 & 0 & -1.326 & 1.856 & 1.679 & 0 \\ -0.663 & -0.663 & 0 & 0 & 0 & 3.536 & 0.663 & 0.663 & 0 & 0 & 0 & 1.768 \\ -1.933 & 1.602 & 0 & 0 & 0 & 0.663 & 1.933 & -1.602 & 0 & 0 & 0 & 0.663 \\ 1.602 & -1.933 & 0 & 0 & 0 & 0.663 & -1.602 & 1.933 & 0 & 0 & 0 & 0.663 \\ 0 & 0 & -0.663 & -1.326 & -1.326 & 0 & 0 & 0 & 0.663 & -1.326 & -1.326 & 0 \\ 0 & 0 & 1.326 & 1.679 & 1.856 & 0 & 0 & 0 & -1.326 & 3.624 & 3.447 & 0 \\ 0 & 0 & 1.326 & 1.856 & 1.679 & 0 & 0 & 0 & -1.326 & 3.447 & 3/624 & 0 \\ -0.663 & -0.663 & 0 & 0 & 0 & 1.768 & 0.663 & 0.663 & 0 & 0 & 0 & 3.536 \end{bmatrix}, \quad (9-26)$$

- wektor alokacji $ES-3$ – Rys. 9-3 i Rys. 9-4:

$$\{al^2\} = \{19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18\}^T, \quad (9-27)$$

KROK (E): Rozwiązanie układu równań MES

Rozwiązanie układu równań (9-34) ma postać:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \\ U_{16} \\ U_{17} \\ U_{18} \\ U_{19} \\ U_{20} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -28.0816 \\ 91.5384 \\ 1.2749 \\ -14.5122 \\ -5.4093 \\ -28.9111 \\ 94.9561 \\ 91.1082 \\ -49.5682 \\ -11.7593 \\ -6.8497 \\ -33.0105 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z} \quad (9-35)$$

KROK (F): Obliczenie przekrojowych sił wewnętrznych

Siły wewnętrzne obliczamy w układzie lokalnym. Wobec tego w pierwszej kolejności określamy wektory przemieszczeń węzłów poszczególnych ES:

- element nr 1 w układzie globalnym i lokalnym (wyrażenia (9-9), (9-13), (9-14) i (9-35):

$$\{U^1\} = [A^1]^T \cdot \{U\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -28.0816 \\ 91.5384 \\ 1.2749 \\ -14.5122 \\ -5.4093 \\ -28.9111 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z}, \quad \{u^1\} = [T^1] \cdot \{U^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2749 \\ 91.5384 \\ 28.0816 \\ -28.9111 \\ -5.4093 \\ 14.5122 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z}, \quad \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ w_1^1 \\ \phi_{x1}^1 \\ \phi_{y1}^1 \\ \phi_{z1}^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \\ w_2^1 \\ \phi_{x2}^1 \\ \phi_{y2}^1 \\ \phi_{z2}^1 \end{Bmatrix} \quad (9-36)$$

- element nr 2 w układzie globalnym i lokalnym lokalnym (wyrażenia (9-16), (9-20), (9-21) i (9-35):

$$\{U^2\} = [A^2]^T \cdot \{U\} = \begin{Bmatrix} -28.0816 \\ 91.5384 \\ 1.2749 \\ -14.5122 \\ -5.4093 \\ -28.9111 \\ 94.9561 \\ 91.1082 \\ -49.5682 \\ -11.7593 \\ -6.8497 \\ -33.0105 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z}, \quad \{u^2\} = [T^2] \cdot \{U^2\} = \begin{Bmatrix} 91.5384 \\ 28.0816 \\ 1.2749 \\ -5.4093 \\ 14.5122 \\ -28.9111 \\ 91.1082 \\ -94.9561 \\ -49.5682 \\ -6.8497 \\ 11.7593 \\ -33.0105 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z} \cdot \begin{Bmatrix} u_2^2 \\ v_2^2 \\ w_2^2 \\ \phi_{x2}^2 \\ \phi_{y2}^2 \\ \phi_{z2}^2 \\ u_3^2 \\ v_3^2 \\ w_3^2 \\ \phi_{x3}^2 \\ \phi_{y3}^2 \\ \phi_{z3}^2 \end{Bmatrix} \quad (9-37)$$

- element nr 3 w układzie globalnym i lokalnym lokalnym (wyrażenia (9-23), (9-24), (9-28), (9-29) i (9-35):

$$\{U^3\} = [A^3]^T \cdot \{U\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 94.9561 \\ 91.1082 \\ -49.5682 \\ -11.7593 \\ -6.8497 \\ -33.0105 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z}, \quad \{u^3\} = [T^3] \cdot \{U^3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.7209 \\ -131.5673 \\ -49.5682 \\ 3.4716 \\ 13.1585 \\ -33.0105 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_z} \cdot \begin{Bmatrix} u_4^3 \\ v_4^3 \\ w_4^3 \\ \phi_{x4}^3 \\ \phi_{y4}^3 \\ \phi_{z4}^3 \\ u_3^3 \\ v_3^3 \\ w_3^3 \\ \phi_{x3}^3 \\ \phi_{y3}^3 \\ \phi_{z3}^3 \end{Bmatrix} \quad (9-38)$$

Ponieważ w zadaniu brak jest zadanego obciążenia elementów, mamy $\{f^i\}^o = 0$ oraz $\{f^i\}^{(u,\varphi)} = \{f^i\}$.

Zatem siły wewnętrzne wyznaczone na podstawie przemieszczeń (9-35), (9-36) i (9-37) wyznaczonych w lokalnym układzie współrzędnych oraz wyrażen (9-10), (9-17) i (9-25), wynoszą:

- element nr 1:

$$\{f^1\} = \{f^1\}^{(u,\varphi)} = [k^1]_L \cdot \{u^1\} = \begin{Bmatrix} -3.187 \\ -7.849 \\ -0.755 \\ 3.614 \\ 6.402 \\ -49.537 \\ 3.187 \\ 7.849 \\ 0.755 \\ -3.614 \\ -0.360 \\ -13.256 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{x1}^1 \\ V_{y1}^1 \\ V_{z1}^1 \\ M_{x1}^1 \\ M_{y1}^1 \\ M_{z1}^1 \\ V_{x2}^1 \\ V_{y2}^1 \\ V_{z2}^1 \\ M_{x2}^1 \\ M_{y2}^1 \\ M_{z2}^1 \end{Bmatrix} \quad (9-39)$$

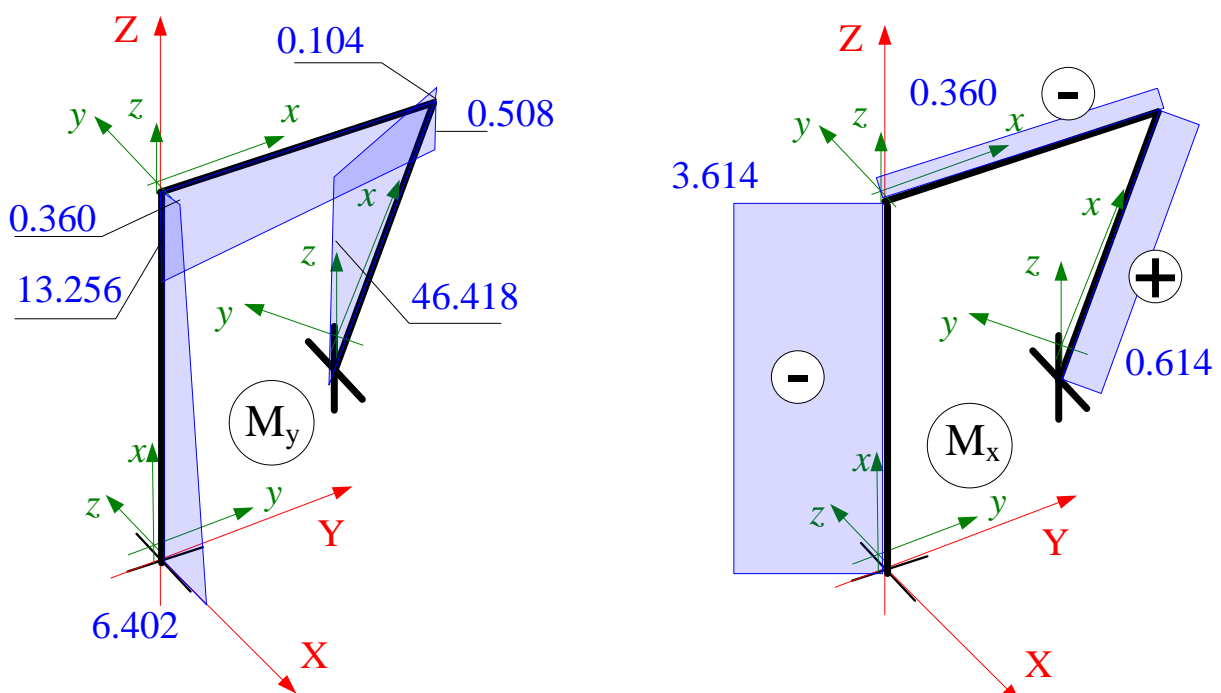
- dla elementu nr 2:

$$\{f^2\} = \{f^2\}^{(u,\varphi)} = [k^2]_L \cdot \{u^2\} = \begin{Bmatrix} 2.151 \\ -0.755 \\ -3.187 \\ 0.360 \\ 13.256 \\ 3.614 \\ -2.151 \\ 0.755 \\ 3.187 \\ -0.360 \\ -0.508 \\ -6.635 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{x2}^2 \\ V_{y2}^2 \\ V_{z2}^2 \\ M_{x2}^2 \\ M_{y2}^2 \\ M_{z2}^2 \\ V_{x3}^2 \\ V_{y3}^2 \\ V_{z3}^2 \\ M_{x3}^2 \\ M_{y3}^2 \\ M_{z3}^2 \end{Bmatrix} \quad (9-40)$$

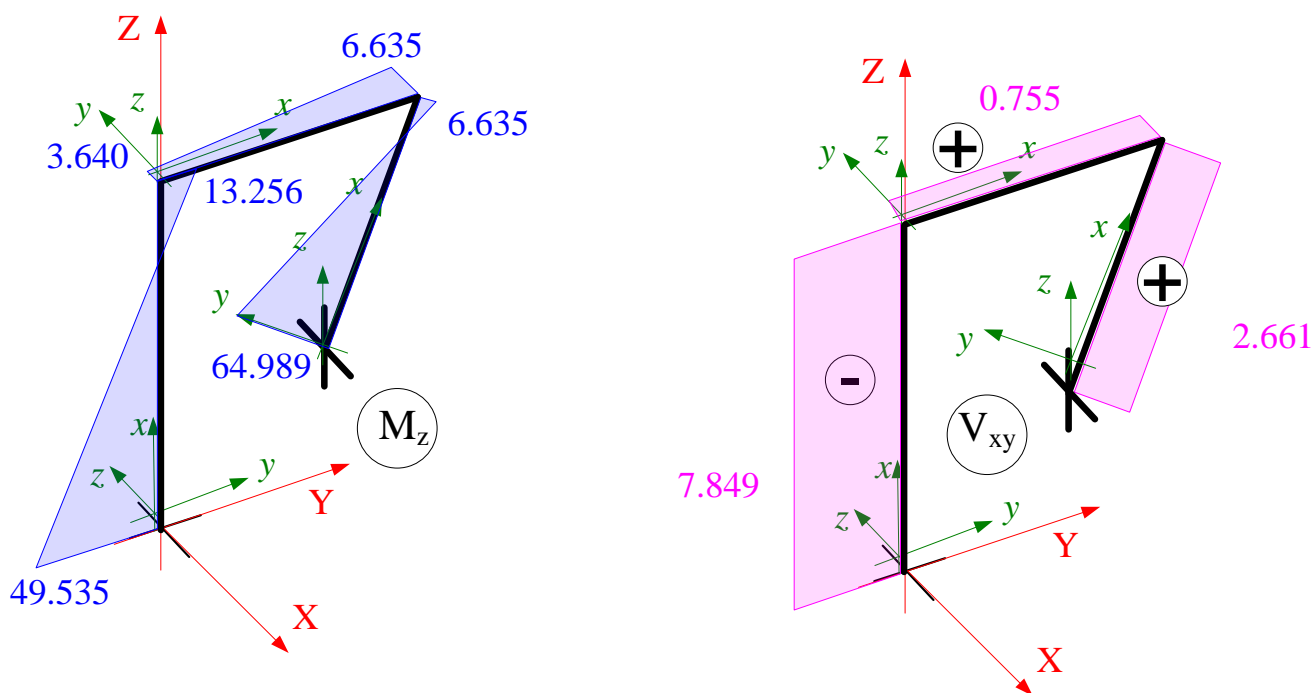
- dla elementu nr 3:

$$\{f^3\} = \{f^3\}^{(u,\varphi)} = [k^3]_L \cdot \{u^3\} = \begin{Bmatrix} 9.620 \\ 12.661 \\ 8.187 \\ -0.614 \\ -46.418 \\ 64.989 \\ -9.620 \\ -12.661 \\ -8.187 \\ 0.614 \\ 0.104 \\ 6.635 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} V_{x4}^3 \\ V_{y4}^3 \\ V_{z4}^3 \\ M_{x4}^3 \\ M_{y4}^3 \\ M_{z4}^3 \\ V_{x3}^3 \\ V_{y3}^3 \\ V_{z3}^3 \\ M_{x3}^3 \\ M_{y3}^3 \\ M_{z3}^3 \end{Bmatrix} \quad (9-41)$$

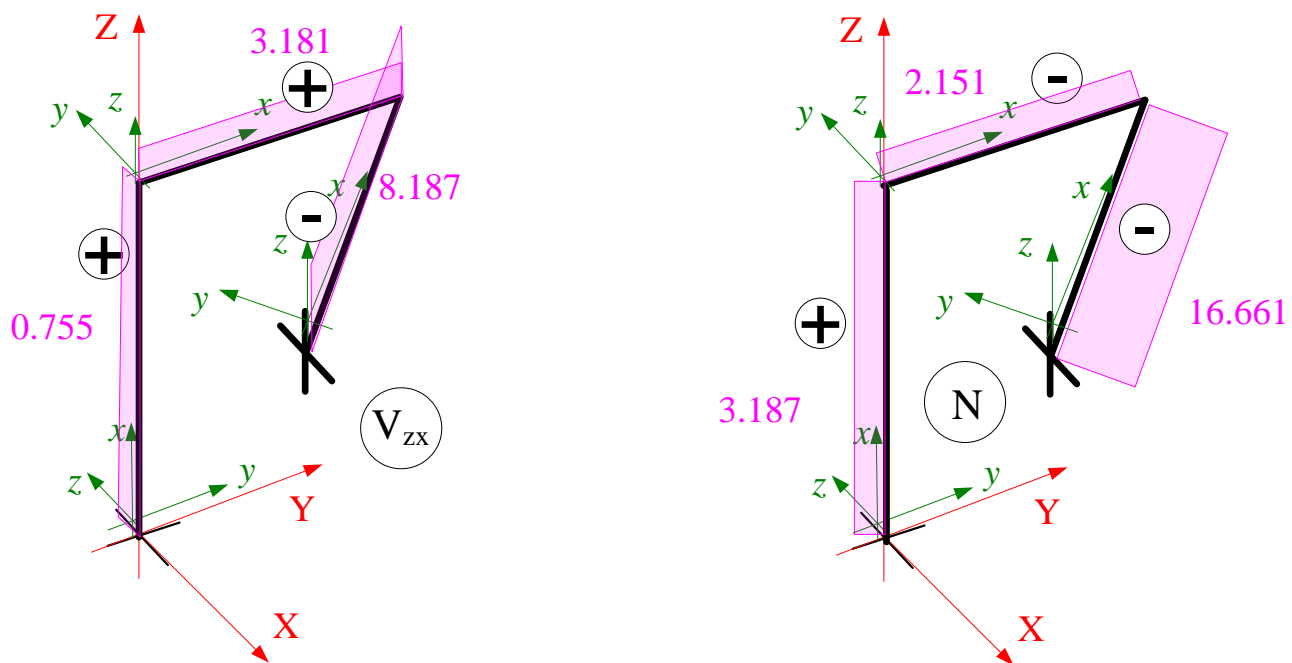
Otrzymane rozwiązanie, zachowując znakowanie mechaniki budowli pokazano na Rys. 9- Rys. 9- i Rys. 9-.



Rys. 9-8 Wykresy sił wewnętrznych w zadaniu nr 2



Rys. 9-9 Wykresy sił wewnętrznych w zadaniu nr 2 c.d.



Rys. 9-10 Wykresy sił wewnętrznych w zadaniu nr 2 c.d.