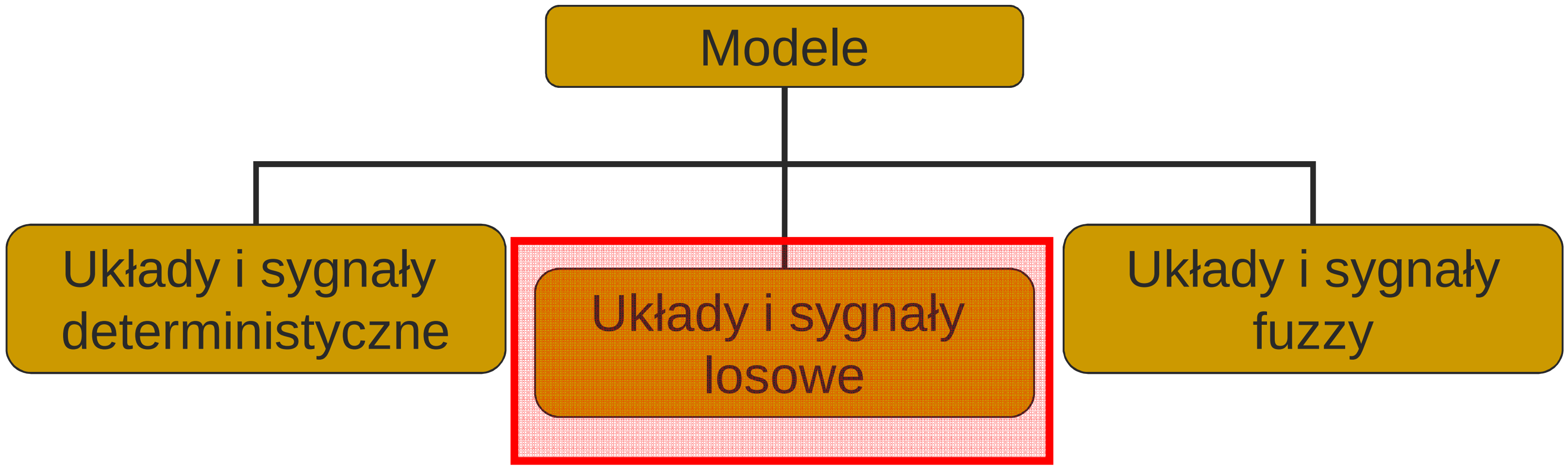
Analiza obwodów elektrycznych z przebiegami stochastycznymi

Dariusz Grabowski

Plan wystąpienia

- Stochastyczne modele sygnałów
- Procesy stochastyczne
- Przekształcenia procesów stochastycznych przez układy liniowe
- Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna
- Stochastyczne równania różniczkowe
- Przykład

Klasyfikacja modeli sygnałów

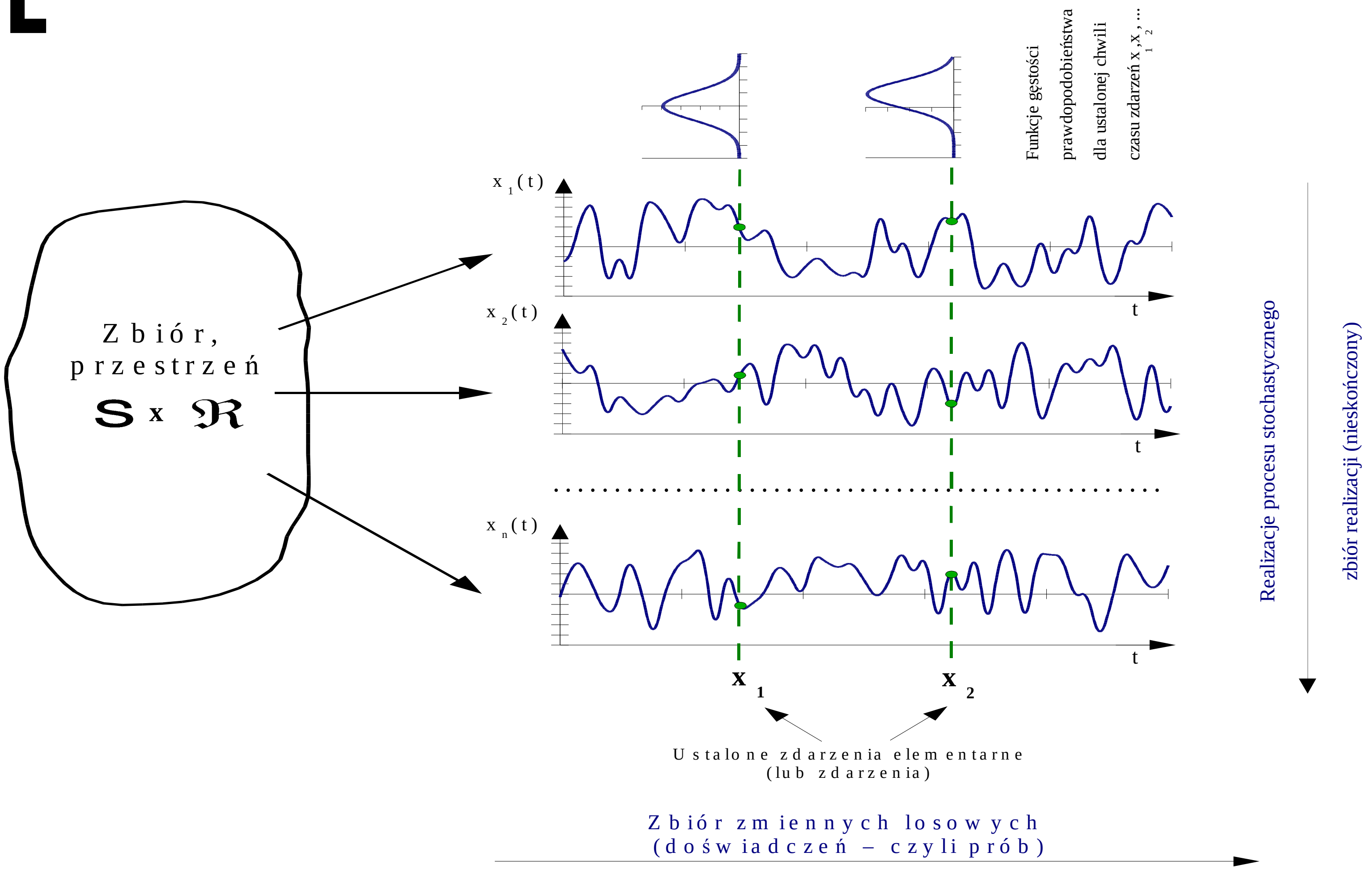


Modele stochastyczne sygnałów

Zbiór wszystkich realizacji danego mechanizmu zjawisk i zdarzeń losowych (naturalnych lub technicznych) jest nieskończenie liczny.

Podstawowym modelem takiego zbioru sygnałów losowych jest proces stochastyczny, czyli nieskończony ciąg zmiennych losowych $X(t_n)$, $t_n \in R$, $|n| \in N$.

Proces stochastyczny



Opis zmiennej losowej

- dystrybuanta (funkcja rozkładu prawdopodobieństwa) zmiennej losowej: $F_X(x) = P\{X \leq x\}$
- funkcja gęstości prawdopodobieństwa: $f_X(x) = dF_X(x)/dx$
- momenty zmiennej losowej:

$$m_X^k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$$

$$\mu_X^k = E[(X - m_X)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^k f_X(x)dx$$

Opis zmiennej losowej

- najważniejsze momenty zmiennej losowej:
  - moment zwykły rzędu 1 – wartość oczekiwana/średnia
  - moment zwykły rzędu 2 – wartość średniokwadratowa
  - moment centralny rzędu 2 – wariancja
  - pierwiastek momentu centralnego rzędu 2 – odchylenie standardowe

Opis dwóch zmiennych losowych

- łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa: $f_{XY}(x,y)$
- momenty łączne:

$$m_{XY}^{kl} = E[X^k Y^l] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$\mu_{XY}^{kl} = E[(X - m_X)^k (Y - m_Y)^l] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k (y - m_Y)^l f_{XY}(x,y)dxdy$$

Opis dwóch zmiennych losowych

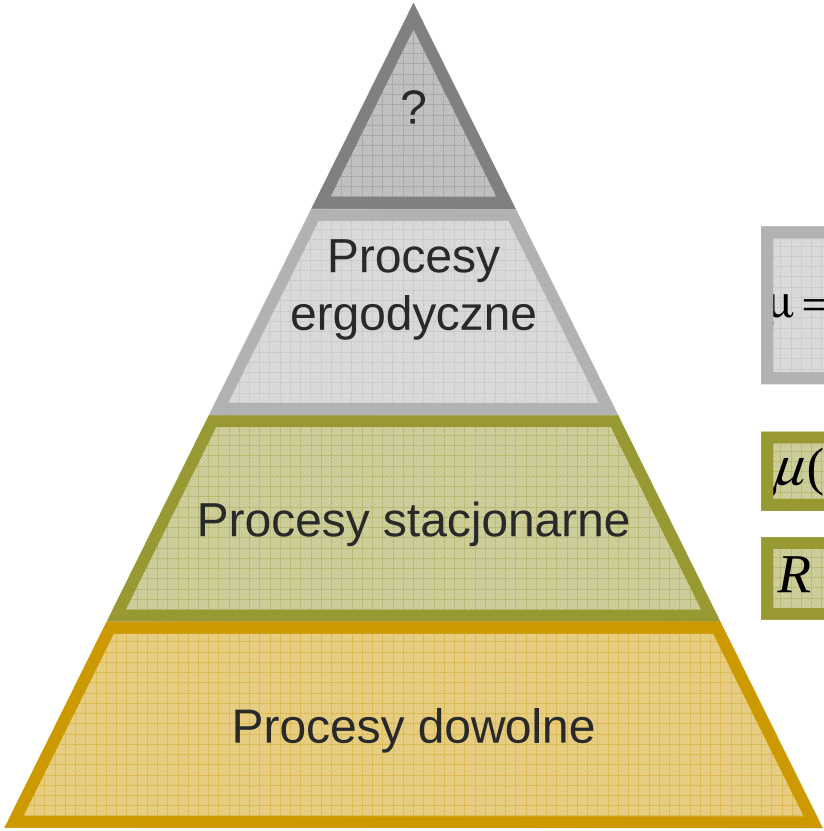
- najważniejsze momenty łączne:
  - moment zwykły rzędu 2 – wartość oczekiwana iloczynu zmiennych losowych (korelacja zmiennych losowych)
  - moment centralny rzędu 2 – kowariancja zmiennych losowych

Opis procesu stochastycznego

- łączna n-wymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa: $f_{X1,\ X2,\ \ldots,\ Xn}(x_1,\ x_2,\ldots x_n)$

- momenty zwykłe, centralne i łączne (wartość oczekiwana, wartość średniokwadratowa, wariancja, autkorelacja,korelacja wzajemna)

Proces stochastyczny



$$\mu = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,t)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)\,dt$$

$$\mu(t) = \mu = const$$

$$E\left|X^2(t)\right| = const$$

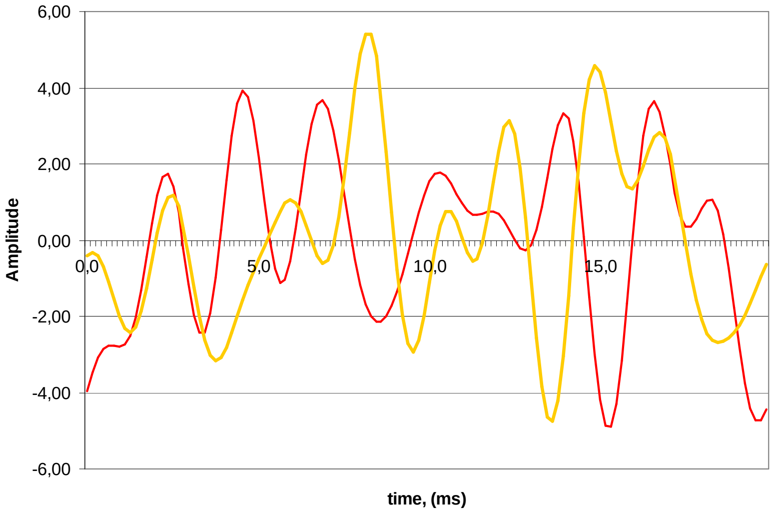
$$R(t_1, t_2) = R(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2$$

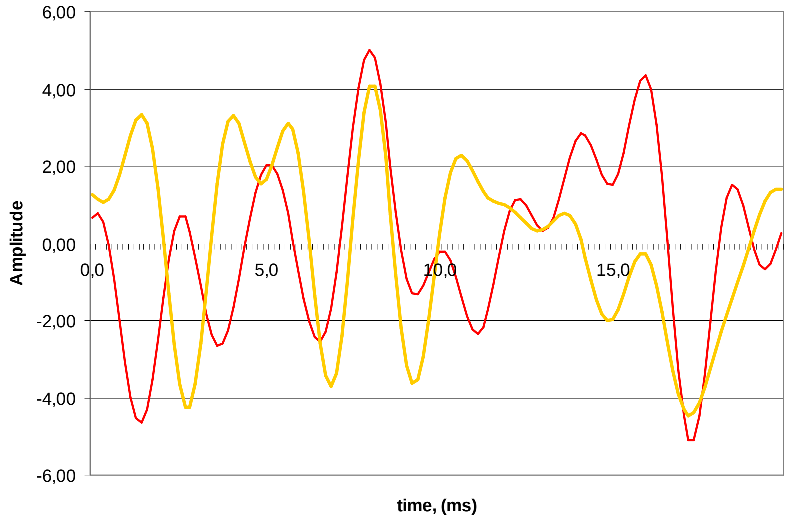
Modele stochastyczne sygnałów

- proces stałowartościowy $\{X(t)\}=\{x\}$, $t\in R$, $x\in R$
- proces z parametrem losowym (quasi-deterministyczny), w tym:
  - procesy okresowe złożone z nielosowych funkcji okresowych, w których zbiorze nastąpiło losowe uzmiennienie fazy początkowej $\{X(t)\}=\{x(t+\beta)\}$
  - procesy nieokresowe powstałe poprzez losowe uzmiennienie innych parametrów drgań okresowych
- procesy synchroniczne, które stanowią modele sygnałów dyskretnych impulsowych, w tym cyfrowych
- procesy całkowicie losowe pozbawione jakiejkolwiek regularności i dyskretności w dziedzinie argumentu i funkcji – modele szumów fluktuacyjnych

Modele stochastyczne sygnałów

Przykład procesu z losowym parametrem

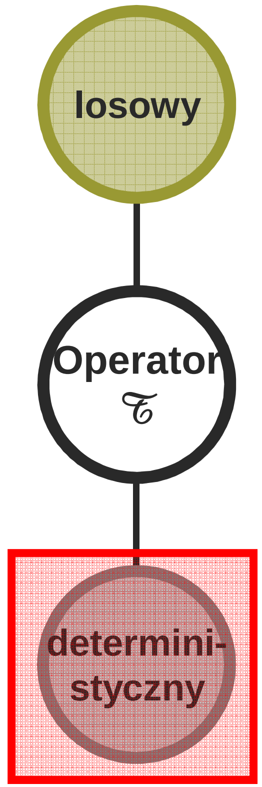




$$X(t) = \sum_{h=1}^{10} A_h \sin\left(2\pi h f_c t + \varphi_h\right)$$

f_c, A_h, = const; φ_h – zmienna losowa o rozkładzie równomiernym

Przekształcanie procesów stochastycznych w układach



Każdej realizacji x(t) procesu X(t) przyporządkowujemy pewną funkcję y(t). Zbiór tych funkcji tworzy nowy proces Y(t):

$$Y(t) = \mathcal{T}[X(t)]$$

„Losowość" wynika z wyboru jednej z realizacji procesu wejściowego, a nie sposobu odpowiedzi układu na sygnał wejściowy:

$$x(t,\theta_1) = x(t,\theta_2) \Rightarrow y(t,\theta_1) = y(t,\theta_2)$$

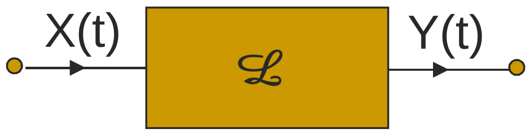
Współczynniki równania różniczkowego opisującego układ są zdeterminowane.

Układy liniowe

$$Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\}$$

- $E[Y(t)] = \mathcal{L}\{E[X(t)]\}$
- wartość oczekiwana procesu wyjściowego jest równa odpowiedzi układu na wartość oczekiwaną procesu wejściowego

Układy liniowe

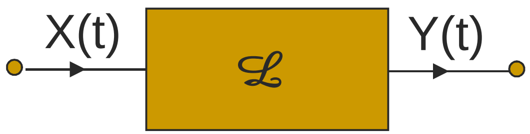


$$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$$

- Autokorelacja $R_{YY}(t_1, t_2)$:
- $R_{YY}(t_1, t_2) = \mathscr{L}_{t1}\{R_{XY}(t_1, t_2)\}$
- $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathscr{L}_{t2}\{R_{XX}(t_1, t_2)\}$

- dla przekształceń liniowych nie można wyznaczyć f.g.p. procesu Y(t) na podstawie f.g.p. X(t)
- możliwe jest wyznaczenie momentów rzędu *k* procesu Y(t) na podstawie momentów rzędu *k* procesu X(t)

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna



$$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$$

- proces stochastyczny = rodzina funkcji
- każda z funkcji może być ciągła i różniczkowalna w klasycznym ujęciu
- ciągłość i różniczkowalność stochastyczna jest zdefiniowana nie dla każdej funkcji osobno, ale dla całej rodziny
- jeśli każda funkcja jest całkowalna $\Rightarrow$ def. całki stochastycznej= zwykłej def. całki (w zwykłym sensie)

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna

Y(t) = $\mathscr{L}$\{X(t)\}

- Jeżeli każda realizacja procesu stochastycznego jest ciągła w punkcie *t*, to proces stochastyczny jest ciągły w tym punkcie.
- Jeżei $\lim x(t+\varepsilon)=x(t)$ dla $\varepsilon \to 0$ dla prawie wszystkich realizacji procesu, to proces X(t) jest ciągły z prawdopodobieństwem 1.
- Jeżei $\mathrm{E}[(x(t+\tau)-x(t))^2] \to 0$ dla $\tau \to 0$, to proces X(t) jest ciągły średniokwadratowo w punkcie t.

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna

$$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$$

- Z ciągłości średniokwadratowej procesu X(t) wynika ciągłość wartości oczekiwanej E[X(t)] tego procesu.
- Z ciągłości średniokwadratowej procesu stacjonarnego X(t) wynika ciągłość funkcji autokorelacji $R_{XX}(\tau)$ tego procesu.

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna

$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$

- Pochodna procesu stochastycznego X(t):

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon}$$

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna

Y(t) = $\mathscr{L}$\{X(t)\}

- Warunek istnienia pochodnej w sensie średniokwadratowym dla procesu stochastycznego X(t):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\left(\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon} - \boxed{X'(t)}\right)^2\right] = 0$$

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} E\left[\left(\frac{X(t+\varepsilon_1)-X(t)}{\varepsilon_1} - \frac{X(t+\varepsilon_2)-X(t)}{\varepsilon_2}\right)^2\right] = 0$$

Ciągłość i różniczkowalność stochastyczna

Y(t) = ℒ{X(t)}

- Wartość oczekiwana procesu X'(t):

$$E[X'(t)] = \frac{dE[x(t)]}{dt}$$

- Autokorelacja procesu X'(t):

$$R_{X',X'}(t_1,t_2)] = \frac{\partial^2 R_{X,X}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Stochastyczne równania różniczkowe

$$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$$

$$a_n Y^{(n)}(t) + a_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 Y(t) = X(t)$$

- Wartość oczekiwana procesu Y(t):

$$a_n m_Y^{(n)}(t) + a_{n-1} m_Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 m_Y(t) = m_X(t)$$

Stochastyczne równania różniczkowe

$$Y(t) = \mathscr{L}\{X(t)\}$$

$$a_n Y^{(n)}(t) + a_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 Y(t) = X(t)$$

- Funkcja autokorelacji $R_{Y,Y}(t_1,t_2)$ procesu Y(t):

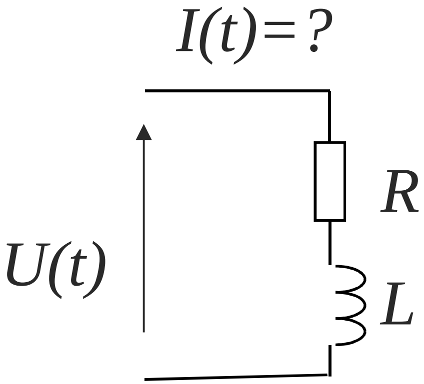
$$a_n \frac{\partial^n R_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_2^n} + \ldots + a_0 R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_{X,X}(t_1,t_2)$$

rozwiązanie względem t_2
t_1 - parametr

$$a_n \frac{\partial^n R_{Y,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^n} + \ldots + a_0 R_{Y,Y}(t_1,t_2) = R_{X,Y}(t_1,t_2)$$

rozwiązanie względem t_1
t_2 - parametr

Example



$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = U(t)$$

- E[Y(t)] = $\mathscr{L}$\{E[X(t)]\} $\rightarrow$ E[I(t)] = $\mathscr{L}$\{E[U(t)]\}

E[I(t)] = $m_I(t)$

E[U(t)] = $m_U(t)$

$$L\frac{dm_I(t)}{dt} + Rm_I(t) = m_U(t)$$

Example