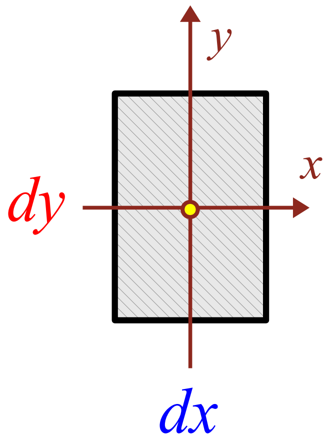


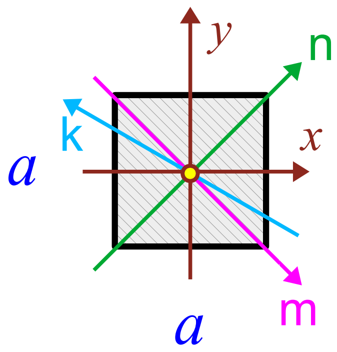
$$A = dx \cdot dy \quad [\mathrm{cm}^2]$$

$$I_x = \frac{dx \cdot dy^3}{12} \quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y = \frac{dy \cdot dx^3}{12} \quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$D_{xy} = 0 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

szczególny przypadek powyższego:
kwadrat f. pseudokołowa)

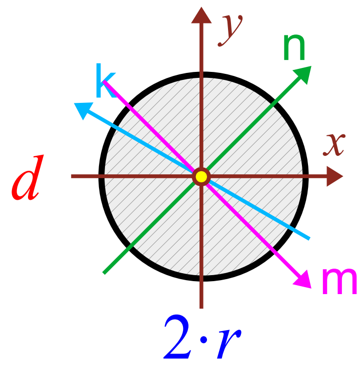


$$A = a^2 \quad [\mathrm{cm}^2]$$

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} \quad [\mathrm{cm}^4] \quad = I_{\{\}}$$

$$D_{xy} = 0 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

Moment dewiacji D_{xy}=0 świadczy o tym, że osie OXY są głównymi centralnymi osiami bezwładności i „vice versa” – w głównym centralnym układzie współrzędnych: D_{XY}=0.
Kwadrat jest wielokątem foremnym – dowolna oś centralna.



$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 \quad [\mathrm{cm}^2]$$

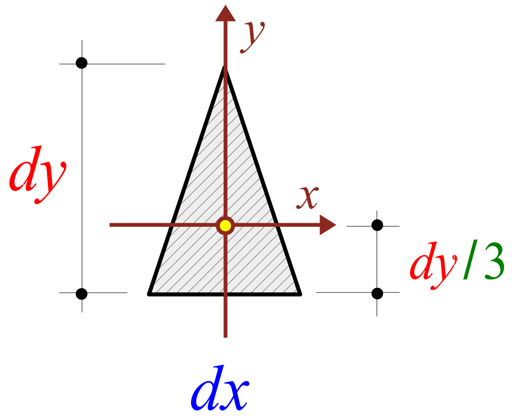
$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} [\mathrm{cm}^4] \quad = I_{\{\}}$$

$$D_{xy} = 0 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

UWAGA! Dowolna oś centralna koła (przechodząca przez jego środek ciężkości) jest jego osią symetrii więc jest też jego osią główną i ma taki sam moment bezwładności: $I_k = I_n = I_m = I_x = I_y$.
Tak więc koło ma nieskończenie wiele osi głównych centralnych.

W każdym wielokącie foremnym dowolna oś centralna jest jego osią główną i ma taki sam moment bezwładności jak obliczony względem którejkolwiek innej osi centralnej. Takie figury nazywa się pseudo-kołowymi: należą do nich m.in.: kwadrat i trójkąt równoboczny.

Trójką równoramienny



$$A_1=\frac{1}{2}dx\cdot dy\,[\mathrm{cm}^2]$$

$$I_x=\frac{dx\cdot dy^3}{36}\,[\mathrm{cm}^4]$$

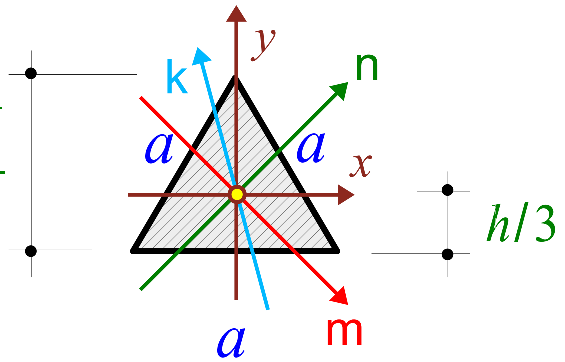
$$I_y=\frac{dy\cdot dx^3}{48}\,[\mathrm{cm}^4]$$

$$D_{xy}=0\,[\mathrm{cm}^4]$$

szczególny przypadek powyższego:

trójką równoboczny (f. pseudokołowoa)

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

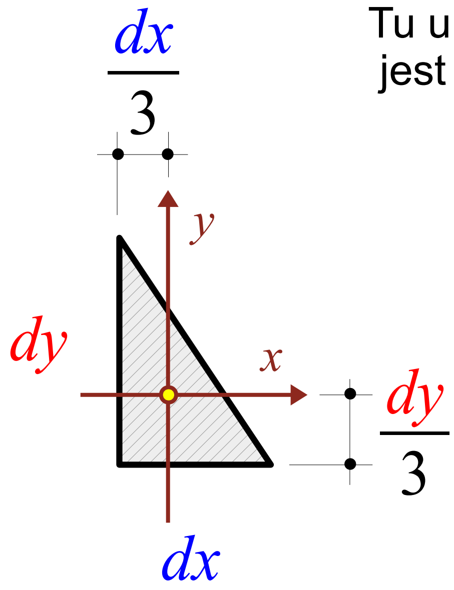


$$A_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}[\ \mathrm{cm}^2]$$

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$I_x=I_y=\frac{a^4\sqrt{3}}{96}[\mathrm{cm}^4]$$

$$D_{xy}=0[\mathrm{cm}^4]$$

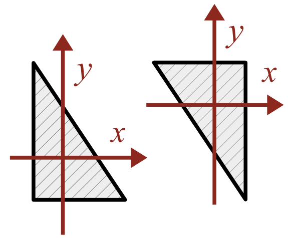


Tu układ centralny OXY nie jest głównym, gdyż D_{xy}<>0.

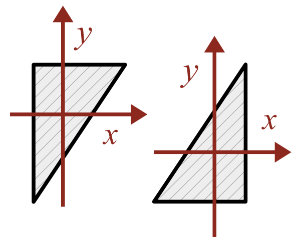
$$A_1=\frac{1}{2}dx\cdot dy\,[\mathrm{cm}^2]$$

$$I_x=\frac{dx\cdot dy^3}{36}\,[\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y=\frac{dy\cdot dx^3}{36}\,[\mathrm{cm}^4]$$



$$D_{xy}=-\frac{dx^2\cdot dy^2}{72}\,[\mathrm{cm}^4]$$



$$D_{xy}=+\frac{dx^2\cdot dy^2}{72}\,[\mathrm{cm}^4]$$

Środek ciężkości przekroju złożonego:

$$A=\sum_{i=1}^{n} A^{(i)}$$

$$S_x=\sum_{i=1}^{n} S_x^{(i)}=\sum_{i=1}^{n} y_i A_i$$

$$S_y=\sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)}=\sum_{i=1}^{n} x_i A_i$$

$$S_x=A*y_s \quad \text{oraz} \quad S_y=A*x_s$$

$$y_s=\frac{S_x}{A} \quad \text{oraz} \quad x_s=\frac{S_y}{A}$$

Wzory Steinera:

$$I_x=I_{x_i}+A\cdot(y_i)^2$$
$$I_y=I_{y_i}+A\cdot(x_i)^2$$
$$D_{xy}=D_{x_i y_i}+A\cdot(y_i\cdot x_i)$$

Momenty bezwładności sprowadzone do jednej osi można sumować:

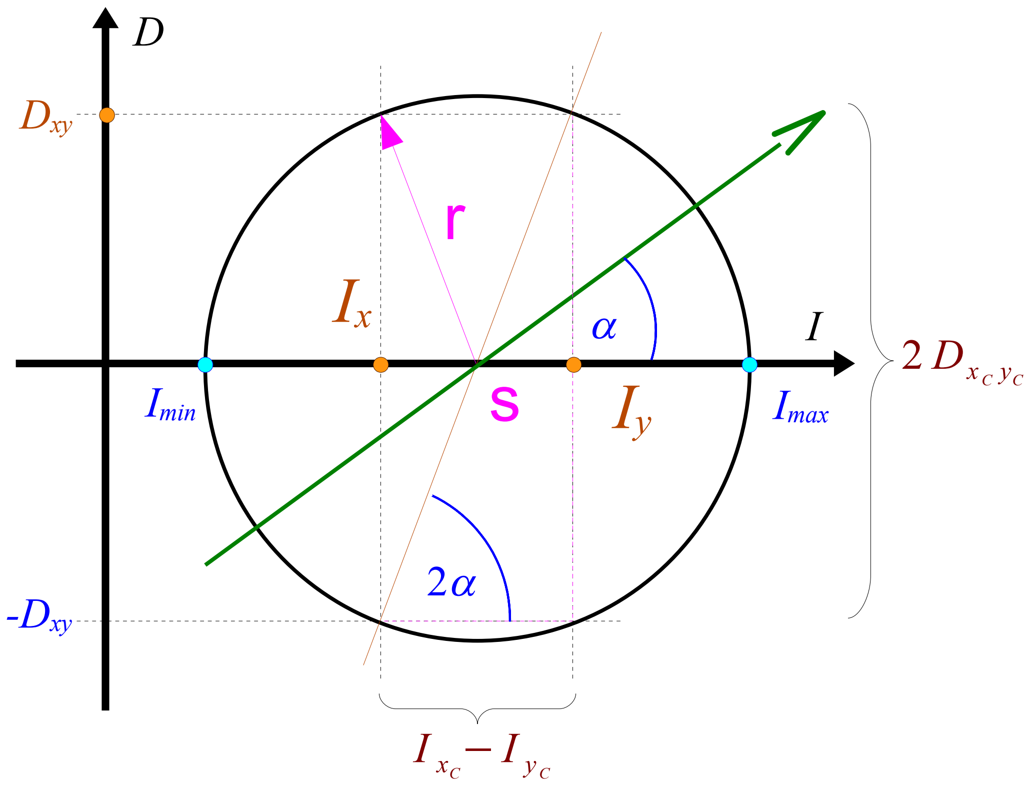
$$I_x=\sum_{i=1}^{n} I_x^{(i)} \qquad I_y=\sum_{i=1}^{n} I_y^{(i)}$$

Gdy $Dxy \neq 0$ to układ współrzędnych OXY nie jest układem osi głównych. Zakładając, że jest przynajmniej wykładem osi centralnych możemy wyznaczyć o jaki kąt α należy go obrócić aby układ centralny stał się układem osi głównych:

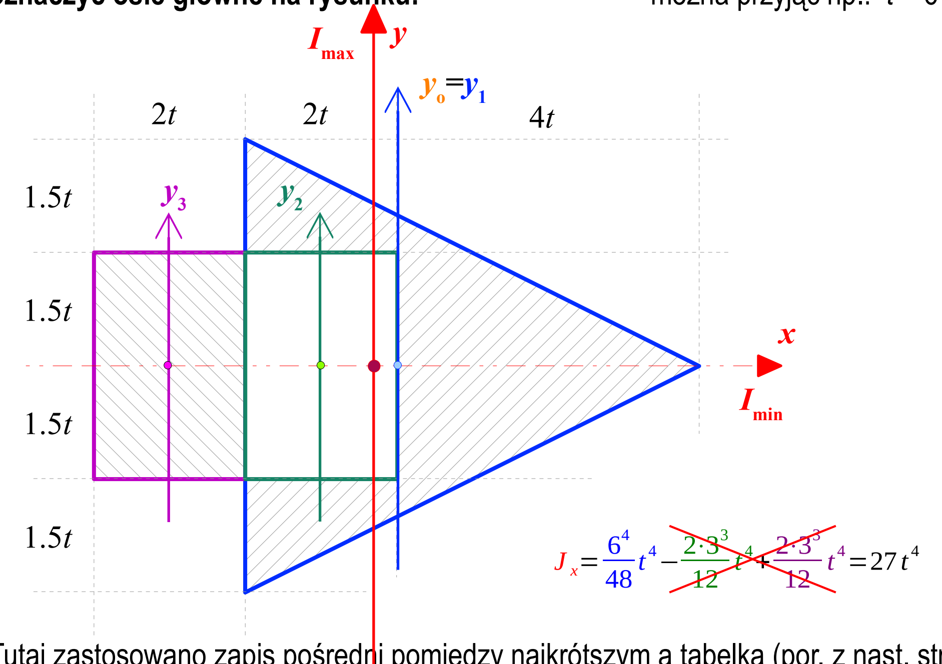
$$tg\,2\alpha=\frac{-2D_{x_C y_C}}{I_{x_C}-I_{y_C}}$$

A odpowiadające im główne centralne momenty bezwładności Imax i Imin wynoszą:

$$I_{\substack{max\\min}}=\frac{1}{2}(I_{x_0}+I_{y_0})\pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_0}-I_{y_0})^2+4D_{x_0 y_0}^{\ 2}}$$



Zad. 1. Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju $\alpha-\alpha$ oraz oznaczyć osie główne na rysunku: można przyjąć np.: t = 6 cm



Tutaj zastosowano zapis pośredni pomiędzy najkrótszym a tabelką (por. z nast. str.). Zawiera on rozpisane obliczenia, zestawione ale nie tabelce.

$$x_1^{(0)}=0 \qquad x_2^{(0)}=-t \qquad x_3^{(0)}=-3t$$

$$A_1=\frac{1}{2}6^2\,t^2=18t^2$$
$$A_2=A_3=2t\cdot 3t=6t^2$$
$$A=18-6+6=18t^2$$

$$\oplus\; S_y^{(1)}=A_1\cdot x_1=18\cdot 0=0$$
$$\ominus\; S_y^{(2)}=A_2\cdot x_2=6\,t^2\cdot(-t)=-6\,t^3$$
$$\oplus\; S_y^{(3)}=A_3\cdot x_3=6\,t^2\cdot(-3t)=-18\,t^3$$
$$\circleddash\; S_y=0-(-6)+(-18)=-12\,t^3$$

$$x_S=\frac{-12}{18}t=\frac{-2}{3}t=-0.6667\,t$$

$$\begin{cases} x_1=x_1^{(0)}-x_S=0-\left(-\frac{2}{3}t\right)=\frac{2}{3}t=0.6667\,t \\ x_2=x_2^{(0)}-x_S=-t-\left(-\frac{2}{3}t\right)=-\frac{1}{3}t=-0.333\,t \\ x_3=x_3^{(0)}-x_S=-3t-\left(-\frac{2}{3}t\right)=-\frac{7}{3}=2.333\,t \end{cases}$$

Wyznaczenie momentu bezwładności względem osi symetrii przekroju OX, nie wymaga lokalizacji środka ciężkości całego przekroju. Ponadto środki ciężkości wszystkich figur składowych leżą na osi symetrii przekroju OX więc nie trzeba stosować wzoru Steinera. To są aż dwa powody by najpierw wyznaczyć moment bezwładności względem osi symetrii przekroju J_x - główny centralny moment bezwładności: (I_{min} lub I_{max}?) :

$$J_x=108\,t^4=\frac{4t\cdot(6t)^3}{48}-\frac{2t\cdot(3t)^3}{12}+\frac{2t\cdot(3t)^3}{12}$$

Teraz wyznaczamy położenie środka ciężkości przekroju, lokalizującego drugą, pionową oś centralną. Ponieważ pierwsza - pozioma oś centralna jest osią symetrii a więc i główną, więc druga oś centralna też będzie osią główną (a nie tylko centralną). UWAGA! Nie udowadniać, że środek ciężkości leży na osi symetrii! Tu nie wyznaczamy pionowej współrzędnej środka ciężkości! Z powodu błędów może się nie udać (;) a tracimy cenny czas i energię! Wyznaczamy tylko poziomą współrzędną środka ciężkości x_S wykorzystując momenty statyczne liczone względem wyjściowej osi pionowej, za którą przyjęto OY_1. $\quad x_S=-2/3\,t=-0.6667\,t$

Prostokąt odpowiada dokładnie przesuniętemu wzdłuż osi OX otworowi wybranemu z trójkąta. Takie przekształcenie, które nie zmienia odległości masy przekroju od jakiejś osi, nie zmienia również lokalizacji środka ciężkości względem tejże osi ani wartości momentu bezwładności liczonego względem tejże osi – co widać w obliczeniach J_x.

Teraz można wyznaczyć momenty bezwładności względem własnych osi poszczególnych figur składowych, przeliczyć za pomocą wzoru Steinera do zlokalizowanej osi centralnej OY oraz obliczyć wypadkowy główny centralny moment bezwładności J_y :

$$\oplus\; J_y^{(1)}=J_{y1}^{(1)}+A_1\cdot y_1^2=\frac{6\cdot 6^3}{36}t^4+18\,t^2\cdot\left(\frac{2}{3}t\right)^2=(36+8)\,t^4=44t^4 \quad \oplus$$

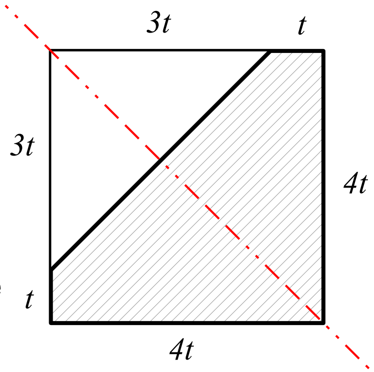
$$\ominus\; J_y^{(2)}=J_{y2}^{(2)}+A_2\cdot y_2^2=\frac{3\cdot 2^3}{12}t^4+6\,t^2\cdot\left(-\frac{1}{3}t\right)^2=\left(2+\frac{2}{3}\right)t^4=\frac{8}{3}t^4=2.667\,t^4 \quad \ominus$$

$$\oplus\; J_y^{(3)}=J_{y3}^{(3)}+A_3\cdot y_3^2=\frac{3\cdot 2^3}{12}t^4+6\,t^2\cdot\left(-\frac{7}{3}t\right)^2=\left(2+\frac{98}{3}\right)t^4=\frac{104}{3}t^4=34.667\,t^4 \quad \oplus$$

$$\circleddash\; J_y=J_y^{(1)}-J_y^{(2)}+J_y^{(3)}=44-\frac{8}{3}+\frac{104}{3}=\frac{228}{3}t^4=76\,t^4$$

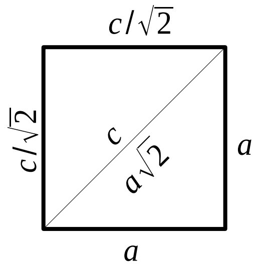
$\underline{I_{max}=J_y=76\,t^4}$ $\qquad$ $\underline{I_{min}=J_x=27\,t^4}$ → *tak oznaczyć odpowiednie osie główne!*

Zad. 2. Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju oraz oznaczyć osie główne na rysunku: np.: t = 6 cm $\underline{\alpha-\alpha}$



Najprościej podzielić przekrój tak jak to wynika z rysunku - czyli na kwadrat z odjętym trójkątem. Oczywiście ma to swoje uzasadnienie. Otóż: przekrój ma oś symetrii a środki ciężkości tak dobranych figur składowych (kwadratu i trójkąta) leżą na osi symetrii. To ułatwi obliczenia momentów bezwładności względem osi symetrii. Układ współrzędnych zastos. w obliczeniach będzie oczywiście miał tę oś symetrii jako jedną z osi.

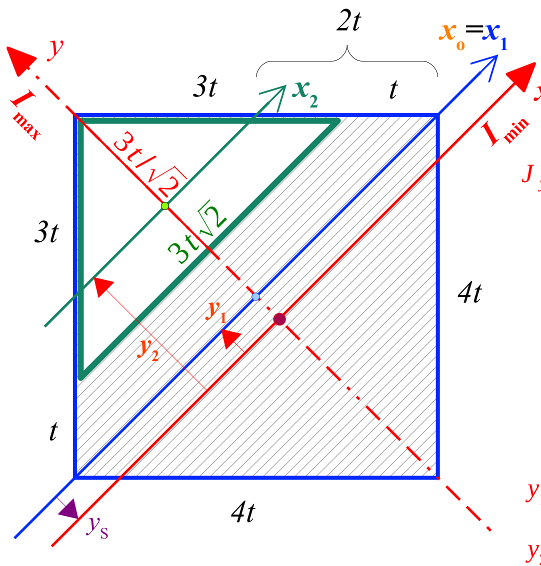
Wzory na momenty bezwładności dla trójkąta równoramiennego względem osi symetrii oraz drugiej centralnej - do niej prostopadłej są oczywiste. Trzeba tylko umieć szybko przejść od wymiarów przyprostokątnych 3t do szerokości podstawy trójkąta 3t √2 oraz jego wysokości: 3t/√2, co łatwo wykazać jako zależności pomiędzy długościami boków kwadratu „a” a jego przeciwprostokątną „c”:



Dla kwadratu osie przekątne również są osiami symetrii a kwadrat to figura pseudokołowa, której dowolna oś centralna jest jednocześnie osią główną: Imax=Imin. W figurze pseudokołowej momenty bezwładności liczone względem dowolnej osi centralnej są takie same =Imax=Imin. Z tego wynika, że niezależnie czy obliczymy je dla kwadratu względem symetralnych boków czy względem dwusiecznych kątów, czy względem dowolnej innej osi przechodzącej przez środek kwadratu, to uzyskamy tę samą wartość – liczoną wg podstawowych wzorów dla prostokąta.

Drugą wyjściową osią będzie oś prostopadła do osi symetrii i przechodząca przez środek jednej z fig. Składowych: kwadratowego obrysu. W ten sposób środek całego przekroju będzie zlokalizowany względem środka ciężkości kwadratu. Która oś wyjśc. będzie osią X, która Y (Y i Z) oraz ich zwroty - to wynika z preferencji rozwiązującego.

Postępując tak jak pokazano powyżej określono momenty bezwładności przekroju:



$$J_y=\frac{4^4}{12}t^4-\frac{3/\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2})^3}{48}t^4=\left(\frac{4^4}{12}-\frac{81}{24}\right)t^4=$$
$$=\frac{512-81}{24}t^4=\frac{431}{24}t^4=17.958333\,t^4$$

$$y_S=\frac{0-(3t)^2/2\cdot 2t/\sqrt{2}}{16\ t^2-4{,}5\,t^2}=\frac{-9t}{11.5\cdot\sqrt{2}}=$$
$$=-\frac{18}{23}\sqrt{2}\,t=-0.55339\,t^4$$

$$y_1=0-\left(\frac{-18}{23}\sqrt{2}\,t\right)=\frac{18}{23}\sqrt{2}\,t=+\,0.5534\,t$$
$$y_2=2/\sqrt{2}\,t-\left(\frac{-18}{23}\sqrt{2}\,t\right)=\frac{41}{23}\sqrt{2}\,t=+\,2.521\,t$$

$$J_x=\frac{4^4}{12}t^4+4^2\cdot\left(+\frac{18}{23}\sqrt{2}\right)^2 t^4-\left[\frac{3\sqrt{2}\cdot(3/\sqrt{2})^3}{36}t^4+\frac{9}{2}\cdot\left(+\frac{41}{23}\sqrt{2}\right)^2 t^4\right]=11.208\,t^4=I_{min}$$

$\underline{I_{max}=J_y=17.958\,t^4}$ $\underline{I_{min}=J_x=11.208\,t^4}$ → *oznaczyć odpowiednio osie główne!*

Podobne rozwiązanie można uzyskać używając tabelki, która pomoże zapamiętać procedurę. Niezbędne obliczenia robi się poniżej tabelki. Całość kosztuje więcej pracy!

i	A_i	y_i^0	$Sx_o^{(i)}$	y_i	$J_y^{(i)}=J_{yi}^{(i)}$	$J_{xi}^{(i)}$	$A_i(y_i)^2$	$J_x^{(i)}$
	$[t^2]$	$[t]$	$[t^3]$	$[t]$	$[t^4]$	$[t^4]$	$[t^4]$	$[t^4]$
1	16	0	0	+0.5534	21.333	21.333	19..5992	40.932
(-)2	(-)4.5	1.1416	(-)6.364	+2.521	(-)3.375	1.125	28.5992	(-)29.72
Σ	11.5	-0.5534	-6,364		17.985			11.208
co	$A\ [t^2]$	$y_S\ [t]$			$I_{max}\ [t^4]$			$I_{min}\ [t^4]$

Znakiem w nawiasie (-) oznaczono odejmowanie z powodu wycięcia otworu!