Spis treści

I Wykresy sił wewnętrznych **2**

1 Przykłady: układy belkowe **2**

2 Przykłady: wsporniki **2**
2.1 Przykład W1 . . . 2
2.2 Przykład W2 . . . 4
2.3 Przykład W3 . . . 5

3 Przykłady: belki proste **6**
3.1 Przykład B1 . . . 6
3.2 Przykład B2 . . . 8
3.3 Przykład B3 . . . 10

4 Przykłady: układy belkowe - przykłady z kartkówek **11**
4.1 Przykład Bk1 - zadania . . . 11
4.1.1 Zadanie 1: k-1a . . . 11
4.1.2 Zadanie 2: k-1b . . . 11
4.1.3 Zadanie 3: k-2a . . . 11
4.1.4 Zadanie 4: k-2b . . . 12
4.1.5 Zadanie 5: k-3a . . . 12
4.1.6 Zadanie 6: k-3b . . . 12
4.2 *Przykłady na kartkówkę k-4* . . . 13
4.3 Przykład Bk1 - rozwiązania . . . 14
4.3.1 Rozwiązania zadania 1 . . . 14
4.3.2 Rozwiązania zadania 2 . . . 14
4.3.3 Rozwiązania zadania 3 . . . 15
4.3.4 Rozwiązania zadania 4 . . . 15
4.3.5 Rozwiązania zadania 5 . . . 16
4.3.6 Rozwiązania zadania 6 . . . 16

II Metoda sił **17**

5 Przykłady: belki **17**
5.1 Przykład MS-B1 . . . 17
5.2 Rozwiązanie - 1 . . . 17
5.2.1 Rozwiązanie . . . 17
5.2.2 Wykres momentów: $X_1 \cdot M_1 + M_P$ . . . 18
5.2.3 Siły tnące na odcinku AB . . . 18
5.2.4 Siły tnące na odcinku BC . . . 18
5.2.5 Końcowe wykresy sił wewnętrznych M, T . . . 18

III Metoda przemieszczeń **19**

6 Tablice **19**
6.1 Rozwiązanie podstawowe $\mathcal{MP}$: przemieszczenia jednostkowe . . . 19
6.2 Rozwiązanie podstawowe $\mathcal{MP}$: obciążenia zewnętrzne . . . 20

7 Przykłady: układy belkowe **22**
7.1 Przykład B1 . . . 22
7.1.1 Równania $\mathcal{MP}$ . . . 22
7.1.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych . . . 22
7.1.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych . . . 24
7.2 Przykład B2 - wpływ temperatury . . . 24
7.2.1 Równania $\mathcal{MP}$ . . . 24
7.2.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych . . . 25
7.2.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych . . . 26
7.3 Przykład B3 - redukcja wspornika . . . 27
7.3.1 Równania $\mathcal{MP}$ . . . 27
7.3.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych . . . 27
7.3.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych . . . 29
7.4 Przykład B4 - układ trójprzęsłowy - dwie niewiadome . . . 29
7.4.1 Równania $\mathcal{MP}$ . . . 29
7.4.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych . . . 30
7.4.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych . . . 32

8 Przykłady: układy ramowe **33**
8.1 Przykład RB1 - rama o węzłach przesuwnych . . . 33
8.1.1 Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$ . . . 33
8.1.2 Wykresy sił wewnętrznych: momenty zginające . . . 35
8.1.3 Wyznaczenie sił tnących . . . 35
8.1.4 Wyznaczenie sił osiowych . . . 36
8.1.5 Wykresy sił wewnętrznych . . . 36
8.1.6 Obliczenie wartości reakcji podporowych . . . 36
8.1.7 Sprawdzenie globalnych warunków równowagi . . . 37

8.2 Przykład RB2 - rama o węzłach przesuwnych . . . 37
8.2.1 Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$ . . . 38
8.2.2 Wykresy sił wewnętrznych: momenty zginające . . . 39
8.2.3 Wyznaczenie sił tnących . . . 39
8.2.4 Wyznaczenie sił osiowych . . . 39
8.2.5 Wykresy sił wewnętrznych . . . 40
8.2.6 Obliczenie wartości reakcji podporowych . . . 40
8.2.7 Sprawdzenie globalnych warunków równowagi . . . 41

IV Płaskie układy przestrzennie obciążone 42

9 Analiza kinematyczna 42
9.1 Analiza kinematyczna - wprowadzenie . . . 42
9.1.1 Wprowadzenia . . . 42
9.2 Analiza kinematyczna - zadania . . . 42
9.2.1 Przykład 3D-AK1: treść zadania . . . 42
9.2.2 Przykład 3D-AK2: treść zadania . . . 42
9.2.3 Przykład 3D-AK3: treść zadania . . . 42
9.2.4 Przykład 3D-AK4: treść zadania . . . 42
9.2.5 Przykład 3D-AK5: treść zadania . . . 42
9.2.6 Przykład 3D-AK6: treść zadania . . . 43
9.2.7 Przykład 3D-AK7: treść zadania . . . 43
9.2.8 Przykład 3D-AK8: treść zadania . . . 43
9.2.9 Przykład 3D-AK9: treść zadania . . . 43
9.2.10 Przykład 3D-AK10: treść zadania . . . 43
9.2.11 Przykład 3D-AK11: treść zadania . . . 43
9.2.12 Przykład 3D-AK12: treść zadania . . . 43
9.2.13 Przykład 3D-AK13: treść zadania . . . 43
9.2.14 Przykład 3D-AK14: treść zadania . . . 44
9.3 Rozwiązania . . . 45
9.3.1 Przykład 3D-AK1: rozwiązanie . . . 45
9.3.2 Przykład 3D-AK2: rozwiązanie . . . 45
9.3.3 Przykład 3D-AK3: rozwiązanie . . . 45
9.3.4 Przykład 3D-AK4: rozwiązanie . . . 45
9.3.5 Przykład 3D-AK5: rozwiązanie . . . 45
9.3.6 Przykład 3D-AK6: rozwiązanie . . . 45
9.3.7 Przykład 3D-AK7: rozwiązanie . . . 46
9.3.8 Przykład 3D-AK8: rozwiązanie . . . 46
9.3.9 Przykład 3D-AK9: rozwiązanie . . . 46
9.3.10 Przykład 3D-AK10: rozwiązanie . . . 46
9.3.11 Przykład 3D-AK11: rozwiązanie . . . 46
9.3.12 Przykład 3D-AK12: rozwiązanie . . . 47
9.3.13 Przykład 3D-AK13: rozwiązanie . . . 47
9.3.14 Przykład 3D-AK14: rozwiązanie . . . 47

10 Układy otwarte 48
10.1 Przykłady . . . 48
10.1.1 Przykład 3D-O1: treść zadania . . . 48
10.1.2 Przykład 3D-O2: treść zadania . . . 48
10.1.3 Przykład 3D-O3: treść zadania . . . 48
10.1.4 Przykład 3D-O4: treść zadania . . . 49
10.1.5 Przykład 3D-O5: treść zadania . . . 49
10.1.6 Przykład 3D-O6: treść zadania . . . 49
10.1.7 Przykład 3D-O7: treść zadania . . . 49
10.1.8 Przykład 3D-O8: treść zadania . . . 49
10.2 Rozwiązania . . . 50
10.2.1 Przykład 3D-O1: rozwiązanie . . . 50
10.2.2 Przykład 3D-O2: rozwiązanie . . . 50
10.2.3 Przykład 3D-O3: rozwiązanie . . . 51
10.2.4 Przykład 3D-O4: rozwiązanie . . . 51
10.2.5 Przykład 3D-O5: rozwiązanie . . . 52
10.2.6 Przykład 3D-O6: rozwiązanie . . . 52
10.2.7 Przykład 3D-O7: rozwiązanie . . . 53
10.2.8 Przykład 3D-O8: rozwiązanie . . . 53

11 Układy zamknięte - ruszty 54
11.1 Przykłady . . . 54
11.1.1 Przykład 3D-Z1: treść zadania . . . 54
11.1.2 Przykład 3D-Z2: treść zadania . . . 54
11.1.3 Przykład 3D-Z3: treść zadania . . . 54
11.1.4 Przykład 3D-Z4: treść zadania . . . 55
11.2 Rozwiązania . . . 56
11.2.1 Przykład 3D-Z1: rozwiązanie . . . 56
11.2.2 Przykład 3D-Z2: rozwiązanie . . . 56
11.2.3 Przykład 3D-Z3: rozwiązanie . . . 57
11.2.4 Przykład 3D-Z4: rozwiązanie . . . 57

V Egzamin - zadania 58

12 Termin 2 (data: 28 czerwca 2014 roku) 58
12.1 Zadanie 1 . . . 58
12.1.1 Układ zastępczy `metody sił` . . . 58
12.1.2 Wykres M_1 . . . 58
12.1.3 Wykres M_P . . . 58

12.1.4 Równanie $\mathcal{MS}$ 58
12.1.5 Wykresy 59
12.2 Zadanie 2 59
12.2.1 Układ zastępczy `metody rzemieszczeń` 59
12.2.2 Wykres M_1 59
12.2.3 Wykres M_P 60
12.2.4 Równanie $\mathcal{MP}$ 60
12.2.5 Wykresy 60
12.3 Zadanie 3 60
12.3.1 Wykresy 61

Część I

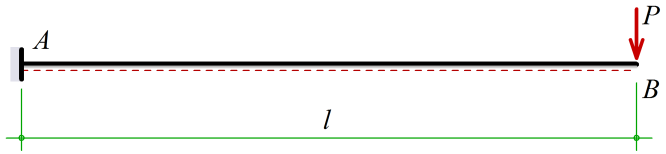
Wykresy sił wewnętrznych

1 Przykłady: układy belkowe

2 Przykłady: wsporniki

2.1 Przykład W1

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, l.



Rys. 1 Zadanie W1: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka

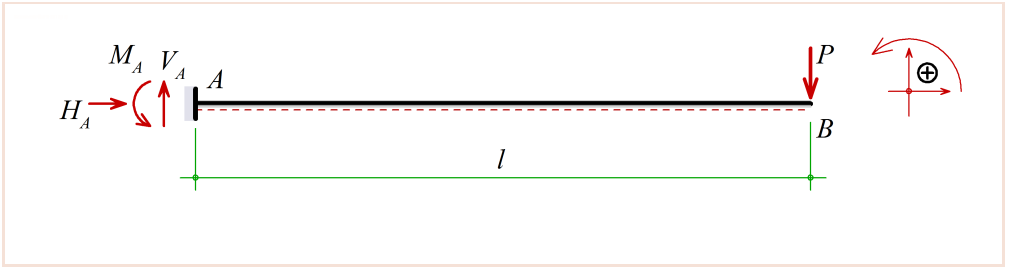
$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{H_A} = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{M_A} - P \cdot l = 0 \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{M_A} = Pl \tag{2.3}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_A} - P = 0 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{V_A} = P \tag{2.5}$$



Rys. 2 Zadanie W1: reakcje

Funkcje sił wewnętrznych

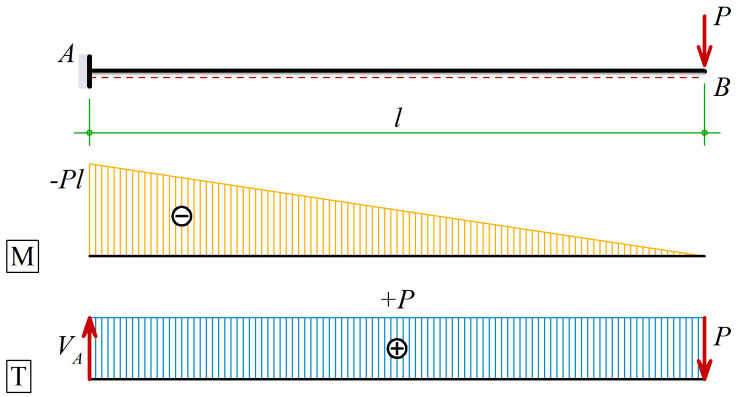
Rys. 3 Zadanie W1: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Odcinek AB: $x \in (0, l)$

$$M^{AB}(z) = -Pz \begin{cases} M^{AB}(0) = 0 \\ M^{AB}(l) = -Pl \end{cases} \tag{2.6}$$

$$T^{AB}(x) = +P \begin{cases} T^{AB}(0)^{Lewa} = +P \\ T^{AB}(l)^{Prawa} = +P \end{cases} \tag{2.7}$$

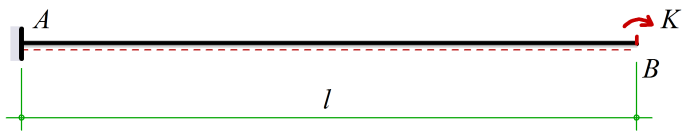
Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4 Zadanie W1: wykresy sił wewnętrznych

2.2 Przykład W2

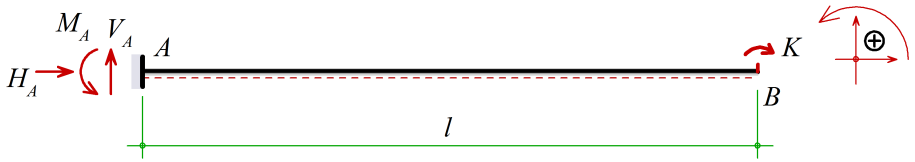
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: K, l.



Rys. 5 Zadanie W2: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka



Rys. 6 Zadanie W2: reakcje

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{H_A} = 0 \tag{2.8}$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{M_A} - K = 0 \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{M_A} = K \tag{2.10}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_A} = 0 \tag{2.11}$$

Funkcje sił wewnętrznych

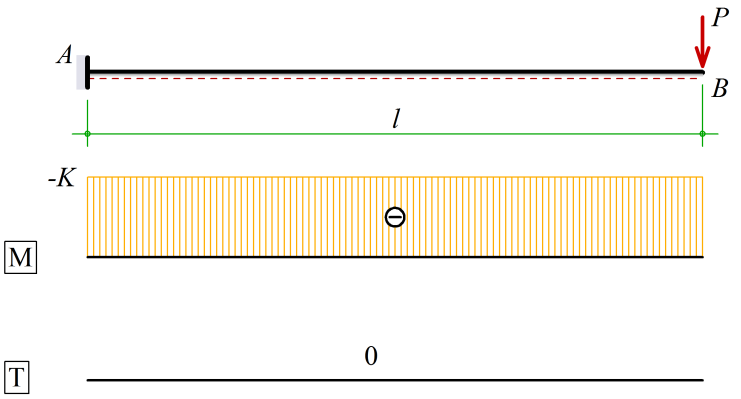
Rys. 7 Zadanie W2: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Odcinek AB: $x \in (0, l)$

$$M^{AB}(z) = -K \begin{cases} M^{AB}(0) = -K \\ M^{AB}(l) = -K \end{cases} \tag{2.12}$$

$$T^{AB}(x) = +0 \begin{cases} T^{AB}(0)^{Lewa} = +0 \\ T^{AB}(l)^{Prawa} = +0 \end{cases} \tag{2.13}$$

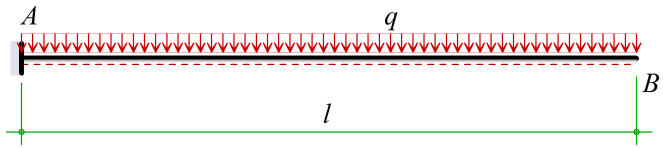
Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 8 Zadanie W2: wykresy sił wewnętrznych

2.3 Przykład W3

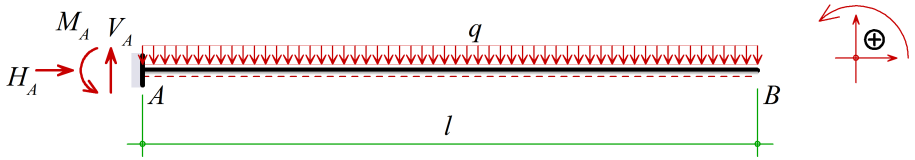
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, l.



Rys. 9 Zadanie W3: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka



Rys. 10 Zadanie W3: reakcje

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{H_A} = 0 \tag{2.14}$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{M_A} - ql \cdot \frac{l}{2} = 0 \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{M_A} = \frac{ql^2}{2} \tag{2.16}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_A} - ql = 0 \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{V_A} = ql \tag{2.18}$$

Rys. 11 Zadanie W3: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Funkcje sił wewnętrznych

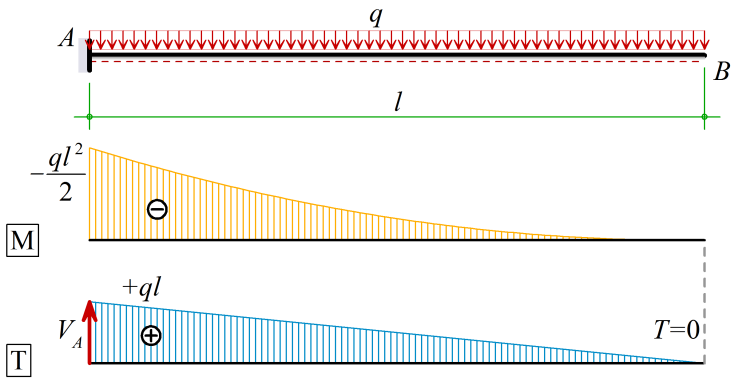
Odcinek AB: $x \in (0, l)$

$$M^{AB}(z) = -qz \cdot \frac{z}{2} \begin{cases} M^{AB}(0) = 0 \\ M^{AB}(l) = -\frac{ql^2}{2} \end{cases} \tag{2.19}$$

$$T^{AB}(x) = +qz \begin{cases} T^{AB}(0)^{Lewa} = +0 \\ T^{AB}(l)^{Prawa} = +ql \end{cases} \tag{2.20}$$

Miejsce zerowe sił tnących znajduje się na końcu wspornika: jest to zarazem położenie wierzchołka paraboli funkcji momentów.

Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 12.

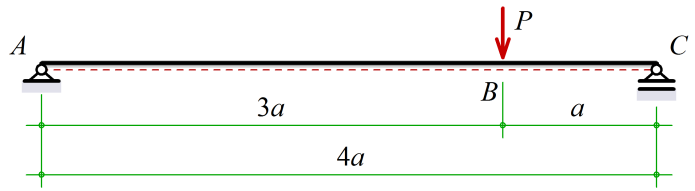


Rys. 12 Zadanie W3: wykresy sił wewnętrznych

3 Przykłady: belki proste

3.1 Przykład B1

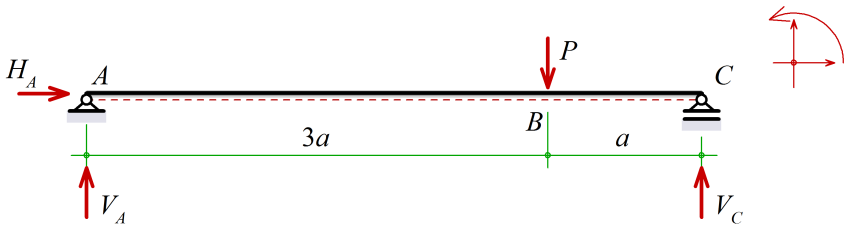
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



Rys. 13 Zadanie B1: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka



Rys. 14 Zadanie B1: reakcje

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_A} = 0 \tag{3.1}$$

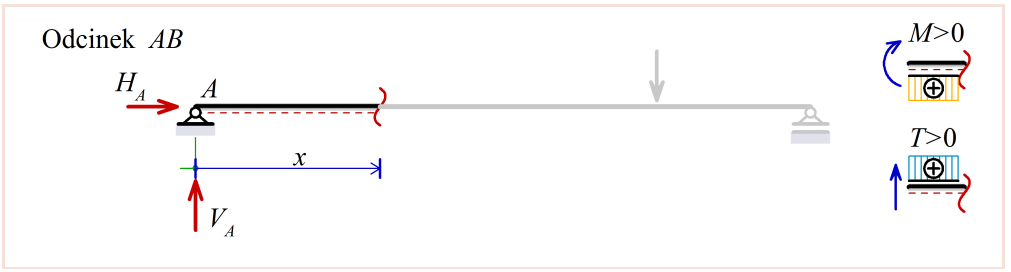
$$\sum M_{iC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{V_A} \cdot 4a + P \cdot a = 0 \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{V_A} = \frac{1}{4}P \tag{3.3}$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_C} \cdot 4a - P \cdot 3a = 0 \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{V_C} = \frac{3}{4}P \tag{3.5}$$

Funkcje sił wewnętrznych

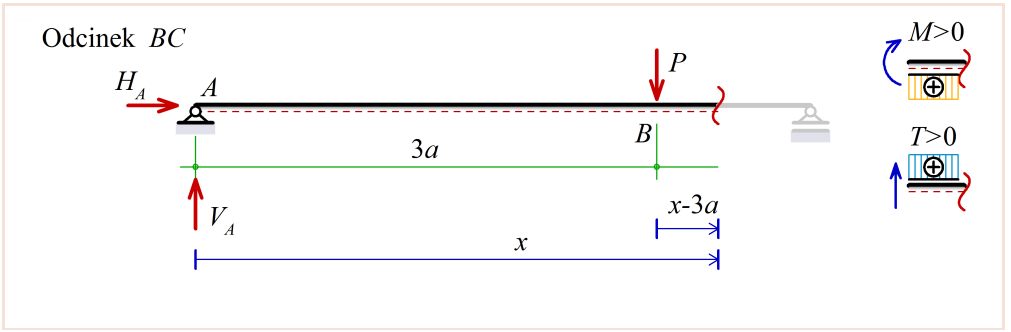


Rys. 15 Zadanie B1: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Odcinek AB: $x \in (0, 3a)$

$$M^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} \cdot x \begin{cases} M^{AB}(0) = 0 \\ M^{AB}(3a) = +\frac{1}{4}P \cdot 3a = +\frac{3}{4}Pa \end{cases} \tag{3.6}$$

$$T^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} \begin{cases} T^{AB}(0)^{Prawa} = +\frac{1}{4}P \\ T^{AB}(3a)^{Lewa} = +\frac{1}{4}P \end{cases} \tag{3.7}$$



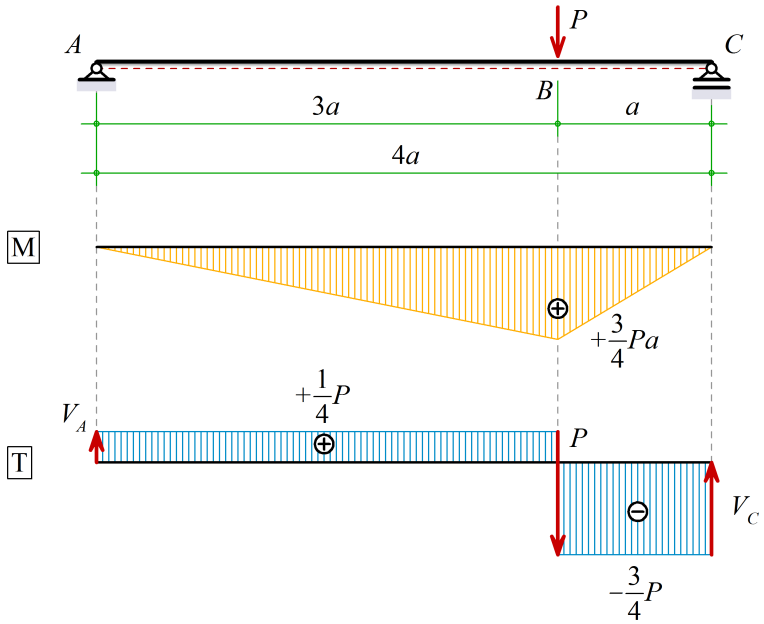
Rys. 16 Zadanie B1: funkcje sił wewnętrznych w przedziale BC

Odcinek BC: $x \in (3a, 4a)$

$$M^{BC}(x) = +\boldsymbol{V_A} \cdot x - P \cdot (x - 3a) \begin{cases} M^{BC}(3a) = +\frac{1}{4}P \cdot 3a - P(3a - 3a) = +\frac{3}{4}Pa \\ M^{BC}(4a) = +\frac{1}{4}P \cdot 4a - P(4a - 3a) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$T^{BC}(x) = +\boldsymbol{V_A} - P \begin{cases} T^{BC}(3a)^{Prawa} = +\frac{1}{4}P - P = -\frac{3}{4}P \\ T^{BC}(3a)^{Lewa} = -\frac{3}{4}P \end{cases} \tag{3.9}$$

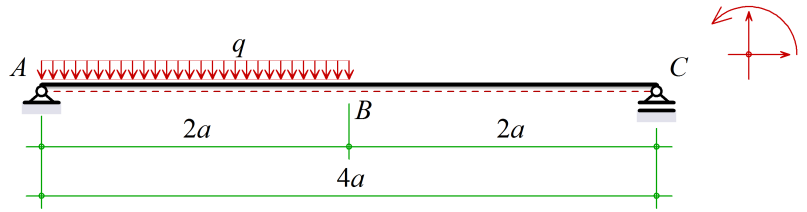
Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 17.



Rys. 17 Zadanie B1: wykresy sił wewnętrznych

3.2 Przykład B2

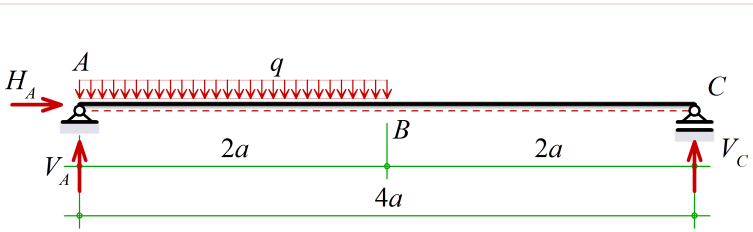
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a.



Rys. 18 Zadanie B2: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka



Rys. 19 Zadanie B2: reakcje

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_A} = 0 \tag{3.10}$$

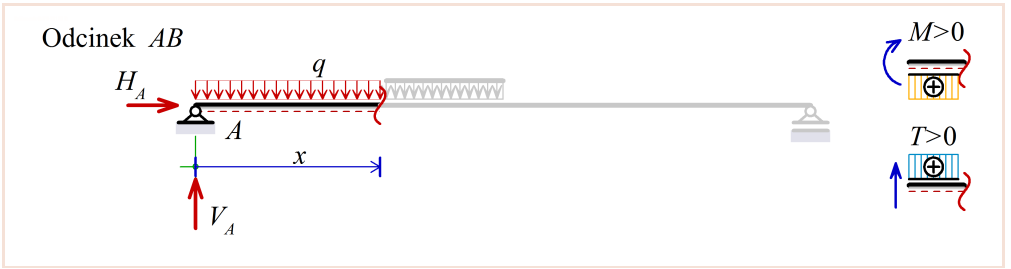
$$\sum M_{iC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{V_A} \cdot 4a + q \cdot 2a \cdot (2a + \frac{2a}{2}) = 0 \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{V_A} = \frac{3}{2}qa \tag{3.12}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{V_C} - q \cdot 2a = 0 \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{V_C} = 2qa - \boldsymbol{V_A} = \frac{1}{2}qa \tag{3.14}$$

Funkcje sił wewnętrznych



Rys. 20 Zadanie B2: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Odcinek AB: $x \in (0, 2a)$

$$M^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} \cdot x - qx\frac{x}{2} \begin{cases} M^{AB}(0) = 0 \\ M^{AB}(2a) = +\frac{3}{2}qa \cdot 2a - 2qa^2 = +qa^2 \end{cases} \tag{3.15}$$

$$T^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} - qx \begin{cases} T^{AB}(0)^{Prawa} = +\frac{3}{2}qa \\ T^{AB}(2a)^{Lewa} = +\frac{3}{2}qa - q \cdot 2a = -\frac{1}{2}qa \end{cases} \tag{3.16}$$

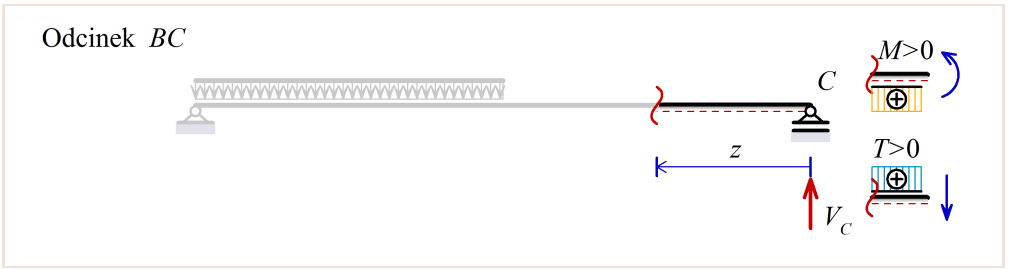
Miejsce zerowe sił tnących:

$$T^{AB}(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_A} - qx_0 = 0 \tag{3.17}$$

$$x_0 = \frac{\boldsymbol{V_A}}{q} = \frac{3}{2}a \tag{3.18}$$

Maksymalny moment $M^{AB}_{\max}$:

$$M^{AB}_{max} = M^{AB}(x_0) = \boldsymbol{V_A}x_0 - q\frac{{x_0}^2}{2} = \frac{9}{8}qa^2 \tag{3.19}$$



Rys. 21 Zadanie B2: funkcje sił wewnętrznych w przedziale BC

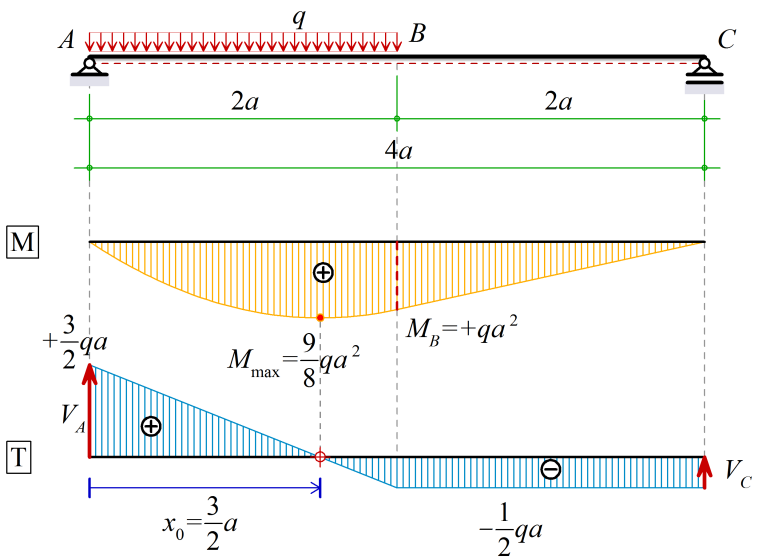
Materiał dydaktyczny do ćwiczeń. Przygotował dr inż. J. Pilśniak. Data: utw. 03 lutego 2014 - komp. 27 września 2014

Odcinek BC: $z \in (0, 2a)$

$$M^{BC}(z) = +\boldsymbol{V_C} \cdot z \begin{cases} M^{BC}(0) = 0 \\ M^{BC}(2a) = +\boldsymbol{V_C} \cdot 2a = +\frac{1}{2}qa \cdot 2a = +qa^2 \end{cases} \tag{3.20}$$

$$T^{BC}(z) = -\boldsymbol{V_C} \begin{cases} T^{BC}(0) = -\frac{1}{2}qa \\ T^{BC}(2a) = -\frac{1}{2}qa \end{cases} \tag{3.21}$$

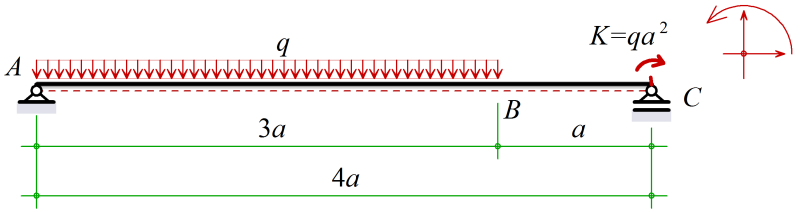
Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 22.



Rys. 22 Zadanie B2: wykresy sił wewnętrznych

3.3 Przykład B3

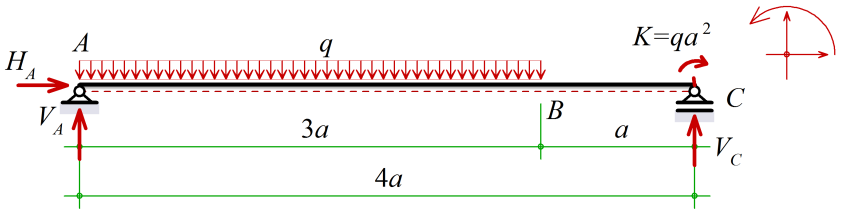
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a, $K = qa^2$.



Rys. 23 Zadanie B3: Schemat statyczny

Rozwiązanie

Statyka



Rys. 24 Zadanie B3: reakcje

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_A} = 0 \tag{3.22}$$

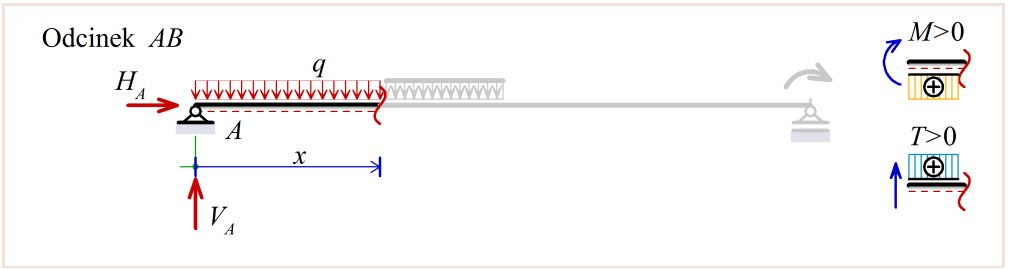
$$\sum M_{iC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{V_A} \cdot 4a + q \cdot 3a \cdot (a + \frac{3a}{2}) - K = 0 \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{V_A} = \frac{\frac{15}{2}qa^2 - qa^2}{4a} = \frac{13}{8}qa \tag{3.24}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A} + \boldsymbol{V_C} - q \cdot 3a = 0 \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{V_C} = 3qa - \boldsymbol{V_A} = \frac{24}{8}qa - \frac{13}{8}qa = \frac{11}{8}qa \tag{3.26}$$

Funkcje sił wewnętrznych



Rys. 25 Zadanie B3: funkcje sił wewnętrznych w przedziale AB

Odcinek AB: $x \in (0, 3a)$

$$M^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} \cdot x - qx\frac{x}{2} \begin{cases} M^{AB}(0) = 0 \\ M^{AB}(3a) = +\frac{13}{8}qa \cdot 3a - \frac{9}{2}qa^2 = +\frac{3}{8}qa^2 \end{cases} \tag{3.27}$$

$$T^{AB}(x) = +\boldsymbol{V_A} - qx \begin{cases} T^{AB}(0)^{Prawa} = +\frac{13}{8}qa \\ T^{AB}(3a)^{Lewa} = +\frac{13}{8}qa - q \cdot 3a = -\frac{11}{8}qa \end{cases} \tag{3.28}$$

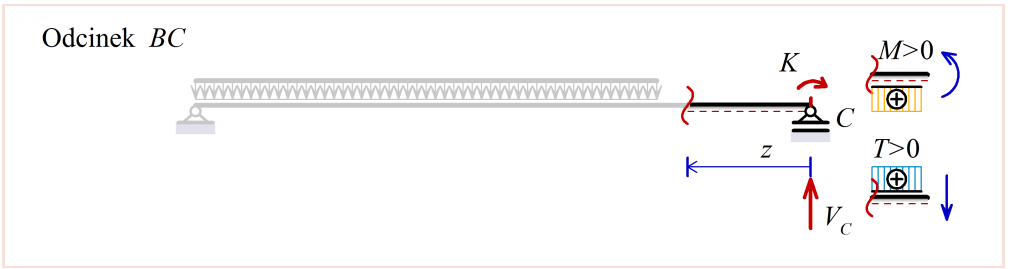
Miejsce zerowe sił tnących:

$$T^{AB}(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad +\boldsymbol{V_A} - qx_0 = 0 \tag{3.29}$$

$$x_0 = \frac{\boldsymbol{V_A}}{q} = \frac{13}{8}a = 1.625a \tag{3.30}$$

Maksymalny moment $M^{AB}_{\max}$:

$$M^{AB}_{max} = M^{AB}(x_0) = \boldsymbol{V_A}x_0 - q\frac{{x_0}^2}{2} = \frac{169}{128}qa^2 = 1.320qa^2 \tag{3.31}$$



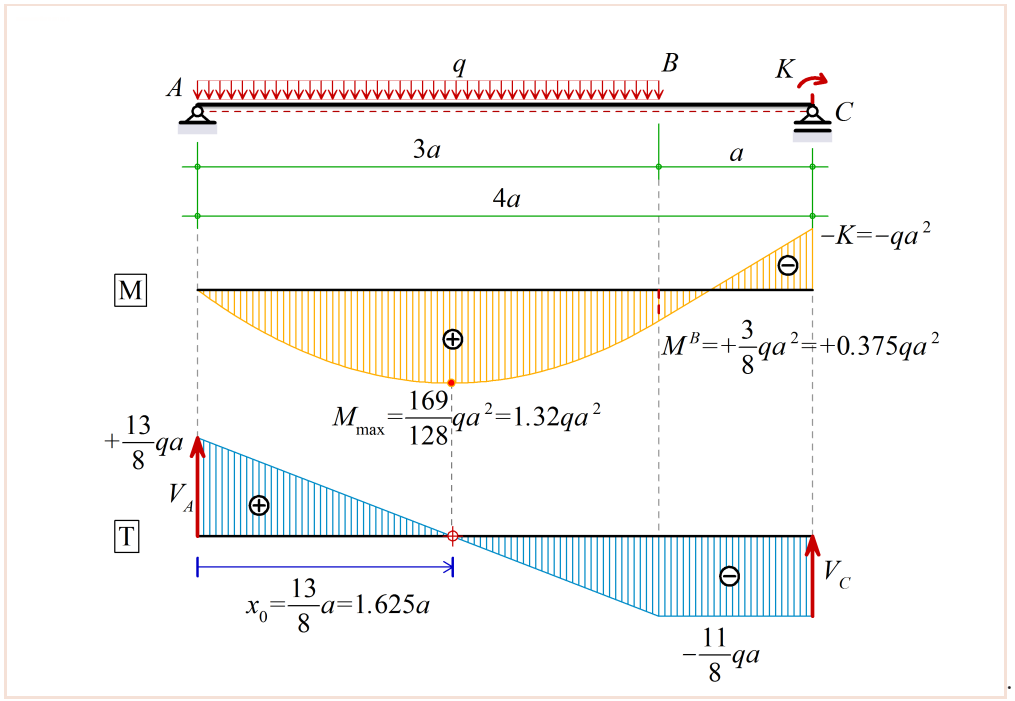
Rys. 26 Zadanie B3: funkcje sił wewnętrznych w przedziale BC

Odcinek BC: $z \in (0, a)$

$$M^{BC}(z) = +\boldsymbol{V_C} \cdot z \begin{cases} M^{BC}(0) = 0 \\ M^{BC}(a) = +\boldsymbol{V_C} \cdot a = +\frac{11}{8}qa^2 \end{cases} \tag{3.32}$$

$$T^{BC}(z) = -\boldsymbol{V_C} \begin{cases} T^{BC}(0) = -\frac{11}{8}qa \\ T^{BC}(a) = -\frac{11}{8}qa \end{cases} \tag{3.33}$$

Wykresy funkcji sił wewnętrznych przedstawiono na rysunku 27.



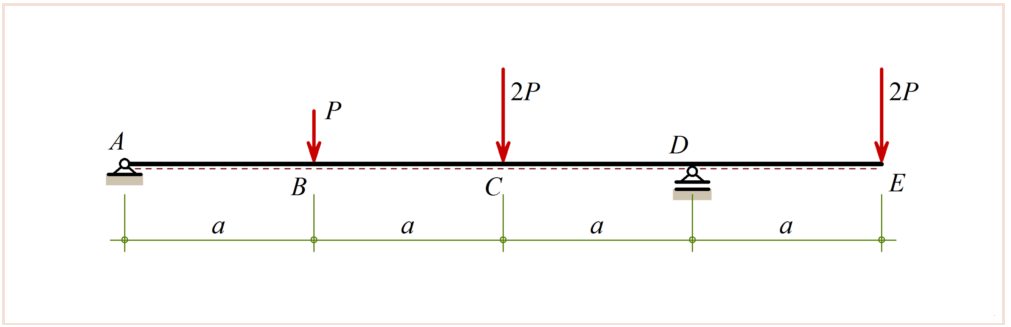
Rys. 27 Zadanie B3: wykresy sił wewnętrznych

4 Przykłady: układy belkowe - przykłady z kartkówek

4.1 Przykład Bk1 - zadania

4.1.1 Zadanie 1: k-1a

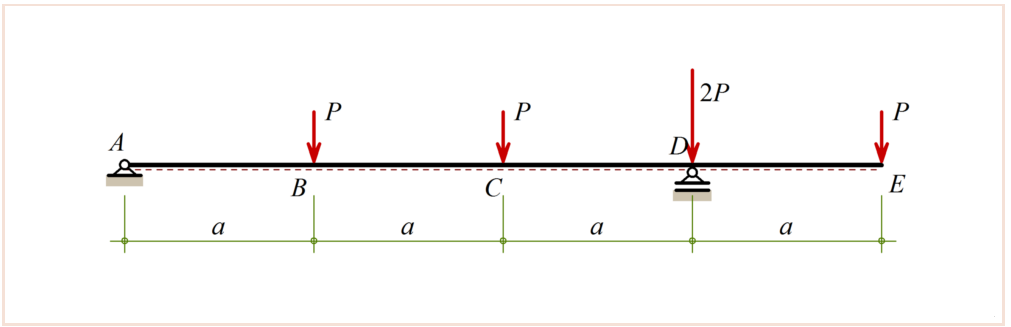
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a. (Rozwiązanie na rysunku 38 na stronie 14)



Rys. 28 Zadanie Bk1-Z1: Schemat statyczny

4.1.2 Zadanie 2: k-1b

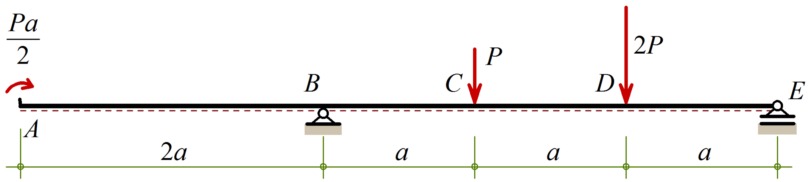
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a. (Rozwiązanie na rysunku 39 na stronie 14)



Rys. 29 Zadanie Bk1-Z2: Schemat statyczny

4.1.3 Zadanie 3: k-2a

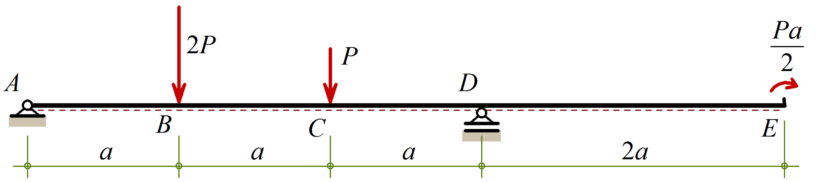
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a. (Rozwiązanie na rysunku 40 na stronie 15)



Rys. 30 Zadanie Bk1-Z3: Schemat statyczny

4.1.4 Zadanie 4: k-2b

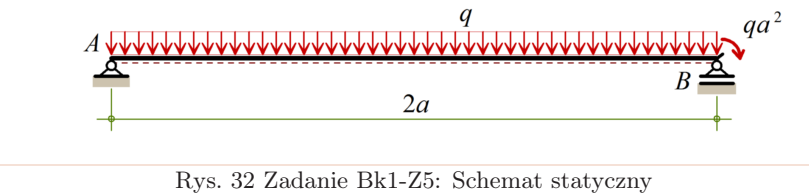
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a. (Rozwiązanie na rysunku 41 na stronie 15)



Rys. 31 Zadanie Bk1-Z4: Schemat statyczny

4.1.5 Zadanie 5: k-3a

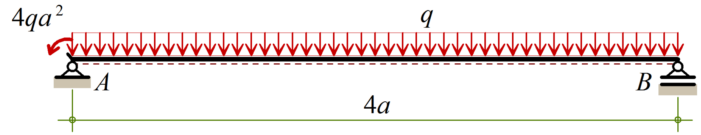
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a. (Rozwiązanie na rysunku 42 na stronie 16)



Rys. 32 Zadanie Bk1-Z5: Schemat statyczny

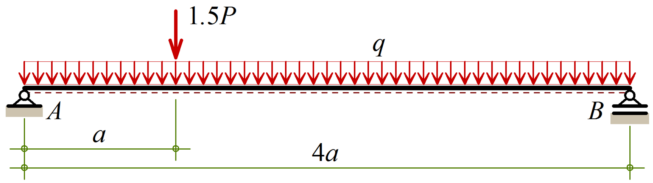
4.1.6 Zadanie 6: k-3b

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a. (Rozwiązanie na rysunku 43 na stronie 16)

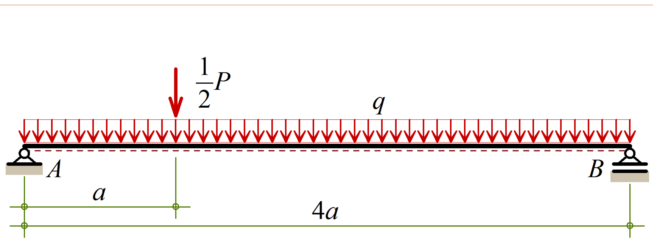


Rys. 33 Zadanie Bk1-Z6: Schemat statyczny

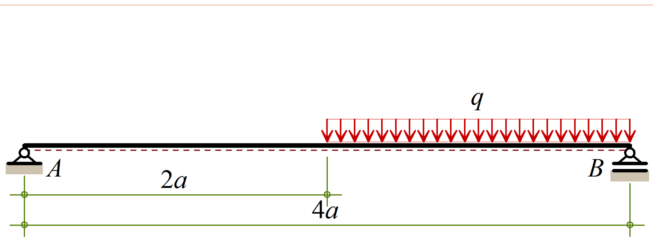
4.2 *Przykłady na kartkówkę k-4*



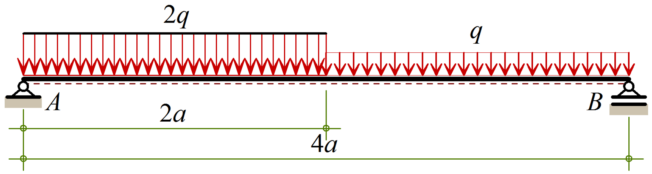
Rys. 34 Przykład 1 (*k-4*): Schemat statyczny



Rys. 35 Przykład 2 (*k-4*): Schemat statyczny



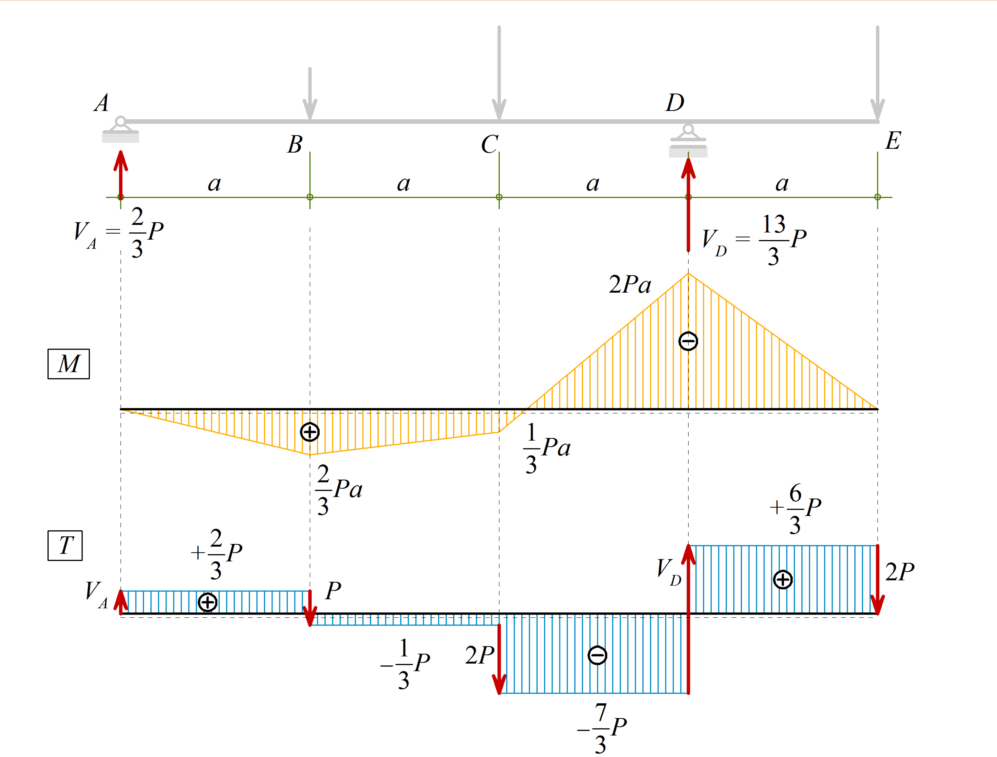
Rys. 36 Przykład 3 (*k-4*): Schemat statyczny



Rys. 37 Przykład 4 (*k-4*): Schemat statyczny

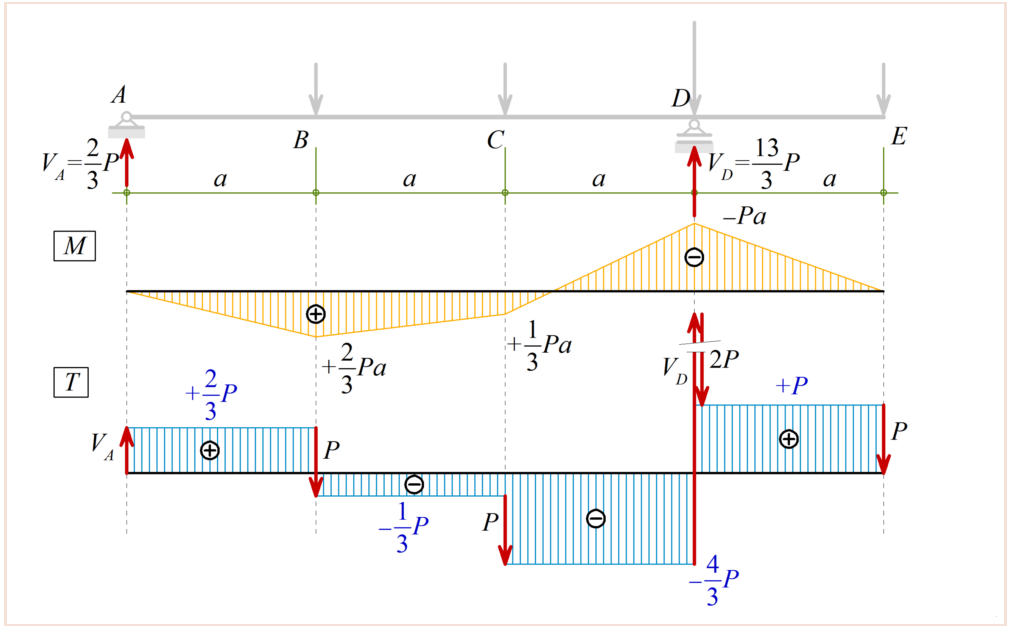
4.3 Przykład Bk1 - rozwiązania

4.3.1 Rozwiązania zadania 1



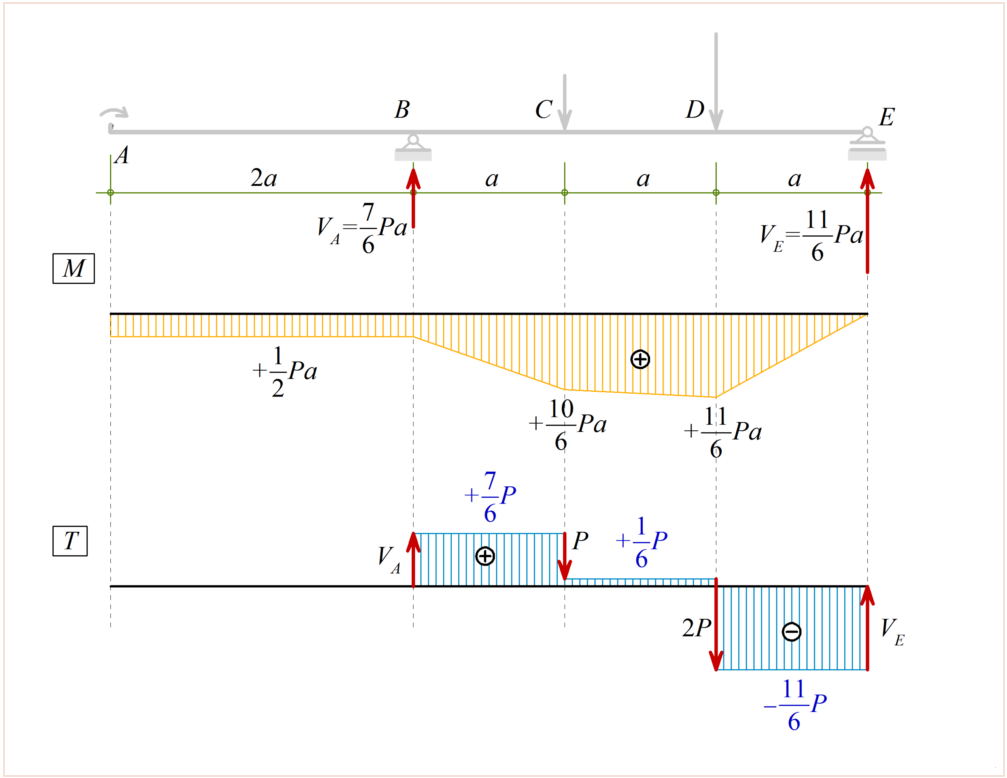
Rys. 38 Zadanie Bk1-Z1: wykres momentów zginających

4.3.2 Rozwiązania zadania 2



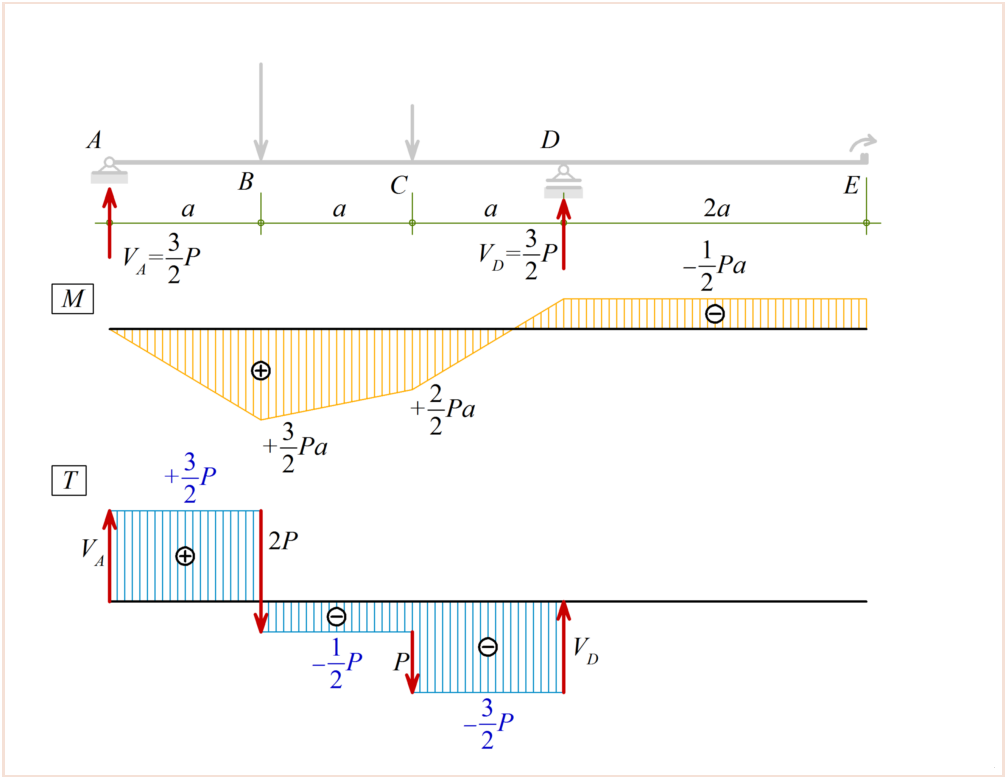
Rys. 39 Zadanie Bk1-Z2: wykres momentów zginających

4.3.3 Rozwiązania zadania 3



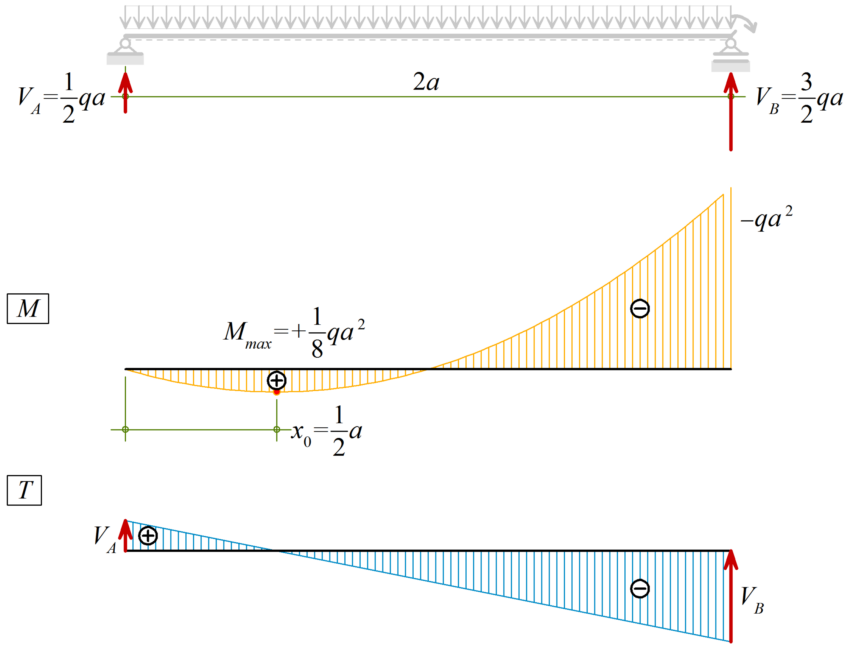
Rys. 40 Zadanie Bk1-Z3: wykres momentów zginających

4.3.4 Rozwiązania zadania 4



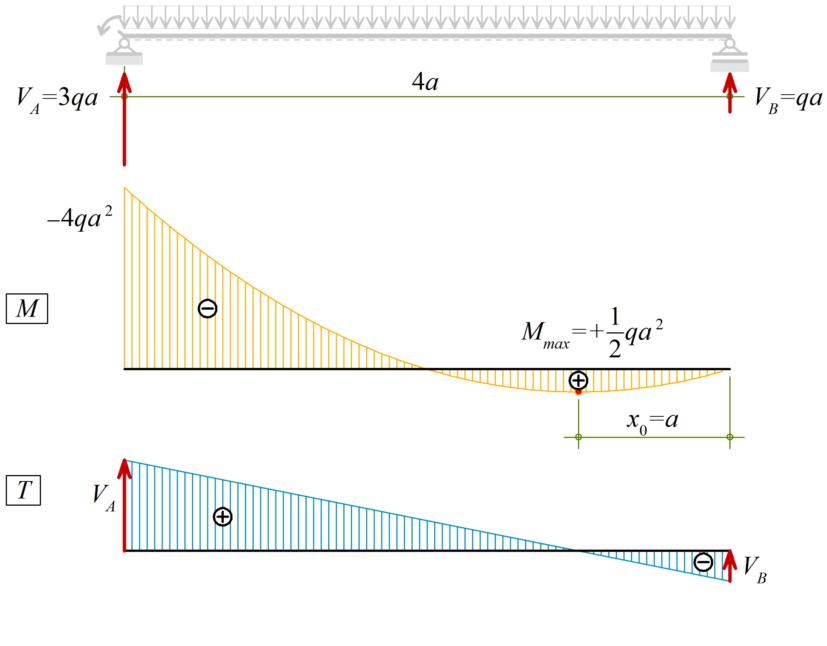
Rys. 41 Zadanie Bk1-Z4: wykres momentów zginających

4.3.5 Rozwiązania zadania 5



Rys. 42 Zadanie Bk1-Z5: wykres momentów zginających

4.3.6 Rozwiązania zadania 6



Rys. 43 Zadanie Bk1-Z6: wykres momentów zginających

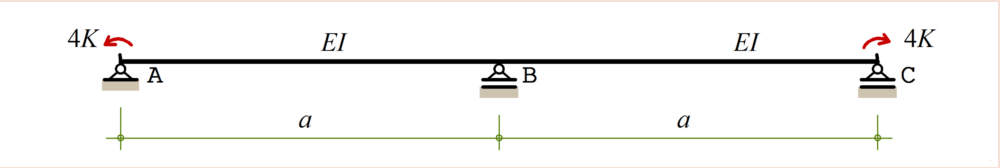
Część II

Metoda sił

5 Przykłady: belki

5.1 Przykład MS-B1

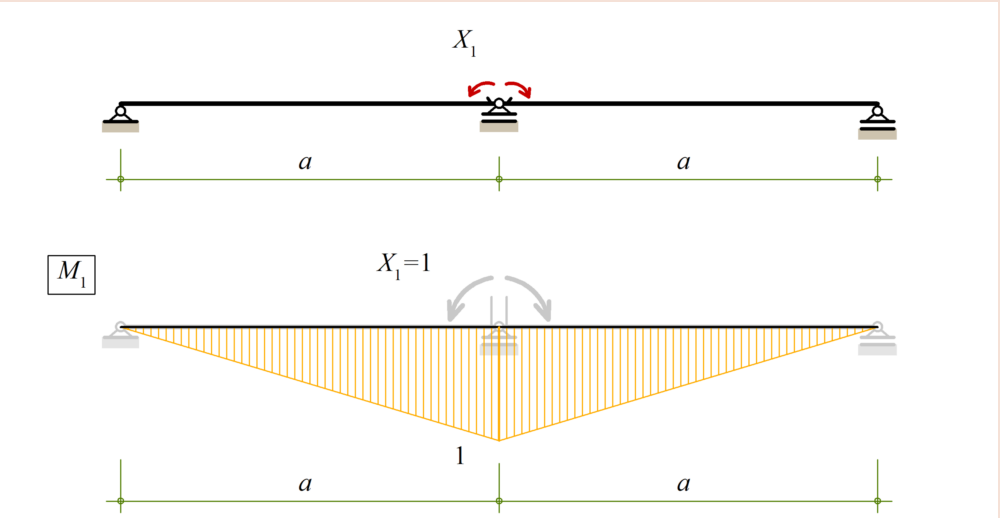
Korzystając z metody sił dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: K, a, EI.



Rys.44 Zadanie MS-B1: Schemat statyczny

5.2 Rozwiązanie - 1

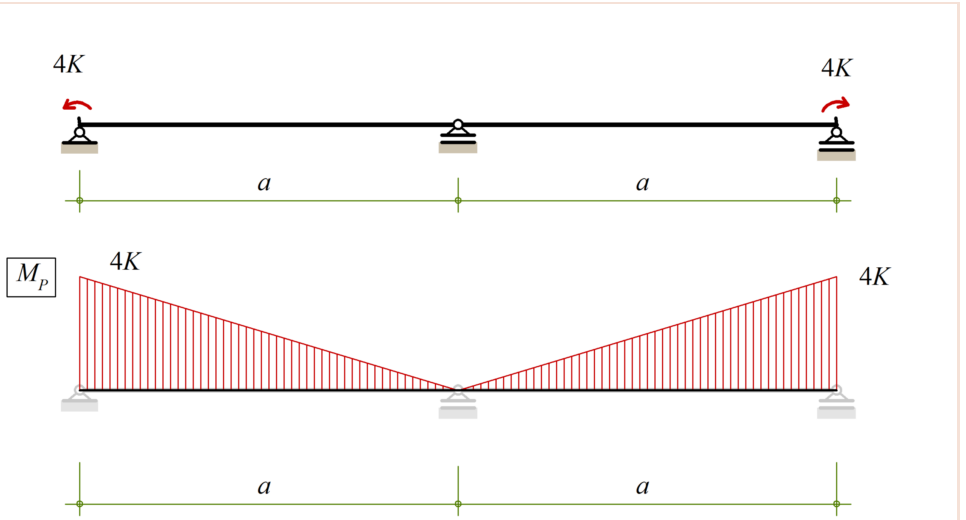
Układ zastępczy metody sił



Rys.45 Zadanie MS-B1: Rozwiązanie 1: układ zastepczy oraz wykres dla $X_1 = 1$: wykres M_1

5.2.1 Rozwiązanie

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(+\underbrace{\frac{1}{2}a \cdot 1}_{\text{pole}} \cdot \frac{2}{3}1 \right) \cdot 2 = +\frac{2}{3}\frac{a}{EI} \tag{5.1}$$

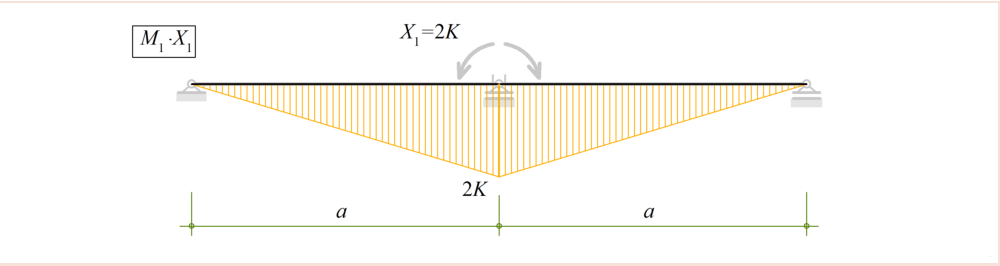


Rys.46 Zadanie MS-B1: Rozwiązanie 1: moment od obciążenia : wykres M_P

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(-\underbrace{\frac{1}{2}a \cdot 1}_{\text{pole}} \cdot \frac{1}{3}4K \right) \cdot 2 = -\frac{4}{3}\frac{Ka}{EI} \tag{5.2}$$

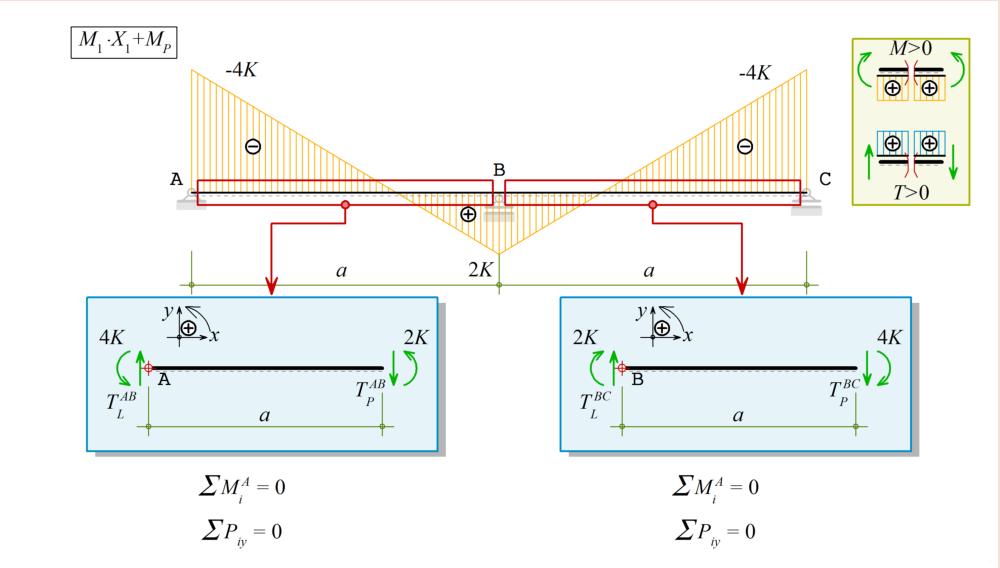
$$\boxed{\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0} \tag{5.3}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{a}{EI}X_1 + \left(-\frac{4}{3}\frac{Ka}{EI} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 2K \tag{5.4}$$



Rys.47 Zadanie MS-B1: Rozwiązanie 1: moment od obciążenia $X_1 = 2K$

5.2.2 Wykres momentów: $X_1 \cdot M_1 + M_P$



Rys.48 Zadanie MS-B1: Rozwiązanie 1: wykres momentów

5.2.3 Siły tnące na odcinku AB

$$\sum M_i^A = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_P^{AB} \cdot a + 2K + 4K = 0 \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{T_P^{AB}} = \frac{6K}{a} \tag{5.6}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad +T_L^{AB} - T_P^{AB} = 0 \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{T_L^{AB}} = \boldsymbol{T_P^{AB}} = \frac{6K}{a} \tag{5.8}$$

5.2.4 Siły tnące na odcinku BC

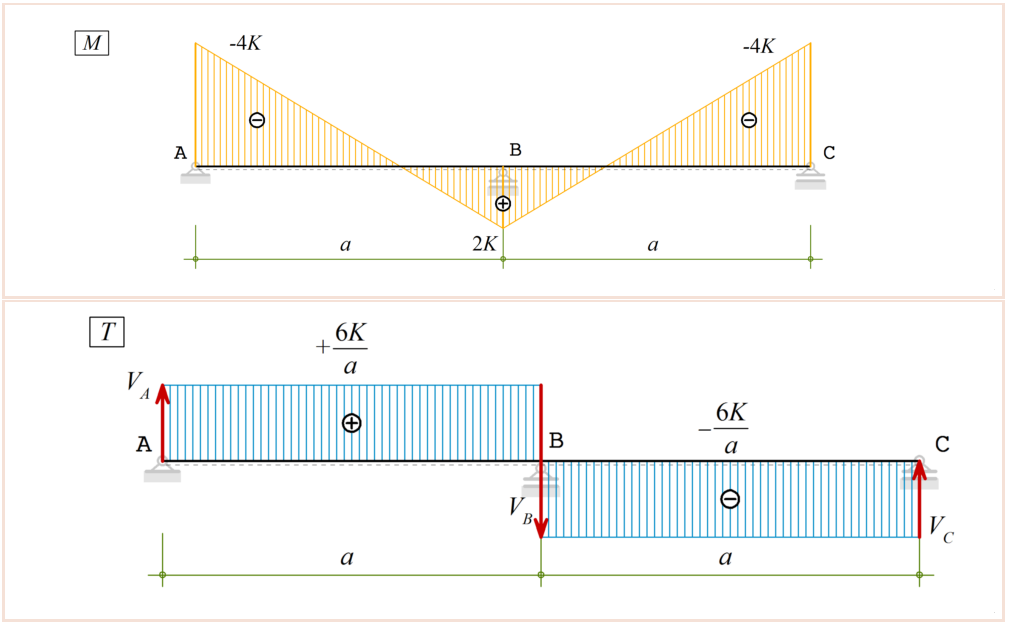
$$\sum M_i^B = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_P^{BC} \cdot a - 2K - 4K = 0 \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{T_P^{BC}} = -\frac{6K}{a} \tag{5.10}$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad +T_L^{BC} - T_P^{BC} = 0 \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{T_L^{BC}} = \boldsymbol{T_P^{BC}} = -\frac{6K}{a} \tag{5.12}$$

5.2.5 Końcowe wykresy sił wewnętrznych M, T



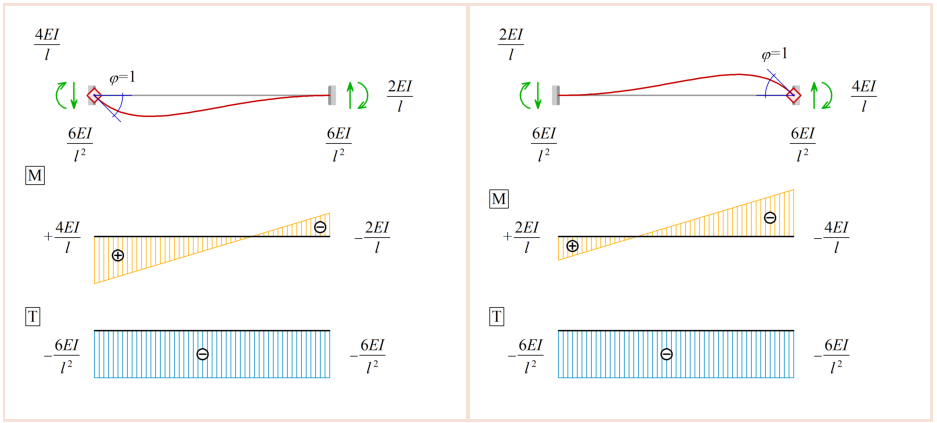
Rys.49 Zadanie MS-B1: Rozwiązanie 1: wykres sił tnących

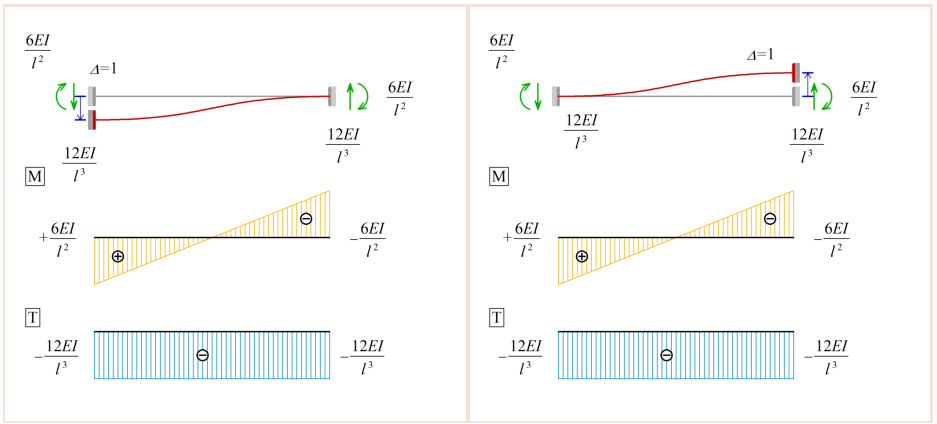
Część III

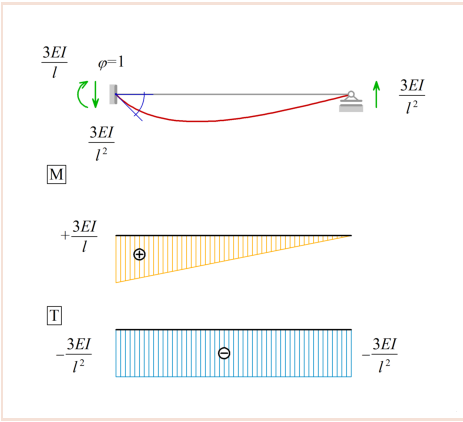
Metoda przemieszczeń

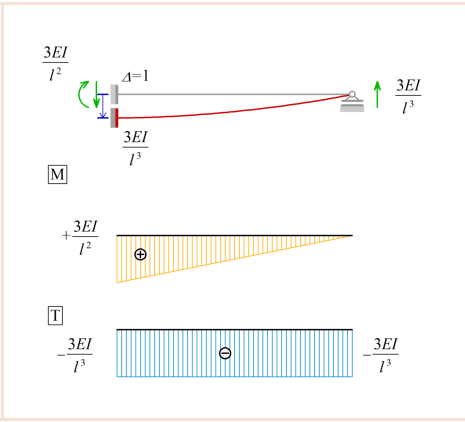
6 Tablice

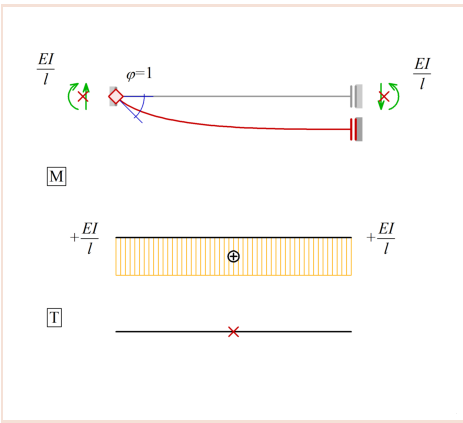
6.1 Rozwiązanie podstawowe $\mathcal{MP}$: przemieszczenia jednostkowe

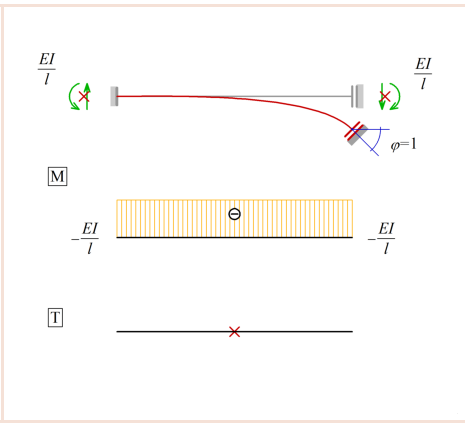




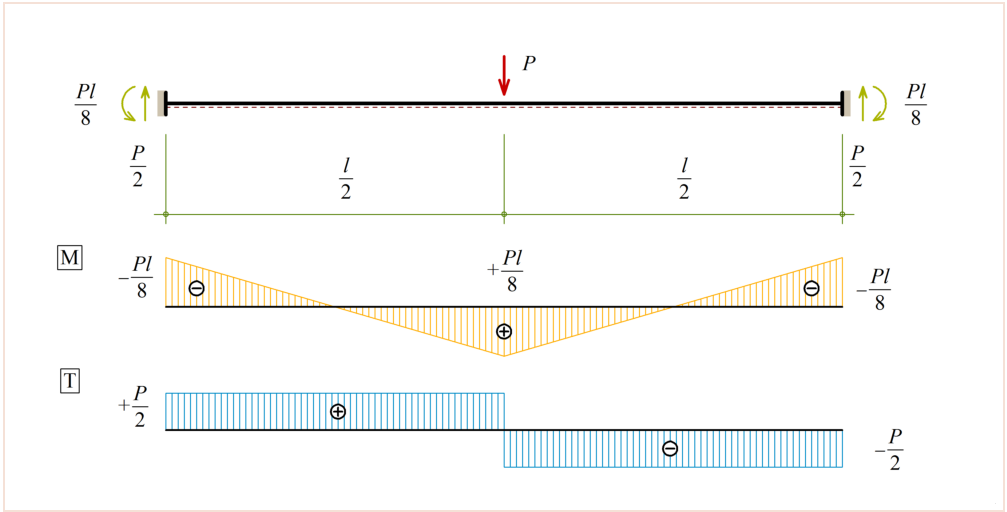


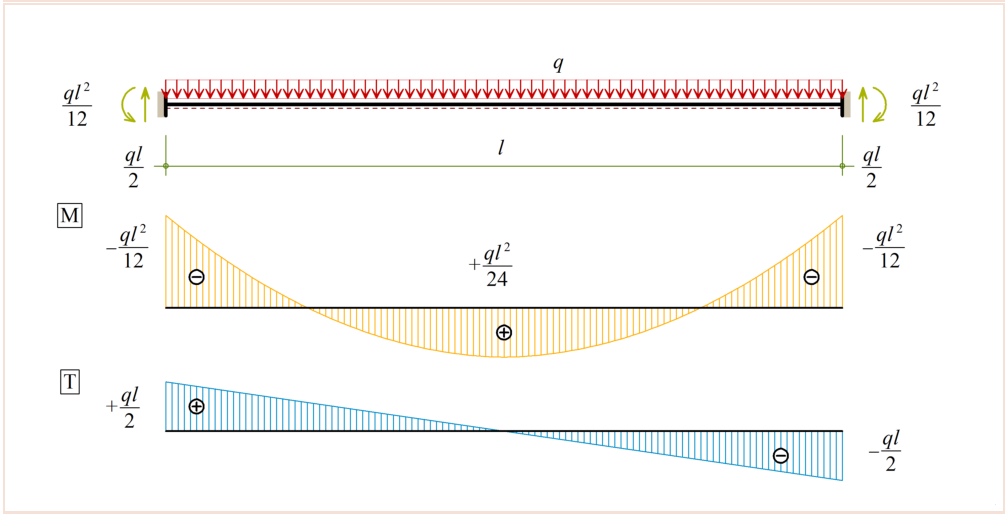


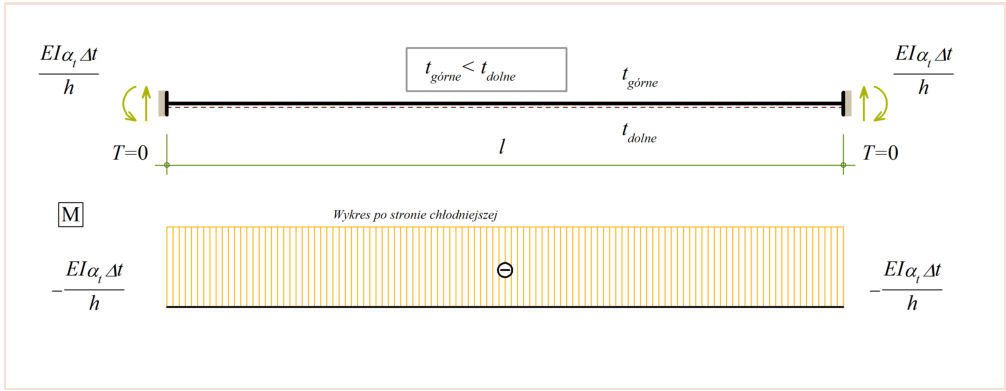


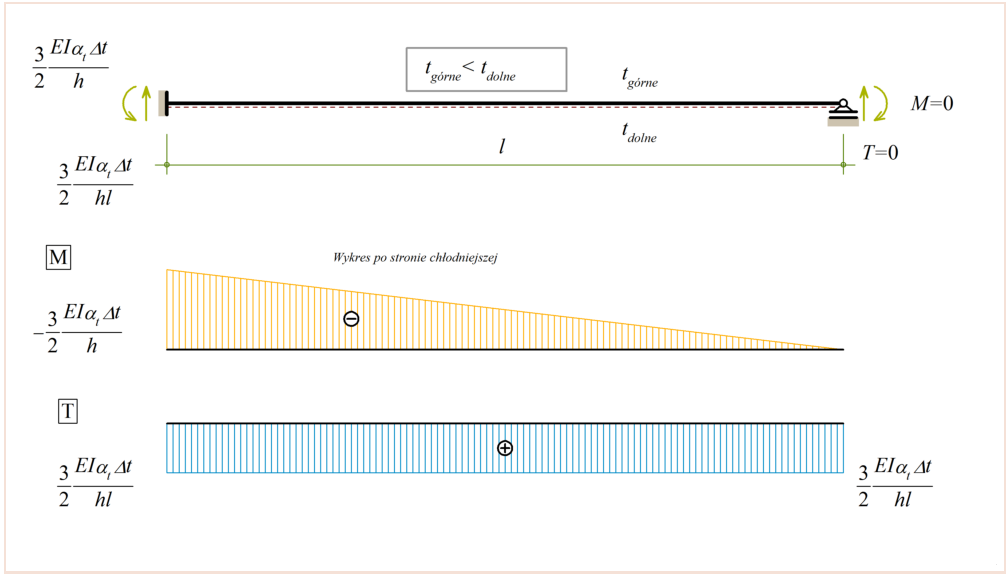


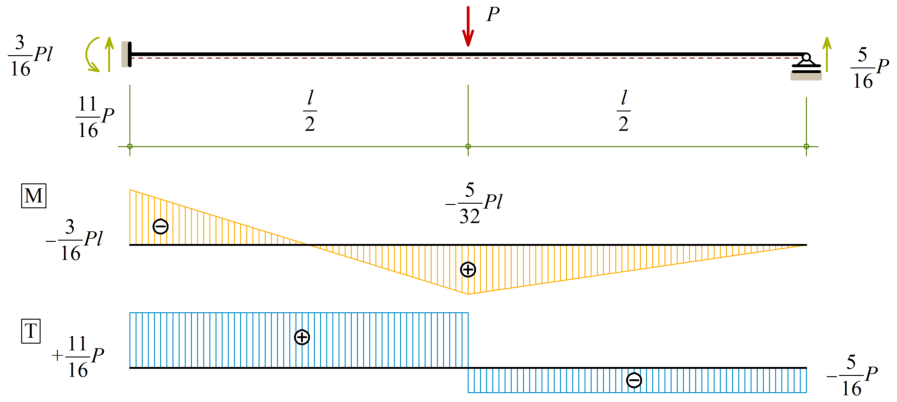
6.2 Rozwiązanie podstawowe $\mathcal{MP}$: obciążenia zewnętrzne

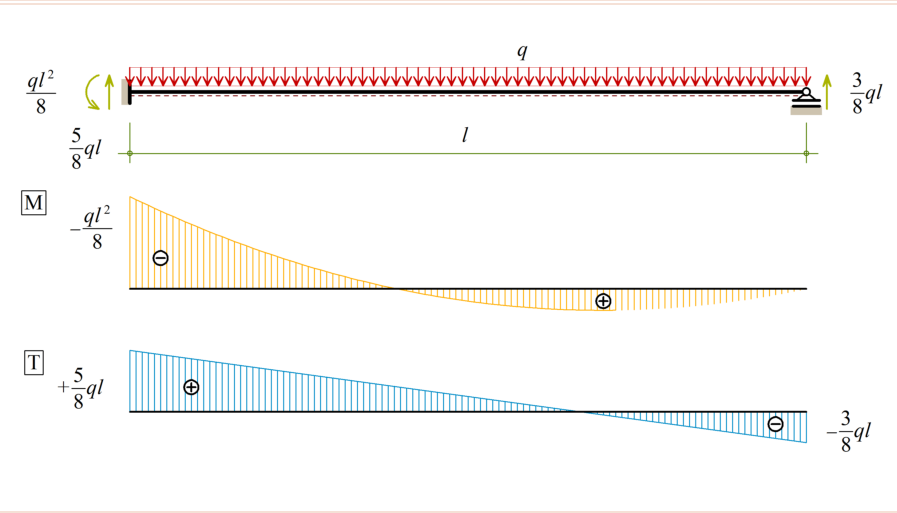


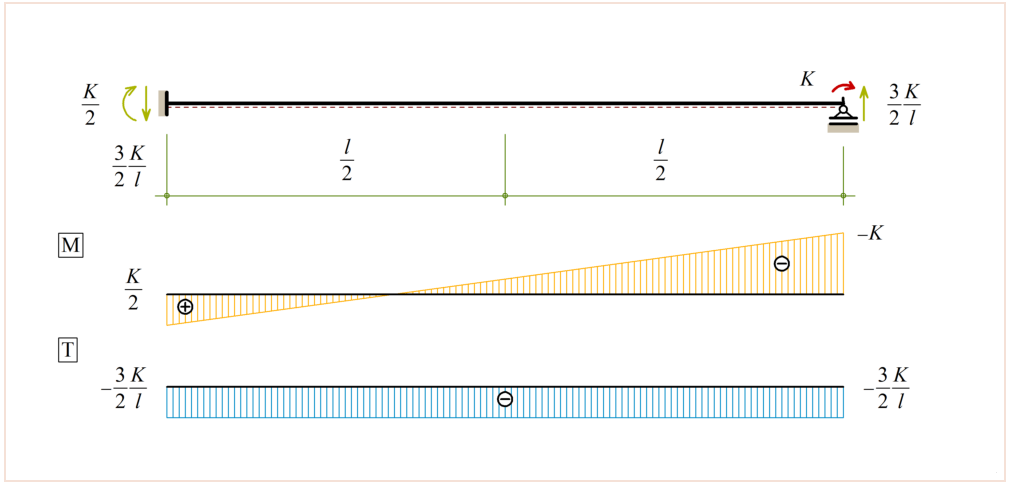







P
3/16 Pl
5/16 P
11/16 P
l/2
l/2
M
−5/32 Pl
−3/16 Pl
T
+11/16 P
−5/16 P

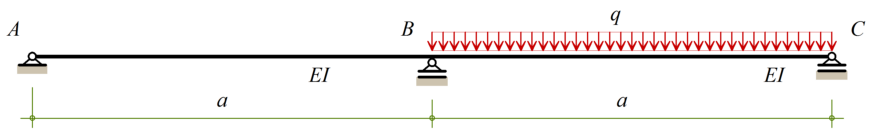

q
ql²/8
3/8 ql
5/8 ql
l
M
−ql²/8
T
+5/8 ql
−3/8 ql


K
K/2
3/2 K/l
l/2
l/2
M
−K
K/2
T
−3/2 K/l
−3/2 K/l

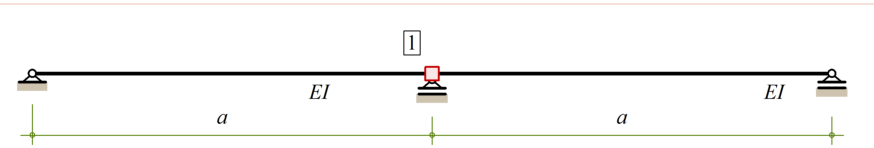
7 Przykłady: układy belkowe

7.1 Przykład B1

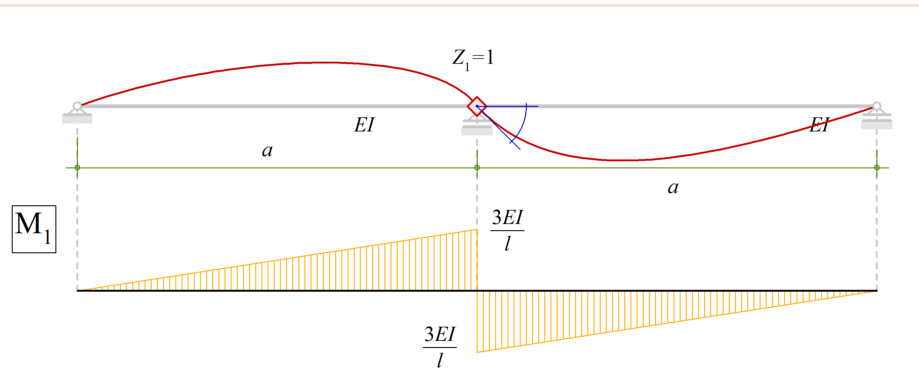
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a.



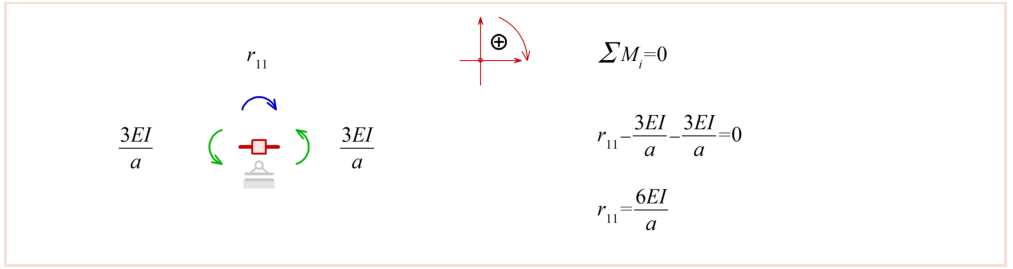
Układ zastępczy $\mathcal{MP}$:

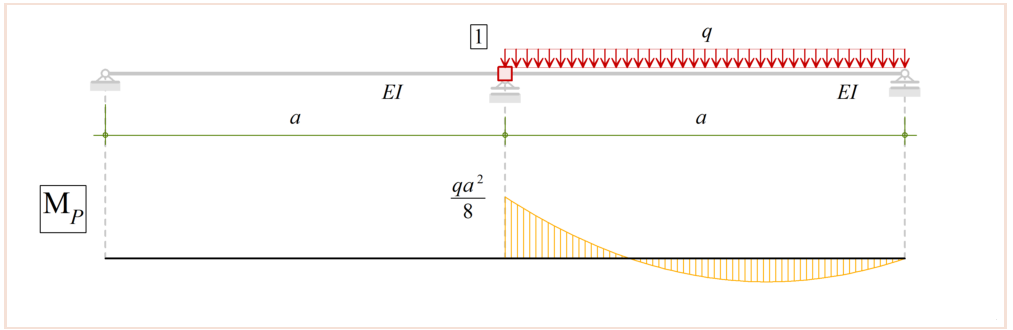


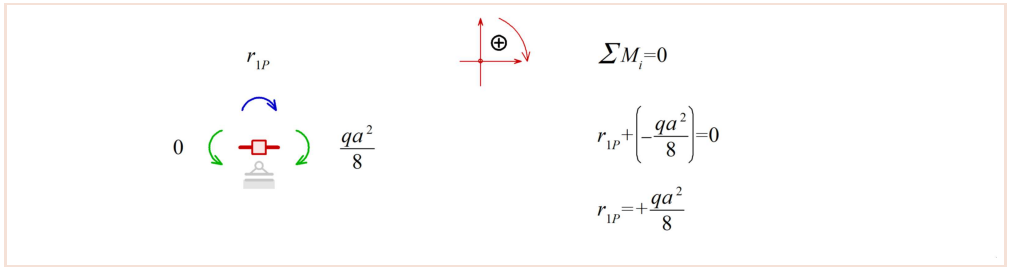
Wykres momentów w układzie podstawowym od jednostkowego obrotu w węźle 1:



Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia obrotem jednostkowym:
Wykres momentów w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego:
Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia zewnętrznego:







7.1.1 Równania $\mathcal{MP}$

Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$:

$$r_{11}Z_1 + r_{1P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6EI}{a}Z_1 + \left(-\frac{qa^2}{8}\right) = 0 \tag{7.1}$$

$$Z_1 = \frac{1}{48}\frac{qa^3}{EI} \tag{7.2}$$

7.1.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych

Końcowe wykresy powstają poprzez złożenie wykresów podstawowych:

$$M_k = M_1 \circ Z_1 + M_P \tag{7.3}$$

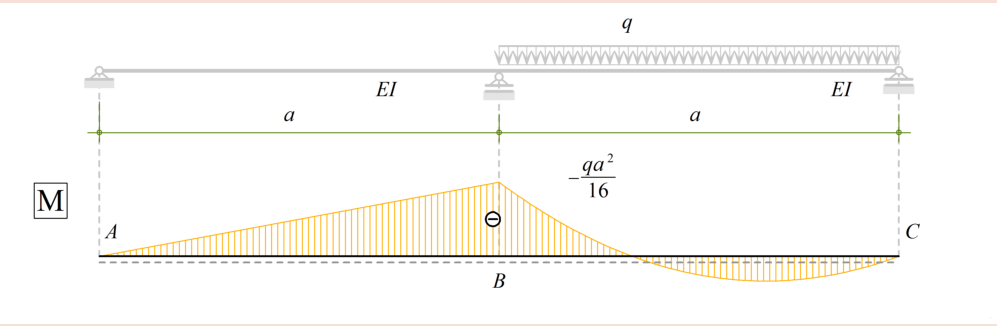
Wartość momentu zginającego z prawej strony punktu B (Uwaga: znakowanie wykresów jak dla belek: włókna dolne są wyróżnione):

$$M_{pr}^{B} = +\frac{3EI}{a}\cdot Z_1 + (-\frac{qa^2}{8}) = \frac{3EI}{a}\cdot\frac{1}{48}\frac{qa^3}{EI} + (-\frac{qa^2}{8}) = \\ = \frac{1}{16}qa^2 - \frac{1}{8}qa^2 = -\frac{1}{16}qa^2 \tag{7.4}$$

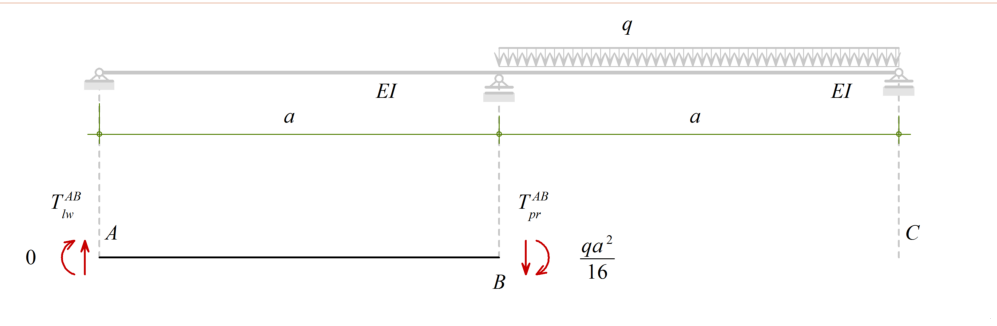
Wartość momentu zginającego z lewej strony punktu B:

$$M_{lw}^{B} = -\frac{3EI}{a}\cdot Z_1 + 0 = -\frac{3EI}{a}\cdot\frac{1}{48}\frac{qa^3}{EI} = -\frac{1}{16}qa^2 \tag{7.5}$$

Wstępny wykres momentów:

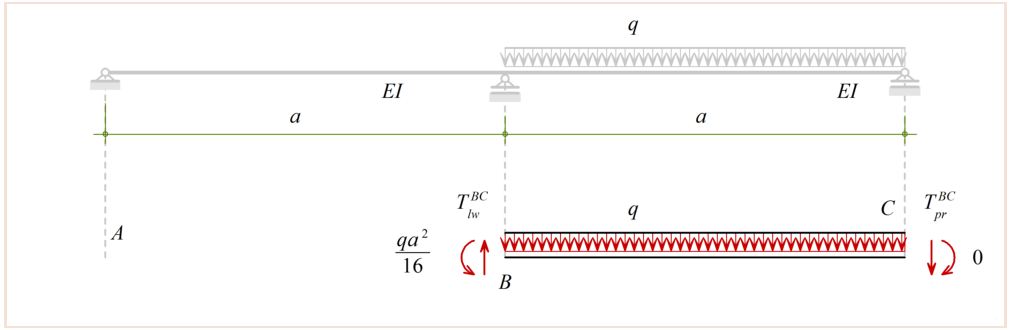


Na podstawie wstępnego wykresu momentów, wycinając przęsło AB obliczamy wykres sił tnących:



$$\sum\left(M_i^A\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad -T_{pr}^{AB}a - \frac{qa^2}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{pr}^{AB} = -\frac{qa}{16} \tag{7.6}$$

$$\sum\left(P_{iy}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{AB} - T_{pr}^{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{AB} = T_{pr}^{AB} = -\frac{qa}{16} \tag{7.7}$$

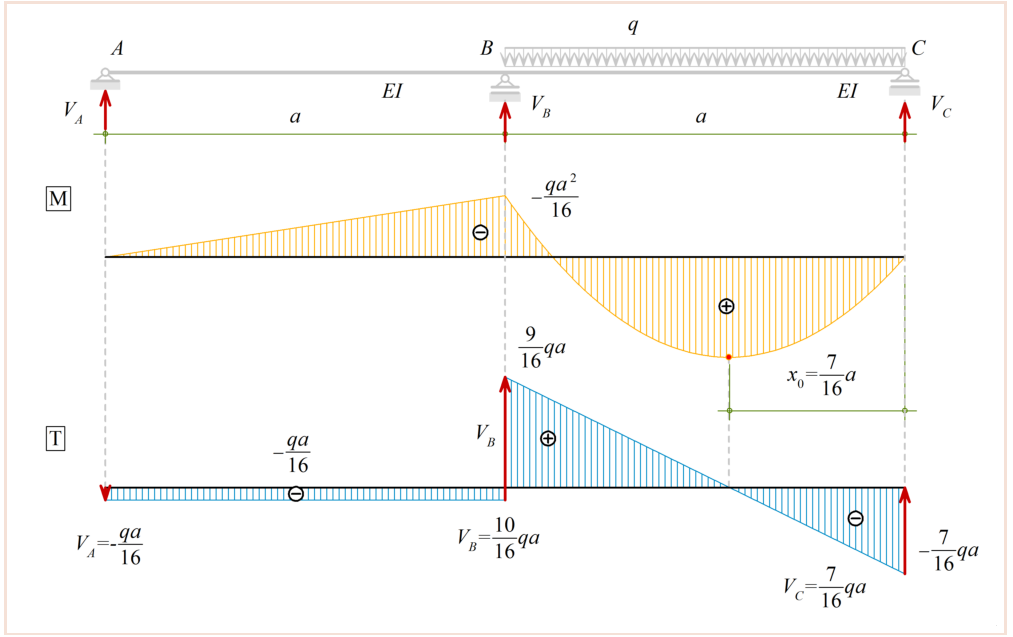


Wycięcie przęsła BC:

$$\sum\left(M_i^B\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad -T_{pr}^{BC}a + \frac{qa^2}{16} - qa\frac{a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{pr} = -\frac{7}{16}qa \tag{7.8}$$

$$\sum\left(P_{iy}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{BC} - T_{pr}^{BC} - qa = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{BC} = qa + T_{pr}^{BC} = +\frac{9}{16}qa \tag{7.9}$$

Końcowe wykresy:

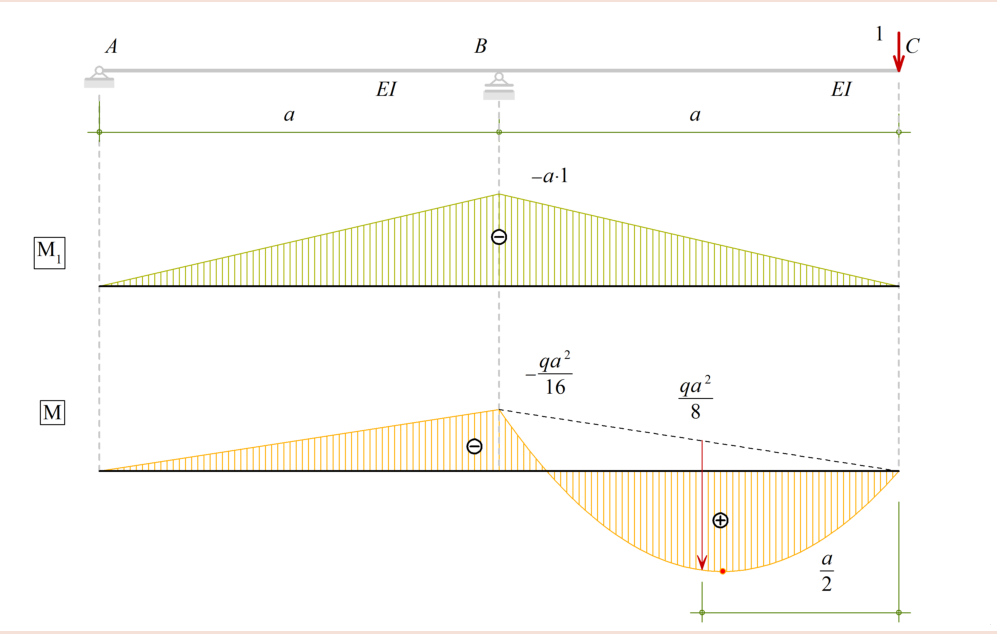


Materiał dydaktyczny do ćwiczeń. Przygotował dr inż. J. Pilśniak. Data: utw. 03 lutego 2014 - komp. 27 września 2014

7.1.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych

Sprawdzenie wykresu momentów zginających możemy wykonać poprzez obliczenie przemieszczenia pionowego w punkcie C na podporze : wartość równa zero.

Podstawowy układ statyczny zamieniamy na układ statycznie wyznaczalny poprzez odrzucenie podpory w punkcie C przykładając jednocześnie obciążenie jednostkowe w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Korzystając z twierdzenia

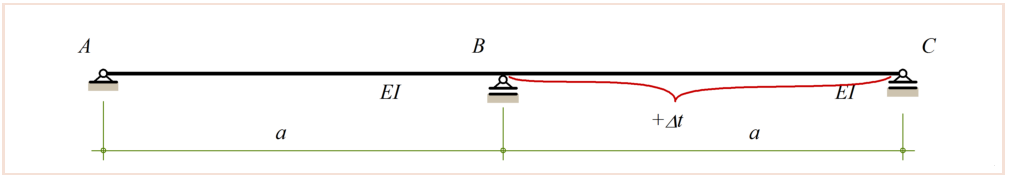


Maxwella-Mohra w ujęciu *Wereszczagina* sprawdzamy wartość przemieszczenie pionowe w punkcie C:

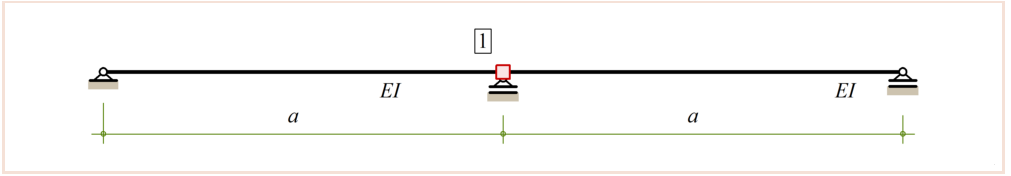
$$f_c = \frac{1}{EI}\left(+\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{qa^2}{16}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{qa^2}{16}\right)+ - \left(\frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{qa^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\right)\right) = = \frac{1}{EI}\left(+\frac{1}{48}qa^4+\frac{1}{48}qa^4-\frac{1}{24}qa^4\right)=0 \ \checkmark \tag{7.10}$$

7.2 Przykład B2 - wpływ temperatury

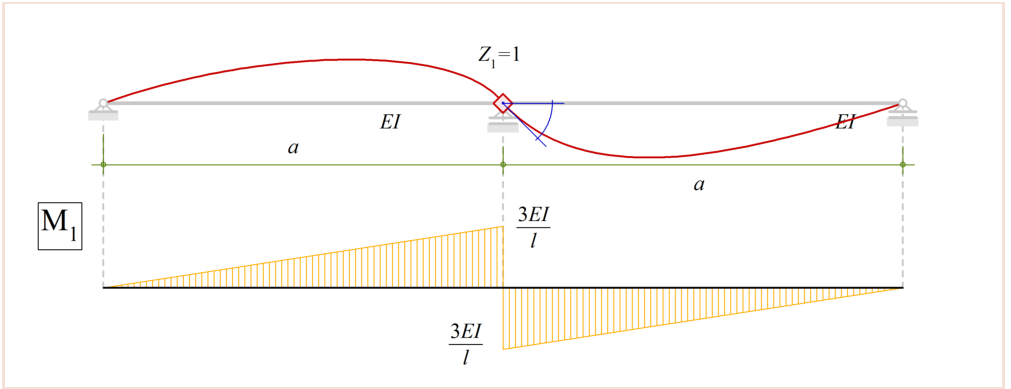
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a, Δt, α_t.



Rys. 50 Schemat statyczny



Rys. 51 Układ zastępczy $\mathcal{MP}$



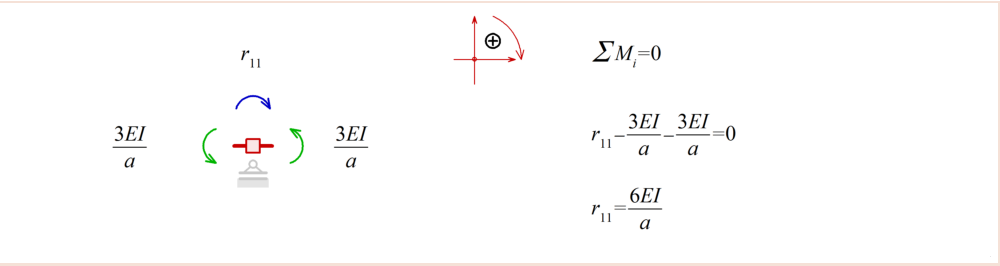
Rys. 52 Wykres momentów w układzie podstawowym od jednostkowego obrotu w węźle 1

7.2.1 Równania $\mathcal{MP}$

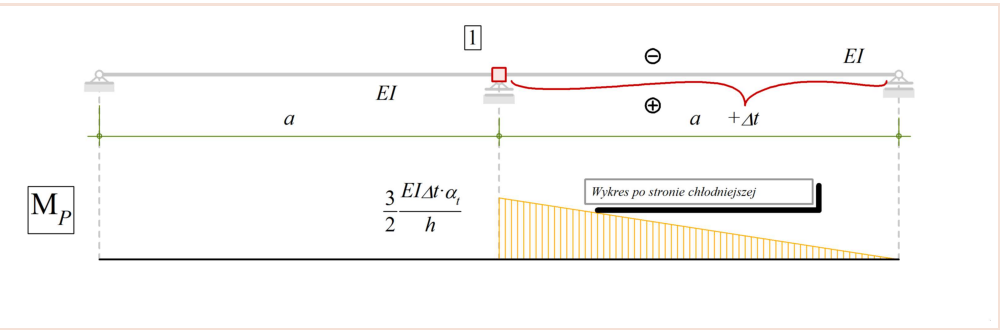
Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$:

$$r_{11}Z_1 + r_{1P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6EI}{a}Z_1 + \left(-\frac{3}{2}\frac{EI\Delta t\cdot\alpha_t}{h}\right) = 0 \tag{7.11}$$

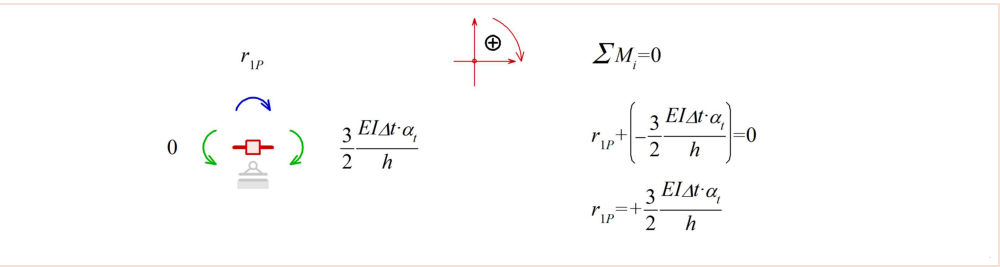
$$Z_1 = \frac{1}{4}\frac{\Delta t\cdot\alpha_t\cdot a}{h} \tag{7.12}$$



Rys. 53 Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia obrotem jednostkowym



Rys. 54 Wykres momentów w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego



Rys. 55 Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia zewnętrznego

7.2.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych

Końcowe wykresy powstają poprzez złożenie wykresów podstawowych:

$$M_k = M_1 \circ Z_1 + M_P \tag{7.13}$$

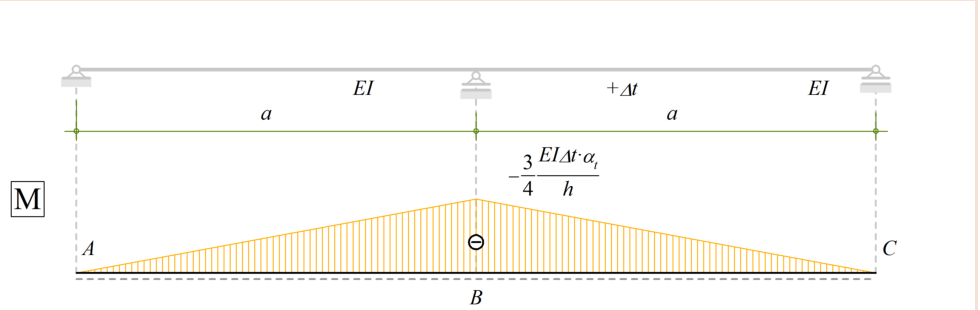
Wartość momentu zginającego z prawej strony punktu B (Uwaga: znakowanie wykresów jak dla belek: włókna dolne są wyróżnione):

$$\begin{aligned} M_{pr}^B &= +\frac{3EI}{a}\cdot Z_1 + \left(-\frac{3}{2}\frac{EI\ \Delta t\alpha_t}{h}\right) = \\ &= \frac{3EI}{a}\cdot\frac{1}{4}\frac{\Delta t\cdot\alpha_t\cdot a}{h} + \left(-\frac{3}{2}\frac{EI\Delta t\cdot\alpha_t}{h}\right) = \\ &= \frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h} - \frac{6}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h} = -\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h} \end{aligned} \tag{7.14}$$

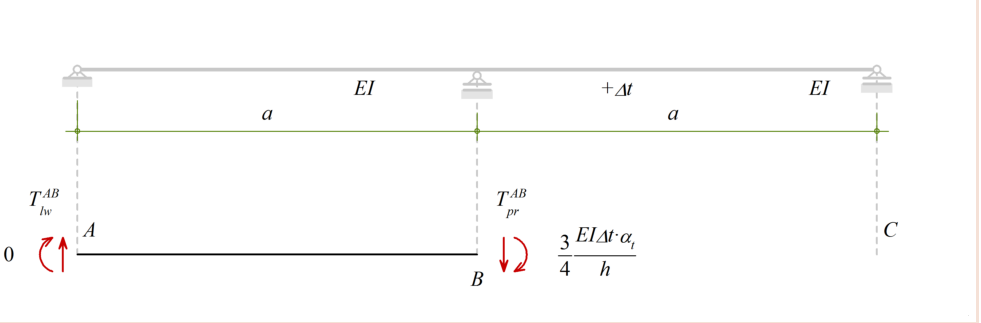
Wartość momentu zginającego z lewej strony punktu B:

$$M_{lw}^B = -\frac{3EI}{a}\cdot Z_1 + 0 = -\frac{3EI}{a}\cdot\frac{1}{4}\frac{\Delta t\cdot\alpha_t\cdot a}{h} = -\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h} \tag{7.15}$$

Wstępny wykres momentów:



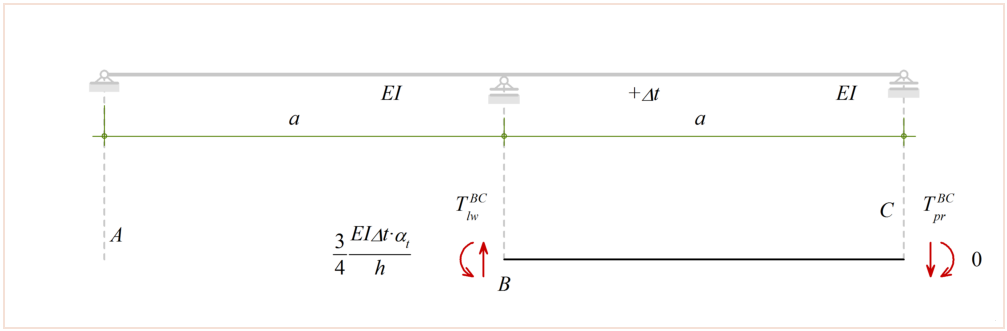
Na podstawie wstępnego wykresu momentów, wycinając przęsło AB obliczamy wykres sił tnących:



$$\sum\left(M_i^A\right)=0 \quad\Rightarrow\quad -T_{pr}^{AB}a - \frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h} = 0 \quad\Rightarrow\quad T_{pr}^{AB} = -\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{ah} \tag{7.16}$$

$$\sum (P_{iy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{AB} - T_{pr}^{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{AB} = T_{pr}^{AB} = -\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t \cdot \alpha_t}{ah} \tag{7.17}$$

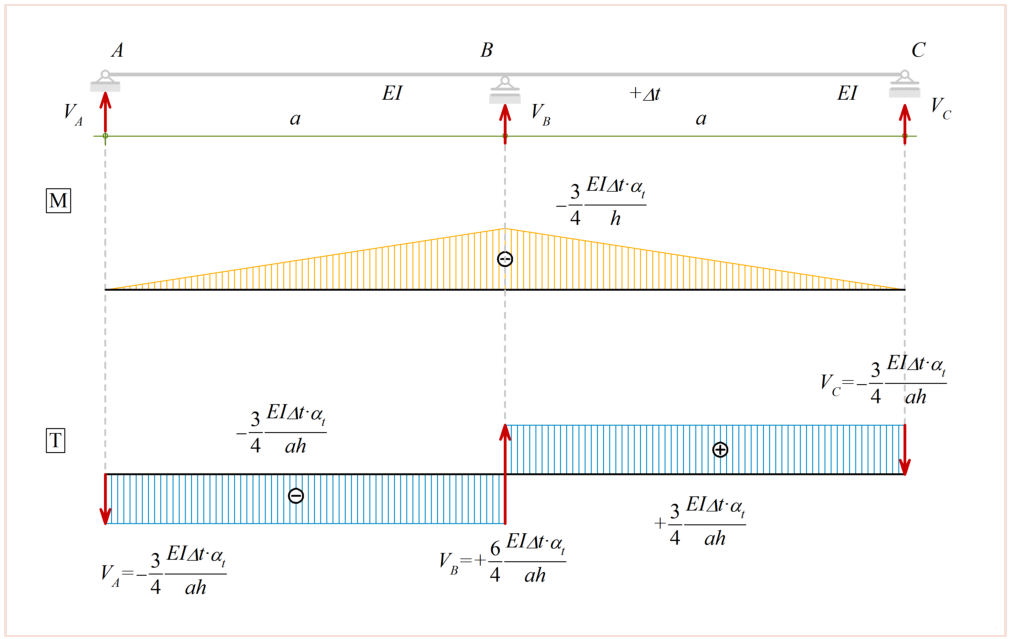
Wycięcie przęsła BC:

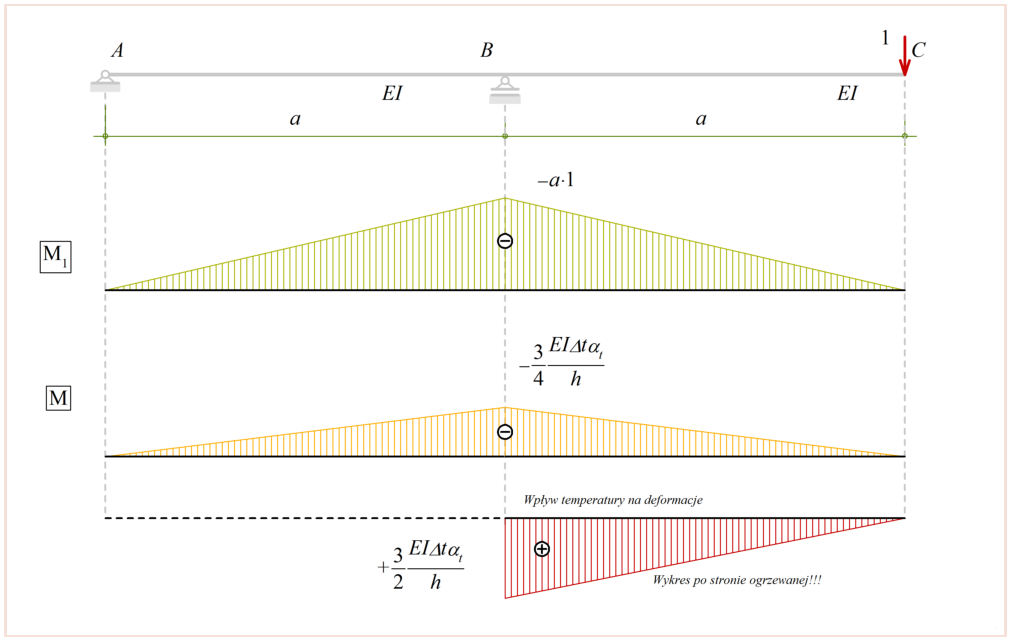


$$\sum \left(M_i^B\right) = 0; \quad \Rightarrow \quad -T_{pr}^{BC} a + \frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t \cdot \alpha_t}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{pr}^{BC} = +\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t \cdot \alpha_t}{ah} \tag{7.18}$$

$$\sum (P_{iy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{BC} - T_{pr}^{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{lw}^{BC} = T_{pr}^{BC} = +\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t \cdot \alpha_t}{ah} \tag{7.19}$$

Końcowe wykresy:





7.2.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych

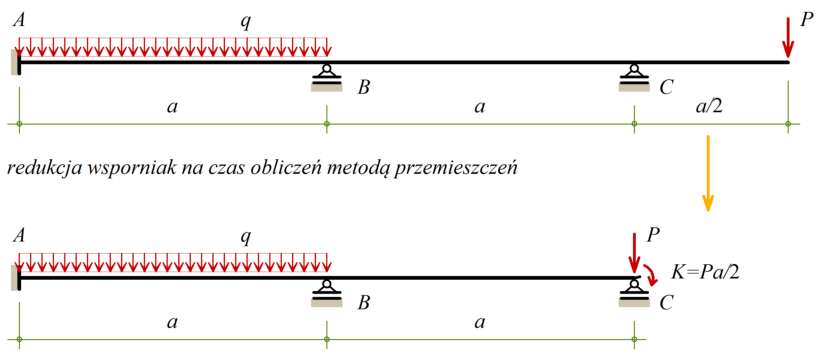
Sprawdzenie wykresu momentów zginających możemy wykonać poprzez obliczenie przemieszczenia pionowego w punkcie C na podporze : wartość równa zero.

Podstawowy układ statyczny zamieniamy na układ statycznie wyznaczalny poprzez odrzucenie podpory w punkcie C przykładając jednocześnie obciążenie jednostkowe w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Korzystając z twierdzenia *Maxwella-Mohra* w ujęciu *Wereszczagina* sprawdzamy wartość przemieszczenie pionowe w punkcie C:

$$\begin{aligned} f_c = \frac{1}{EI}\Bigg(&+\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h}\right)+\\ &-\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1\cdot a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t}{h}\right)\Bigg)=\\ &=\frac{1}{EI}\left(+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{EI\ \Delta t\cdot\alpha_t\cdot a^2}{h}=0\ \checkmark \end{aligned} \tag{7.20}$$

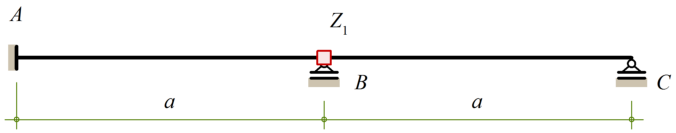
7.3 Przykład B3 - redukcja wspornika

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a, $P = qa$.



Rys. 56 Schemat statyczny wyjściowy oraz zredukowany

Na rysunku 56 przedstawiono sposób redukcji wspornika.



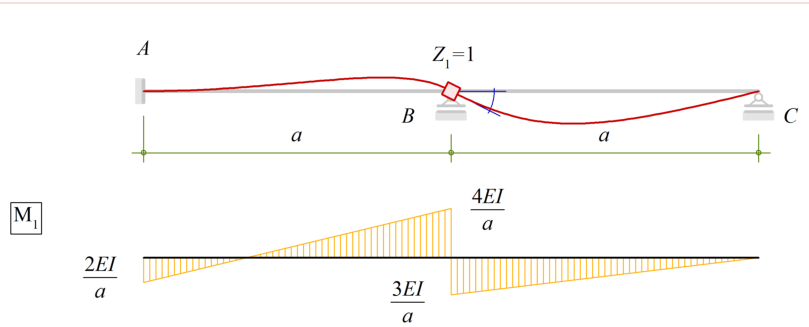
Rys. 57 Układ zastępczy $\mathcal{MP}$

7.3.1 Równania $\mathcal{MP}$

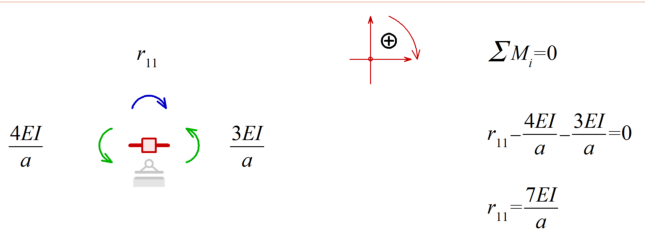
Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$:

$$r_{11}Z_1 + r_{1P} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7EI}{a}Z_1 + \frac{1}{3}qa^2 = 0 \tag{7.21}$$

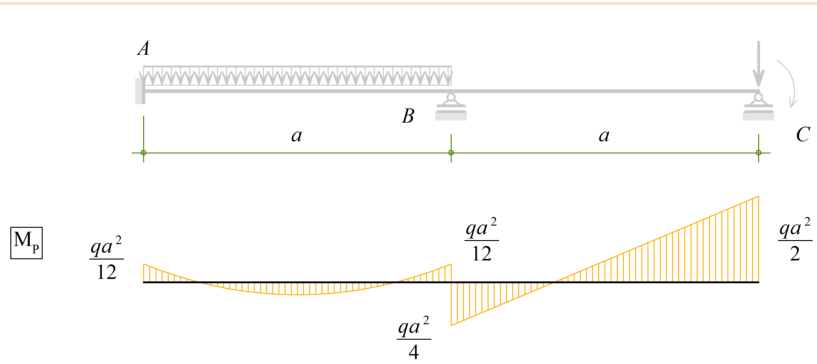
$$Z_1 = -\frac{1}{21}\frac{qa^3}{EI} \tag{7.22}$$



Rys. 58 Wykres momentów w układzie podstawowym od jednostkowego obrotu w węźle 1



Rys. 59 Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia obrotem jednostkowym

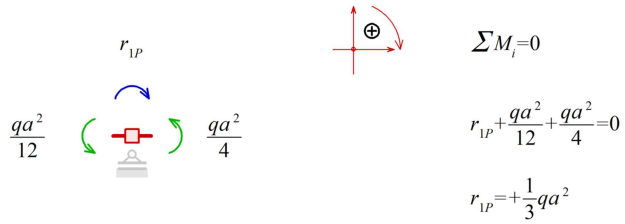


Rys. 60 Wykres momentów w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego

7.3.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych

Końcowe wykresy powstają poprzez złożenie wykresów podstawowych:

$$M_k = M_1 \circ Z_1 + M_P \tag{7.23}$$



Rys. 61 Obliczenie reakcji w węźle od obciążenia zewnętrznego

Wartość momentu zginającego z prawej strony punktu B (Uwaga: znakowanie wykresów jak dla belek: włókna dolne są wyróżnione):

$$M_{pr}^{B}=\frac{3EI}{a}\cdot(-\frac{qa^3}{21EI})+\frac{qa^2}{4}=\frac{3}{28}qa^2\approx 0.1072qa^2 \tag{7.24}$$

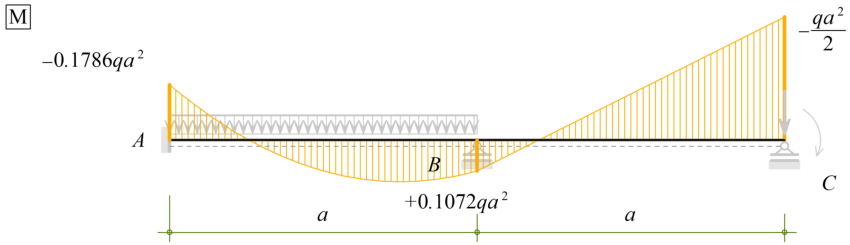
Wartość momentu zginającego z lewej strony punktu B:

$$M_{lew}^{B}=-\frac{4EI}{a}\cdot(-\frac{qa^3}{21EI})-\frac{qa^2}{12}=\frac{3}{28}qa^2\approx 0.1072qa^2 \tag{7.25}$$

Wartość momentu zginającego z prawej strony punktu A:

$$M_{pr}^{A}=+\frac{2EI}{a}\cdot(-\frac{qa^3}{21EI})-\frac{qa^2}{12}=-\frac{5}{28}qa^2\approx 0.1786qa^2 \tag{7.26}$$

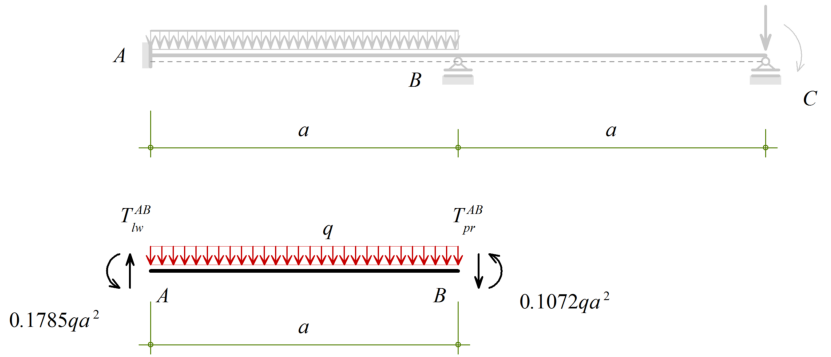
Wstępny wykres momentów:



Rys. 62 Wstępny wykres momentów

Na podstawie wstępnego wykresu momentów, wycinając przęsło AB obliczamy wykres sił tnących:

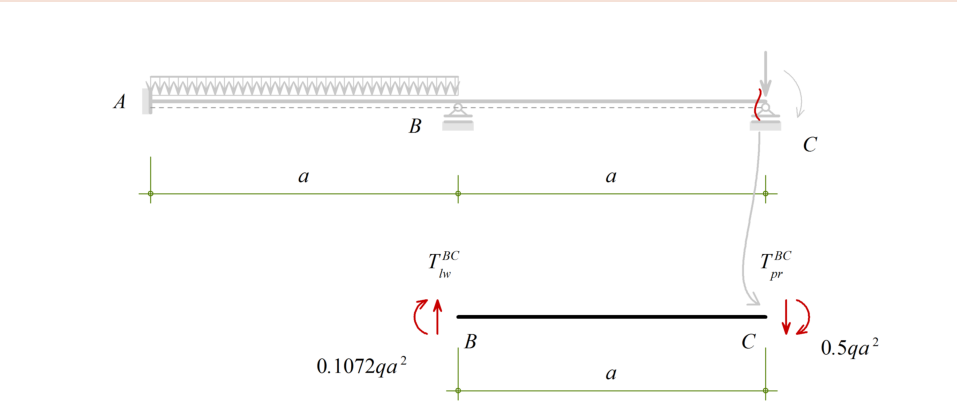
$$\sum(M_i^A)=0 \quad\Rightarrow\quad -T_{pr}^{AB}a+0.1785qa^2+0.1072qa^2-\frac{qa^2}{2}=0$$
$$T_{pr}^{AB}=-0.2143qa \tag{7.27}$$



Rys. 63 Wyznaczanie sił tnących w przedziale AB

$$\sum(P_{iy})=0 \quad\Rightarrow\quad T_{lw}^{AB}-T_{pr}^{AB}-qa=0 \quad\Rightarrow\quad T_{lw}^{AB}=+0.7857qa \tag{7.28}$$

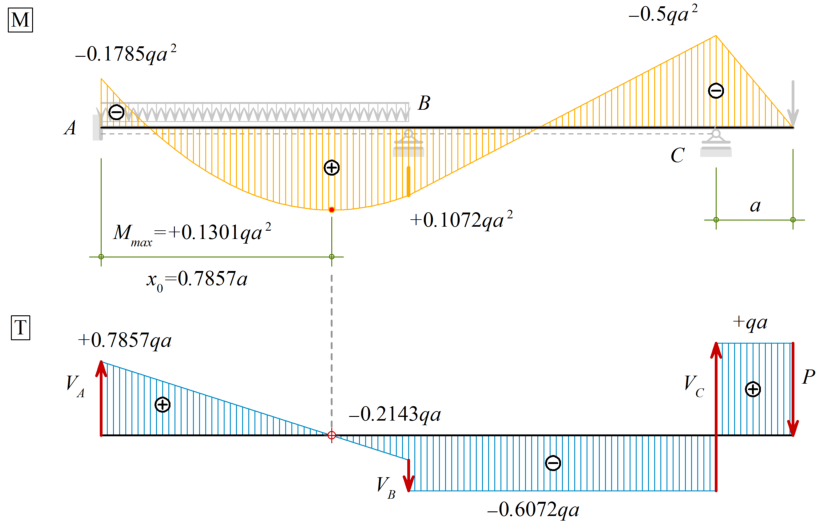
Wycięcie przęsła BC:



Rys. 64 Wyznaczanie sił tnących w przedziale BC

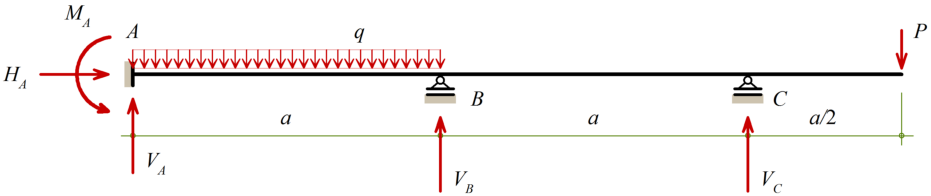
$$\sum(M_i^B)=0; \quad\Rightarrow\quad -T_{pr}^{BC}a-0.1072qa^2-0.5qa^2=0$$
$$T_{pr}^{BC}=-0.6072qa \tag{7.29}$$

$$\sum(P_{iy})=0 \quad\Rightarrow\quad T_{lw}^{BC}-T_{pr}^{BC}=0 \quad\Rightarrow\quad T_{lw}^{BC}=T_{pr}^{BC}=-0.6072qa \tag{7.30}$$



Rys. 65 Wykresy końcowe sił wewnętrznych

Końcowe wykresy pokazano na rysunku 65 (wykres narysowano również w obszarze wspornika). Na podstawie wykresów obliczamy wartości reakcji, które pokazano na rysunku 66.



Rys. 66 Wykresy końcowe sił wewnętrznych

$$M_A = 0.1785qa^2, \quad V_A = 0.7857qa \tag{7.31}$$

$$V_B = -(0.6072qa - 0.2143qa) = -0.3929qa \tag{7.32}$$

$$V_C = +0.6072qa + 1qa = 1.6072qa \tag{7.33}$$

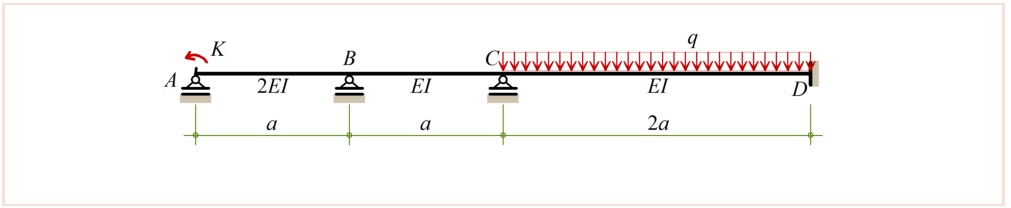
7.3.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych

Sprawdzenie wykresu momentów zginających możemy wykonać poprzez sprawdzenie jakiegoś warunku równowagi np. $\sum(M_i^B)$.

$$\begin{aligned}\sum(M_i^B) &= +M_A - V_A \cdot a + \frac{qa^2}{2} + V_C \cdot a - P \cdot 1.5a = \\ &= 0.1785qa^2 - 0.7857qa \cdot a + 0.5qa^2 + 1.6072 \cdot a - 1.5qa^2 = \\ &= 0.000qa^2 \ \surd\end{aligned} \tag{7.34}$$

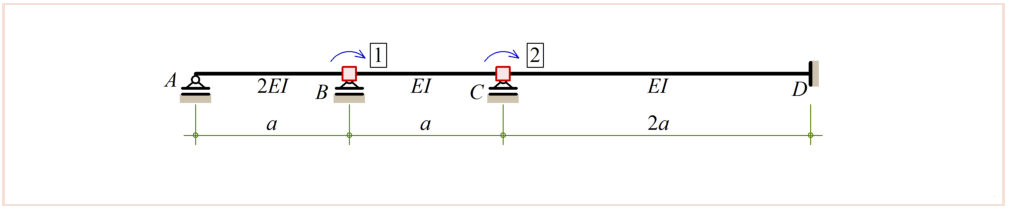
7.4 Przykład B4 - układ trójprzęsłowy - dwie niewiadome

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a, $K = qa^2/2$.



Rys. 67 Schemat statyczny

Na rysunku 68 pokazano układ zastępczy $\mathcal{MP}$.

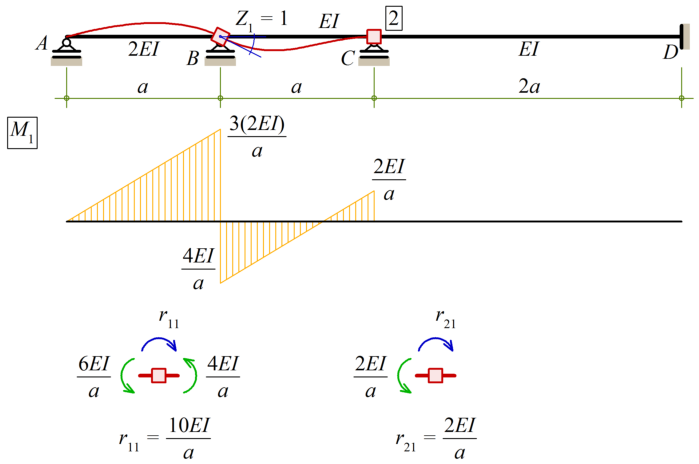


Rys. 68 Układ zastępczy $\mathcal{MP}$

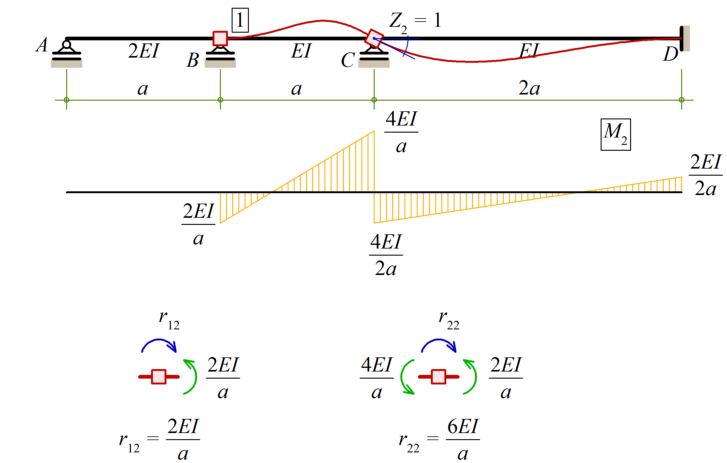
7.4.1 Równania $\mathcal{MP}$

Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} &= 0 \end{aligned} \tag{7.35}$$

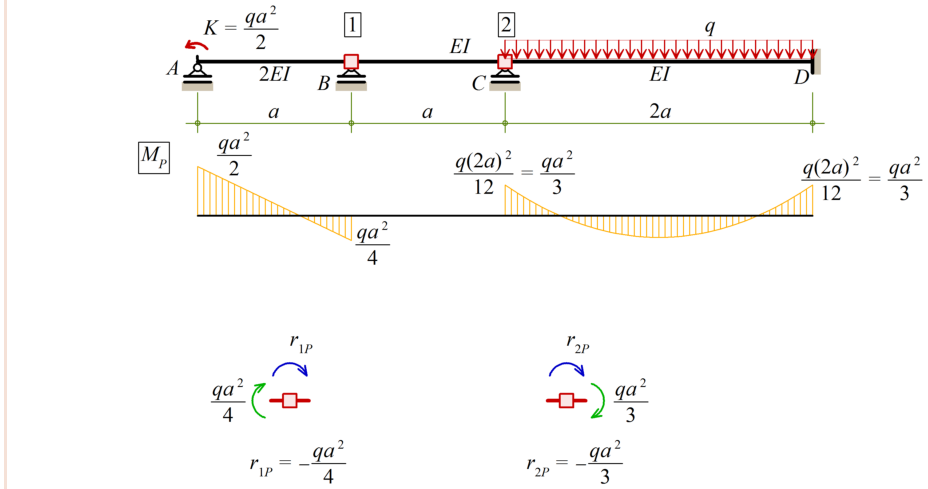


Rys. 69 Wykres momentów w układzie podstawowym od jednostkowego obrotu w węźle 1



Rys. 70 Wykres momentów w układzie podstawowym od jednostkowego obrotu w węźle 2

$$\frac{10EI}{a}Z_1 + \frac{2EI}{a}Z_2 + (-\frac{qa^2}{4}) = 0$$
$$\frac{2EI}{a}Z_1 + \frac{6EI}{a}Z_2 + (-\frac{qa^2}{3}) = 0 \qquad (7.36)$$



Rys. 71 Obliczenie reakcji w węzłach od obciążenia zewnętrznego

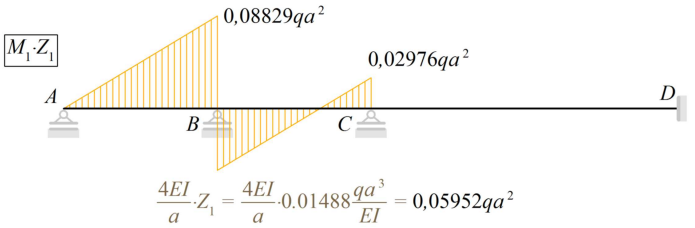
Rozwiązanie równania:

$$Z_1 = +0.01488\,\frac{qa^3}{EI} \qquad (7.37)$$
$$Z_2 = +0.05060\,\frac{qa^3}{EI} \qquad (7.38)$$

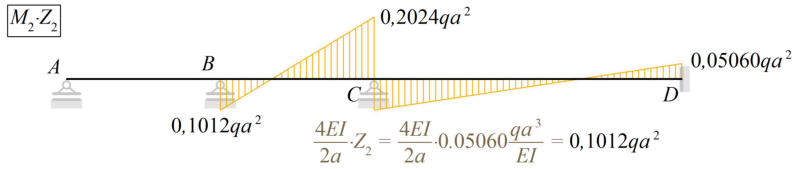
7.4.2 Końcowe wykresy sił wewnętrznych

Końcowe wykresy powstają poprzez złożenie wykresów podstawowych:

$$M_k = M_1 \circ Z_1 + M_2 \circ Z_2 + M_P \qquad (7.39)$$



Rys. 72 Wykres momentów zginających: $M_1 \circ Z_1$



Rys. 73 Wykres momentów zginających: $M_2 \circ Z_2$

Wartość momentu zginającego z prawej strony punktu B (Uwaga: znakowanie wykresów jak dla belek: włókna dolne są wyróżnione):

$$M_{pr}^{A} = 0 + 0 + (-0.5qa^2) = -0.500qa^2 \tag{7.40}$$

Wartość momentu zginającego z lewej i z prawej strony punktu B:

$$M_{lew}^{B} = -0.08829qa^2 + 0 + 0,2500qa^2 = +0,16072qa^2 \tag{7.41}$$
$$M_{pr}^{B} = +0.05952qa^2 + 0,1012qa^2 + 0 = +0,16072qa^2 \tag{7.42}$$

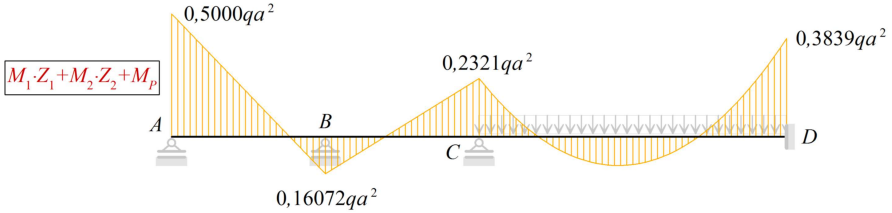
Wartość momentu zginającego z lewej i z prawej strony punktu C:

$$M_{lew}^{C} = -0.02976qa^2 + (-0,2024qa^2) + 0 = -0,2321qa^2 \tag{7.43}$$
$$M_{pr}^{C} = 0 + 0,1012qa^2 + (-0,3333qa^2) = -0,2321qa^2 \tag{7.44}$$

Wartość momentu zginającego z lewej strony punktu D:

$$M_{lew}^{D} = 0 + (-0,05060qa^2) + (-0,3333qa^2) = -0,3839qa^2 \tag{7.45}$$

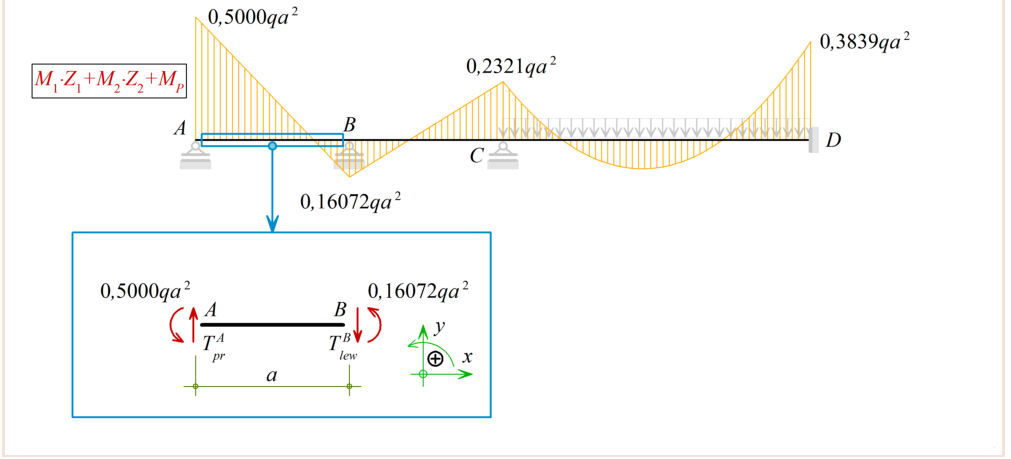
Wstępny wykres momentów:



Rys. 74 Wstępny wykres momentów zginających: $M_1 \circ Z_1 + M_2 \circ Z_2 + M_P$

Wykres sił tnących

Na podstawie wstępnego wykresu momentów obliczamy wartości sił tnących:



Rys. 75 Wyznaczanie sił tnących w przedziale AB

Przęsło AB (patrz rysunek 75):

$$\sum (M_i^A) = 0, \qquad -T_{lew}^{B} a + 0.5000qa^2 + 0.16072qa^2 = 0 \tag{7.46}$$
$$T_{lew}^{B} = +0.66072qa$$

$$\sum (P_{iy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{pr}^{A} - T_{lew}^{B} = 0 \tag{7.47}$$
$$T_{pr}^{A} = T_{lew}^{B} = +0,66072qa \tag{7.48}$$

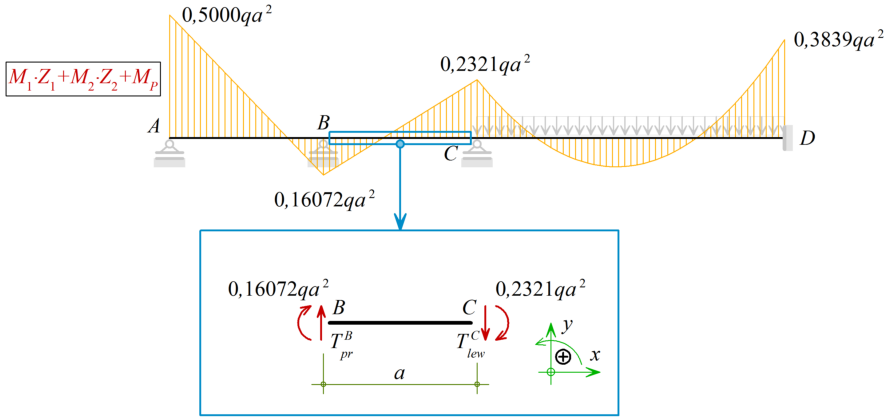
Przęsło BC (patrz rysunek 76):

$$\sum (M_i^B) = 0, \qquad -T_{lew}^{C} a - 0.16072qa^2 - 0.2321qa^2 = 0 \tag{7.49}$$
$$T_{lew}^{C} = -0.3928qa$$

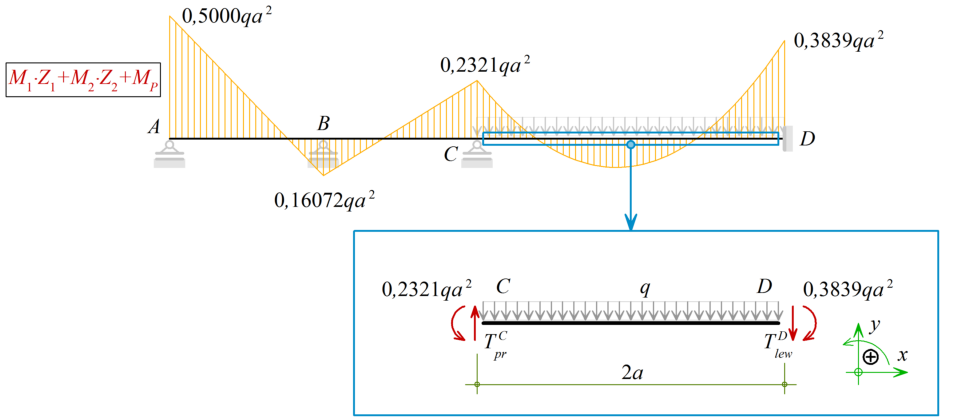
$$\sum (P_{iy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{pr}^{B} - T_{lew}^{C} = 0 \tag{7.50}$$
$$T_{pr}^{B} = T_{lew}^{C} = 0,66072qa \tag{7.51}$$

Przęsło CD (patrz rysunek 77):

$$\sum (M_i^C) = 0, \qquad -T_{lew}^{D}(2a) + 0.2321qa^2 - (2aq) \cdot a - 0.3839qa^2 = 0 \tag{7.52}$$
$$T_{lew}^{D} = -1.0759qa$$



Rys. 76 Wyznaczanie sił tnących w przedziale BC

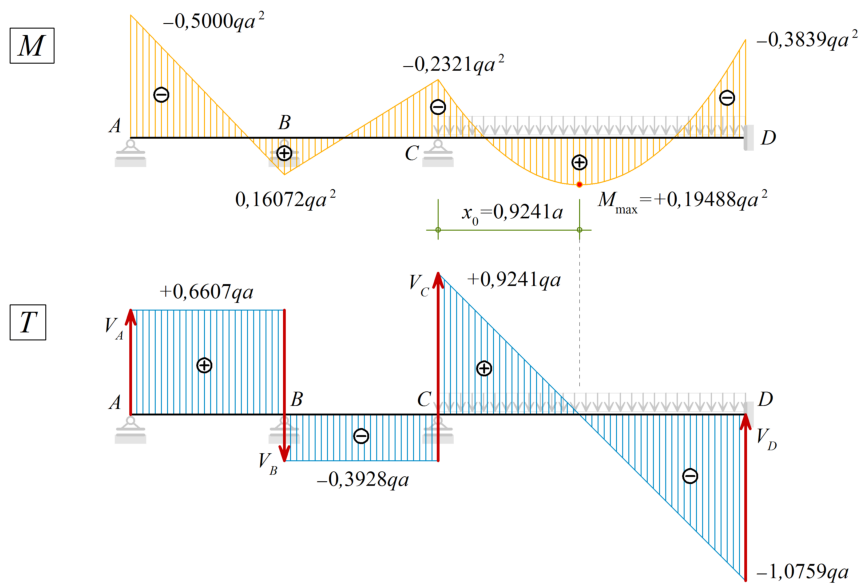


Rys. 77 Wyznaczanie sił tnących w przedziale CD

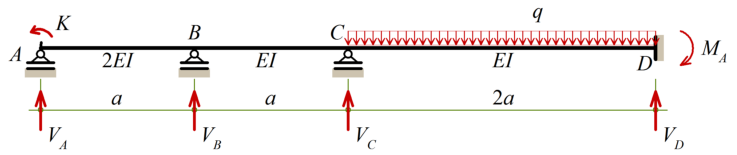
$$\sum(P_{iy}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T^C_{pr} - q \cdot 2a - T^D_{lew} = 0 \tag{7.53}$$

$$T^C_{pr} = 2qa + T^C_{lew} = +0,9241qa \tag{7.54}$$

Końcowe wykresy pokazano na rysunku 78 (wykres narysowano również w obszarze wspornika). Na podstawie wykresów obliczamy wartości reakcji, które pokazano na rysunku 66.



Rys. 78 Wykresy końcowe sił wewnętrznych



Rys. 79 Reakcje podporowe

$$V_A = 0.6607qa \tag{7.55}$$

$$V_B = -(0.6607qa + 0.3928qa) = -1.0585qa \tag{7.56}$$

$$V_C = +(0.3928qa + 0.9241qa) = +1.3169qa \tag{7.57}$$

$$V_D = +1.0759qa \tag{7.58}$$

$$M_D = |-0.3839qa^2| = +0.3839qa^2 \tag{7.59}$$

7.4.3 Sprawdzenie wykresów sił wewnętrznych

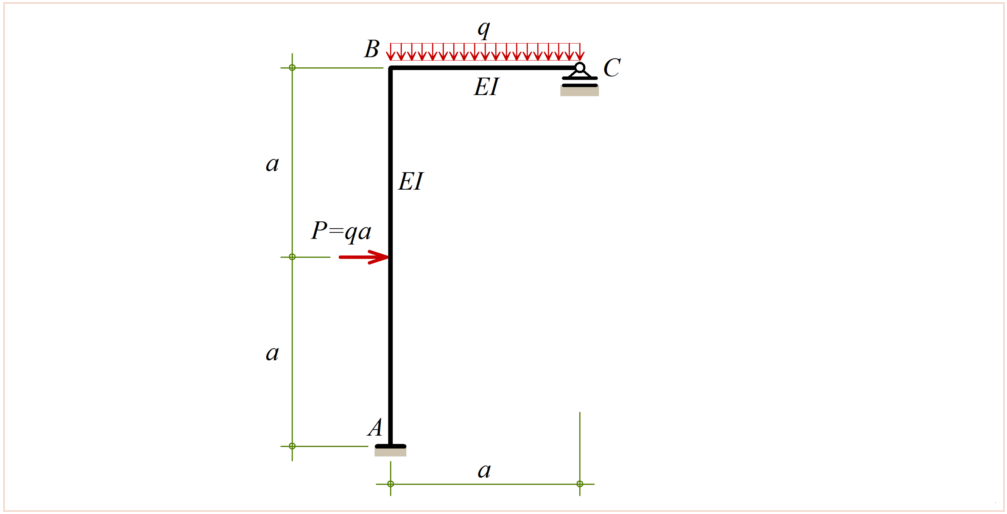
Sprawdzenie wykresu momentów zginających możemy wykonać poprzez sprawdzenie jakiegoś warunku równowagi np. $\sum(M^B_i)$.

$$\sum(M_i^B) = -M_D + V_D \cdot 3a - 2qa(a + \frac{2a}{2}) + V_C \cdot a - V_A \cdot 1a + K =$$
$$= -(+0.3839qa^2) + 1.0759qa \cdot 3a - 4qa^2 +$$
$$+ (+1.3169qa) \cdot a - (+0.6607qa) \cdot a + 0.500qa^2 =$$
$$= (-0.3839 + 3.2277 - 4.0000 + 1.3169 - 0.6607 + 0.5000)\, qa =$$
$$= 0.0000qa^2 \ \checkmark \qquad (7.60)$$

8 Przykłady: układy ramowe

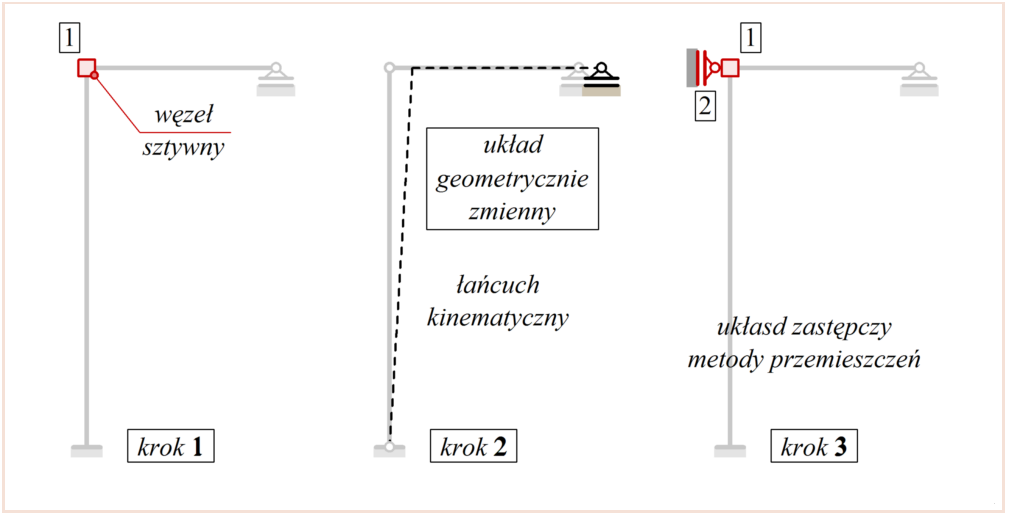
8.1 Przykład RB1 - rama o węzłach przesuwnych

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a.

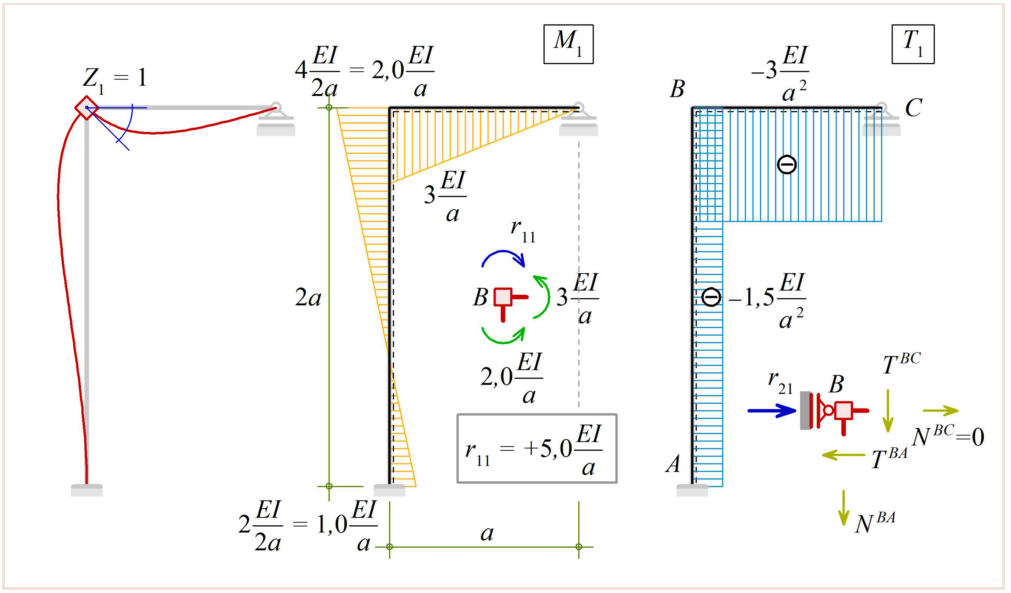


Rys. 80 Schemat statyczny

Na rysunku **??** pokazano układ zastępczy $\mathcal{MP}$.



Rys. 81 Układ zastępczy $\mathcal{MP}$



Rys. 82 Wykres momentów oraz sił tnących dla $Z_1 = 1$

8.1.1 Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$

Etap 1: wyznaczenie współczynników r_{ij}**.** Na rysunkach 82 (strona 33), oraz 83 (strona 34) przedstawiono odkształcone osie prętów oraz wykresy momentów i sił tną-

cych.

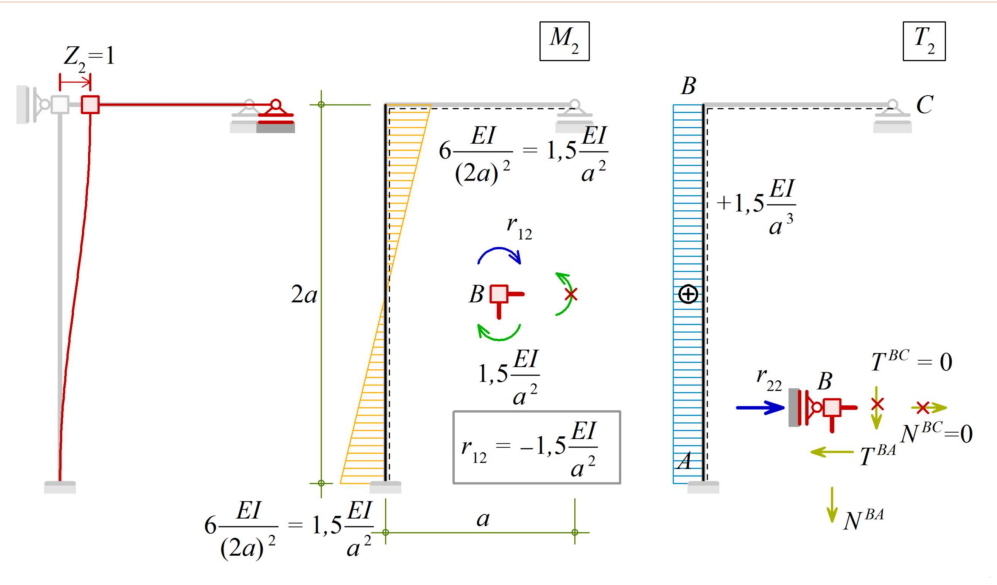
Wyznaczenie współczynników r_{11}, r_{21} (rys. 82):

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{11} + 3\frac{EI}{a} + 2,0\frac{EI}{a} = 0 \tag{8.1}$$

$$r_{11} = 5,0\frac{EI}{a} \tag{8.2}$$

$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{21} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.3}$$

$$r_{21} = T^{BA} = -1,5\frac{EI}{a^2} \tag{8.4}$$



Rys. 83 Wykres momentów oraz sił tnących dla $Z_2 = 1$

Wyznaczenie współczynników r_{12}, r_{22} (rys. 83):

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{12} - 1,5\frac{EI}{a^2} = 0 \tag{8.5}$$

$$r_{11} = -1,5\frac{EI}{a^2} \tag{8.6}$$

$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{22} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.7}$$

$$r_{22} = T^{BA} = +1,5\frac{EI}{a^3} \tag{8.8}$$

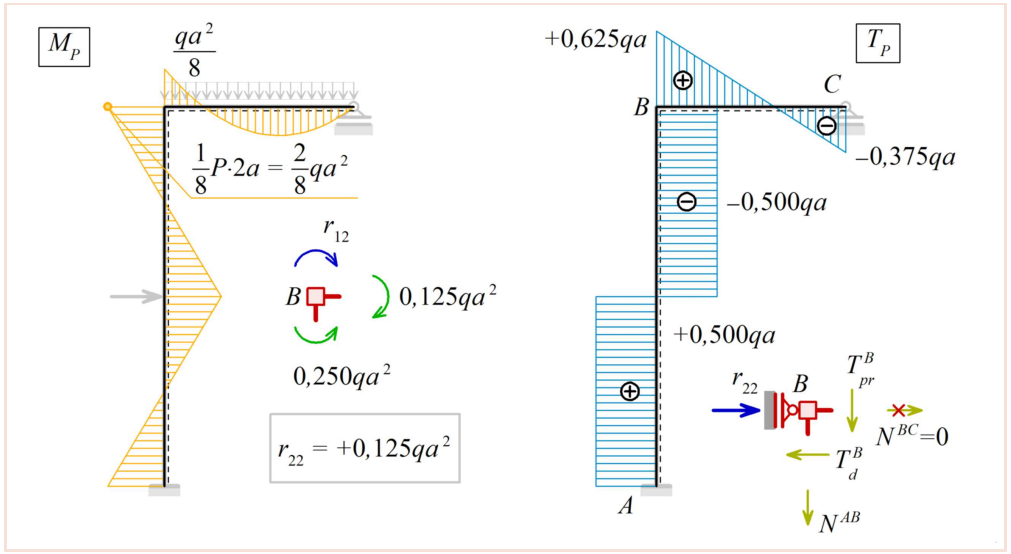
Wyznaczenie współczynników r_{1P}, r_{2P} (rys. 84):

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{1P} - 0.125qa^2 + 0.250qa^2 = 0 \tag{8.9}$$

$$r_{1P} = +0,125qa^2 \tag{8.10}$$

$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{2P} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.11}$$

$$r_{2P} = T^{BA} = -0,500qa \tag{8.12}$$



Rys. 84 Wykres momentów oraz sił tnących dla obciążenia zewnętrznego

Etap 2: równanie metody przemieszczeń

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0 \tag{8.13}$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0 \tag{8.14}$$

Pełne równanie:

$$5\frac{EI}{a}Z_1 - 1,5\frac{EI}{a^2}Z_2 + 0,125qa^2 = 0 \tag{8.15}$$

$$-1,5\frac{EI}{a^2}Z_1 + 1,5\frac{EI}{a^3}Z_2 - 0,5qa = 0 \tag{8.16}$$

Rozwiązanie:

$$Z_1 = 0,1071\frac{qa^3}{EI}, \qquad Z_2 = 0.4405\frac{qa^4}{EI} \tag{8.17}$$

8.1.2 Wykresy sił wewnętrznych: momenty zginające

8.1.3 Wyznaczenie sił tnących

Siły tnące : odcinek BC

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -T^{CB}a - qa\frac{a}{2} - 0.1968qa^2 = 0 \tag{8.18}$$

$$T^{CB} = -0,6968qa \tag{8.19}$$

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad +T^{BC} - qa - T^{CB} = 0 \tag{8.20}$$

$$T^{CB} = 0,3032qa \tag{8.21}$$

odległość x_0 (miejsce zerowe sił tnących):

$$q \cdot x_0 + T^{CB} = 0, \qquad x_0 = \frac{-T^{CB}}{a} = 0,6968a \tag{8.22}$$

Moment maksymalny $M_{\max}$:

$$M_{\max} = \left|\frac{1}{2}x_0 T^{CB}\right| = 0,2428qa^2 \tag{8.23}$$

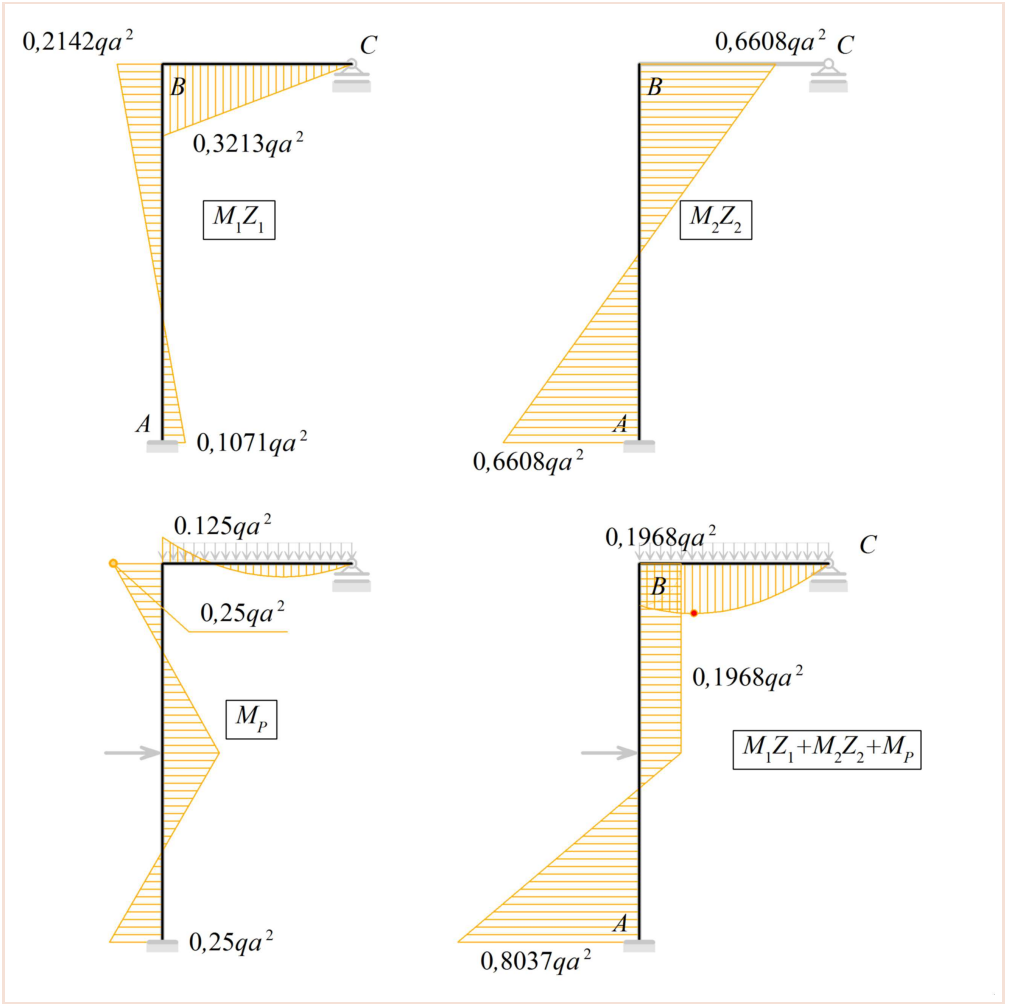
Siły tnące : odcinek AB

$$\sum M_i^A = 0, \qquad -T^{BA} \cdot 2a - qa \cdot a + 0,1968qa^2 + 0,8037qa^2 = 0 \tag{8.24}$$

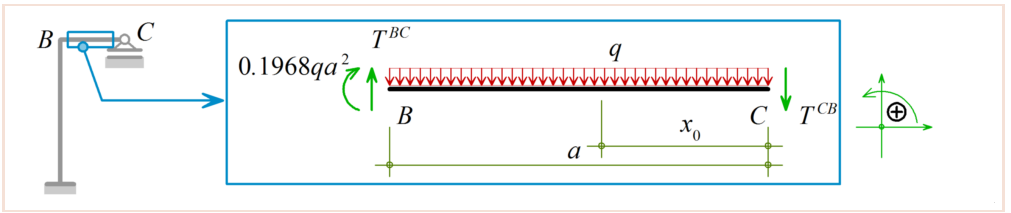
$$T^{BA} = +0.000qa \tag{8.25}$$

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad +T^{BA} + qa - T^{AB} = 0 \tag{8.26}$$

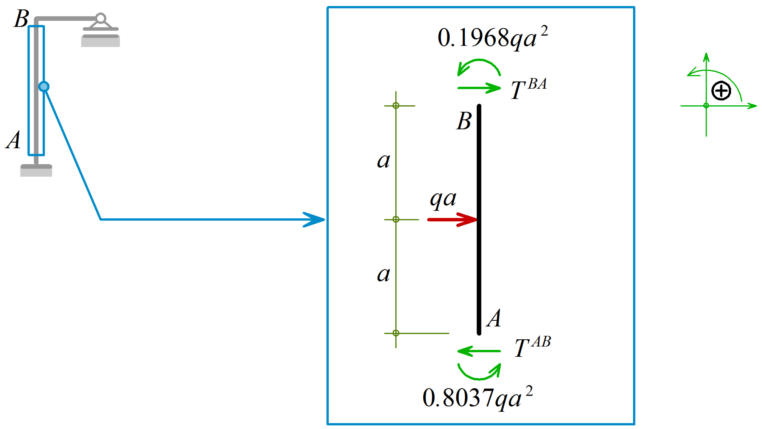
$$T^{AB} = 1.000qa \tag{8.27}$$



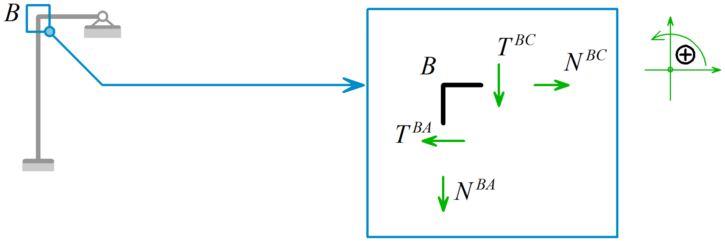
Rys. 85 Wstępny wykres momentów $M = M_1 \circ Z_1 + M_2 \circ Z_2 + M_P$



Rys. 86 Siły tnące: pręt BC



Rys. 87 Siły tnące: pręt AB



Rys. 88 Siły osiowe: równowaga węzła B

8.1.4 Wyznaczenie sił osiowych

Równowaga węzła B

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad -T^{BA} + N^{BC} = 0 \tag{8.28}$$

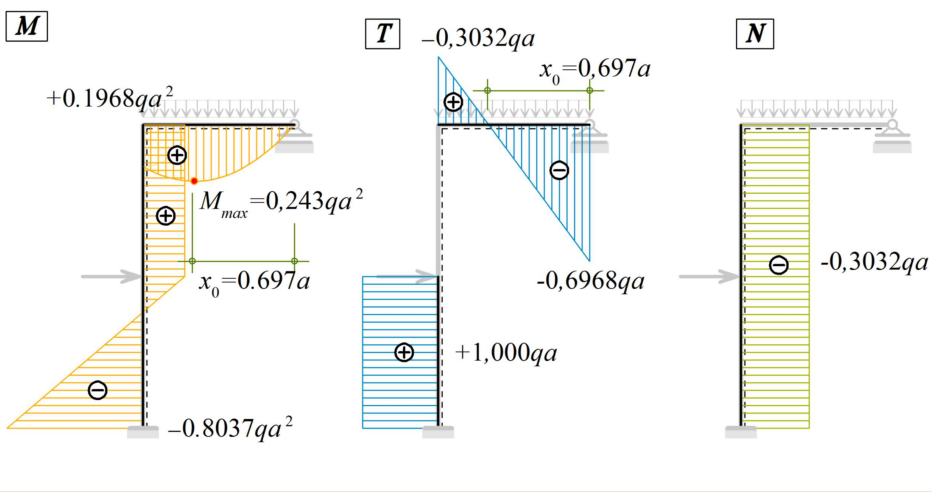
$$N^{BC} = T^{BA} = +0.000qa \tag{8.29}$$

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad -T^{BC} - N^{BA} = 0 \tag{8.30}$$

$$N^{BA} = -T^{BC} = -0.3037qa \tag{8.31}$$

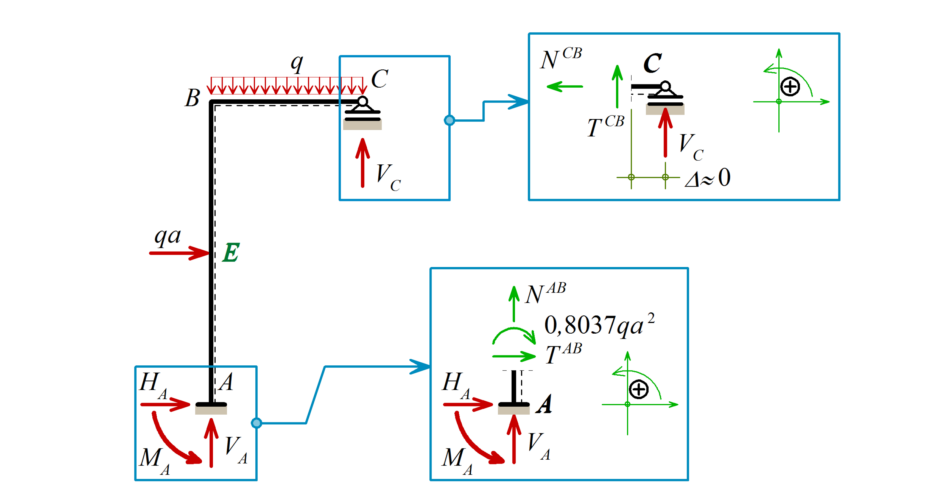
8.1.5 Wykresy sił wewnętrznych

Na rysunku 89 na stronie 36 przedstawiono końcowe wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 89 Wykres sił wewnętrznych: momenty oraz siły tnące

8.1.6 Obliczenie wartości reakcji podporowych



Rys. 90 Reakcje podporowe

Podpora w punkcie A

$$\sum M_i^A = 0, \qquad M_A - 0,8037qa^2 = 0 \tag{8.32}$$

$$M_A = 0,8037qa^2 \tag{8.33}$$

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad H_A + T^{AB} = 0 \tag{8.34}$$

$$H_A = -T^{AB} = -1,000qa \tag{8.35}$$

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad V_A + N^{AB} = 0 \tag{8.36}$$

$$V_A = -N^{AB} = +0,3032qa \tag{8.37}$$

Podpora w punkcie C

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad V_C + T^{CB} = 0 \tag{8.38}$$

$$V_C = -T^{CB} = +0,6968qa \tag{8.39}$$

8.1.7 Sprawdzenie globalnych warunków równowagi

Sprawdzenie warunku $\sum P_{ix} = 0$

$$\sum P_{ix} = H_A + qa = -1.000qa + qa = 0.0000qa \ \checkmark \tag{8.40}$$

Sprawdzenie warunku $\sum P_{iy} = 0$

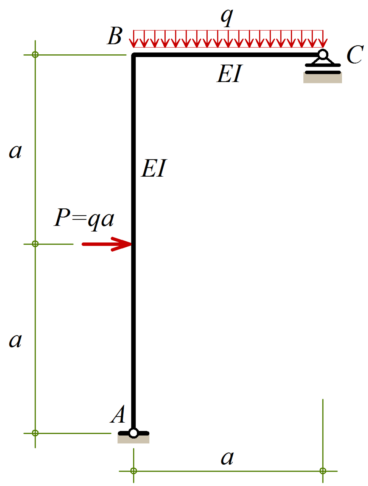
$$\sum P_{iy} = V_A - qa + V_C = +0.3032qa - qa + 0,6968qa = 0.0000qa \ \checkmark \tag{8.41}$$

Sprawdzenie warunku $\sum M_i^B = 0$

$$\begin{aligned}\sum M_i^B &= M_A + H_A \cdot 2a + qa \cdot a - qa\frac{a}{2} + V_C \cdot a = \\ &= 0,8037qa^2 - 2qa^2 + qa^2 - 0,5000qa^2 + 0,6968qa^2 = \\ &= 0.0005qa^2 \approx 0 \cdot qa^2 \ \checkmark\end{aligned} \tag{8.42}$$

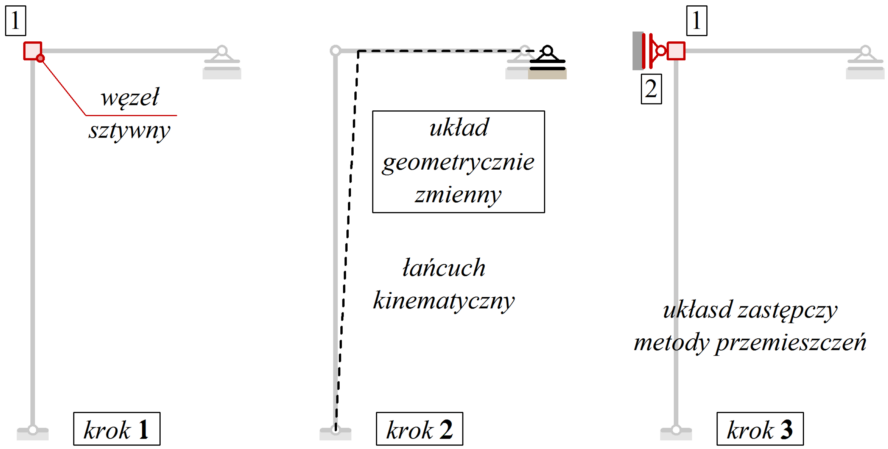
8.2 Przykład RB2 - rama o węzłach przesuwnych

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: EI, q, a.



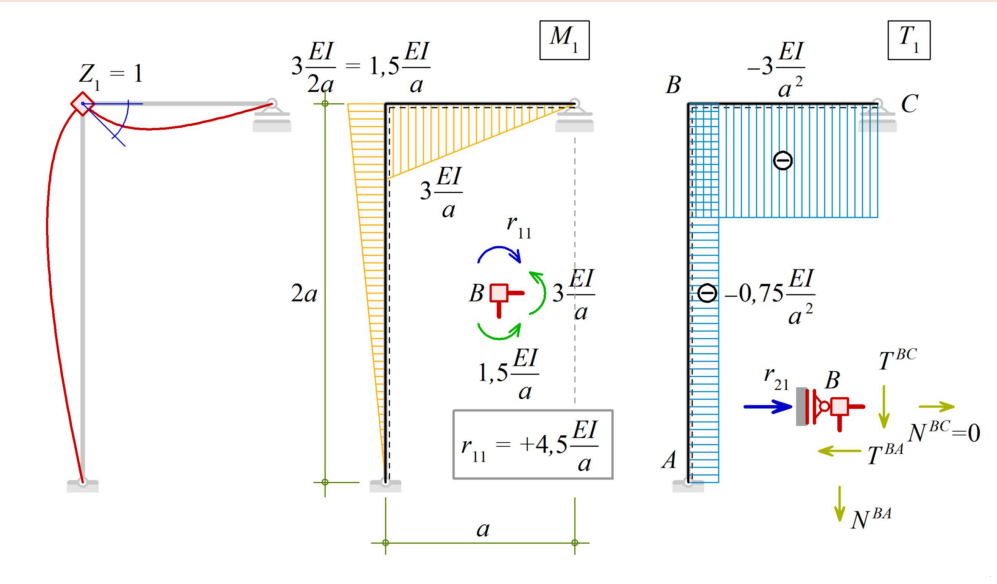
Rys. 91 Schemat statyczny

Na rysunku **??** pokazano układ zastępczy $\mathcal{MP}$.



Rys. 92 Układ zastępczy $\mathcal{MP}$

8.2.1 Równanie kanoniczne $\mathcal{MP}$



Rys. 93 Wykres momentów oraz sił tnących dla $Z_1 = 1$

Etap 1: wyznaczenie współczynników r_{ij}**.** Na rysunkach 93 (strona 38), oraz 94 (strona 38) przedstawiono odkształcone osie prętów oraz wykresy momentów i sił tnących.

Wyznaczenie współczynników r_{11}, r_{21} *(rys. 93)*:

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{11} + 3\frac{EI}{a} + 1,5\frac{EI}{a} = 0 \tag{8.43}$$

$$r_{11} = 4,5\frac{EI}{a} \tag{8.44}$$

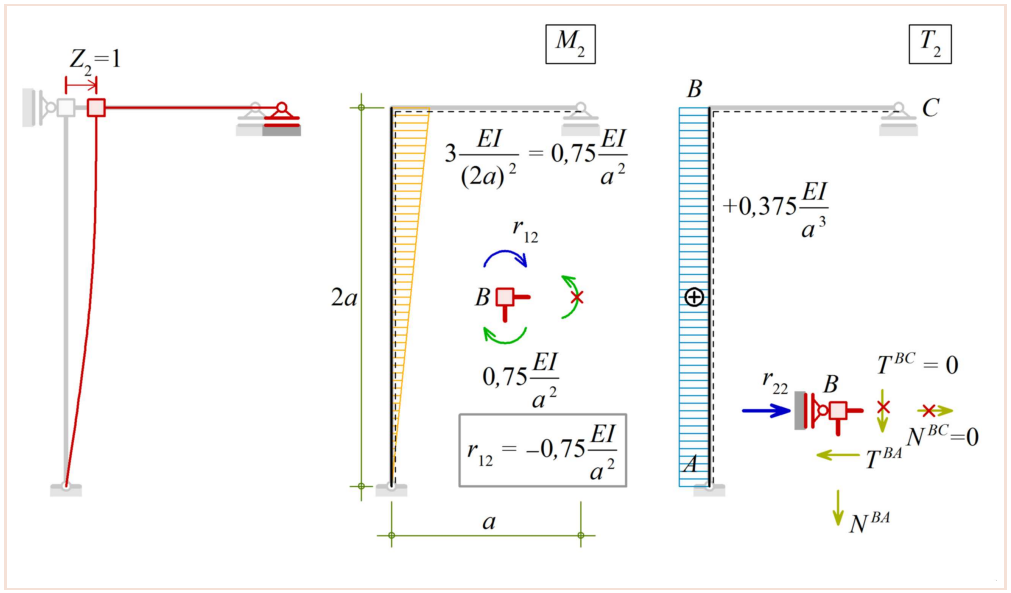
$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{21} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.45}$$

$$r_{21} = T^{BA} = -0,75\frac{EI}{a^2} \tag{8.46}$$

Wyznaczenie współczynników r_{12}, r_{22} *(rys. 94)*:

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{12} - 0,75\frac{EI}{a^2} = 0 \tag{8.47}$$

$$r_{11} = -0,75\frac{EI}{a^2} \tag{8.48}$$



Rys. 94 Wykres momentów oraz sił tnących dla $Z_2 = 1$

$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{22} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.49}$$

$$r_{22} = T^{BA} = +0,375\frac{EI}{a^3} \tag{8.50}$$

Wyznaczenie współczynników r_{1P}, r_{2P} *(rys. 95)*:

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -r_{1P} - 0.125qa^2 + 0.375qa^2 = 0 \tag{8.51}$$

$$r_{1P} = +0,25qa^2 \tag{8.52}$$

$$\sum P_{ix}^B = 0, \qquad +r_{2P} + \underbrace{N^{BC}}_{=0} - T^{BA} = 0 \tag{8.53}$$

$$r_{2P} = T^{BA} = -0,6875qa\frac{EI}{a^2} \tag{8.54}$$

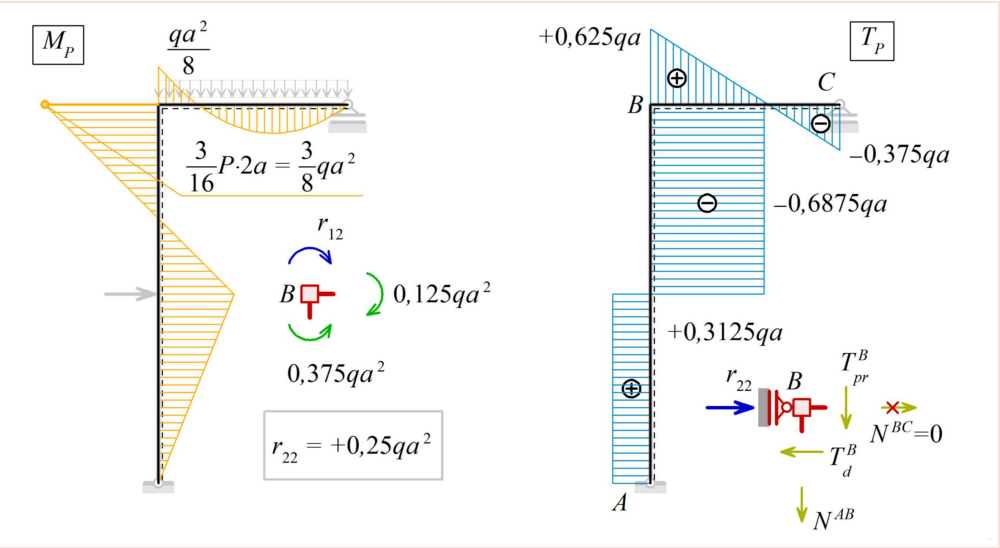
Etap 2: równanie metody przemieszczeń Zapis wskaźnikowy:

$$r_{ij}Z_j + r_{iP} = 0 \tag{8.55}$$

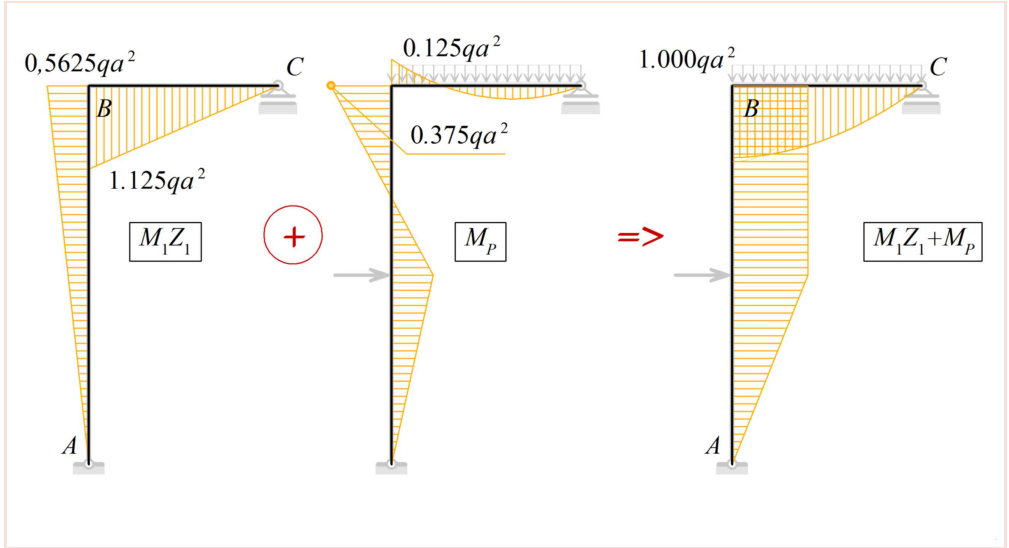
Zapis tradycyjny:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0 \tag{8.56}$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0 \tag{8.57}$$



Rys. 95 Wykres momentów oraz sił tnących dla obciążenia zewnętrznego



Rys. 96 Wstępny wykres momentów $M = M_1 \circ Z_1 + M_P$

Pełne równanie:

$$4,5\frac{EI}{a}Z_1 - 0,75\frac{EI}{a^2}Z_2 + 0,25qa^2 = 0 \tag{8.58}$$

$$-0,75\frac{EI}{a^2}Z_1 + 0,375\frac{EI}{a^3}Z_2 - 0,6875qa = 0 \tag{8.59}$$

Rozwiązanie:

$$Z_1 = 0,375\frac{qa^3}{EI}, \qquad Z_2 = 2,583\frac{qa^4}{EI} \tag{8.60}$$

8.2.2 Wykresy sił wewnętrznych: momenty zginające

8.2.3 Wyznaczenie sił tnących

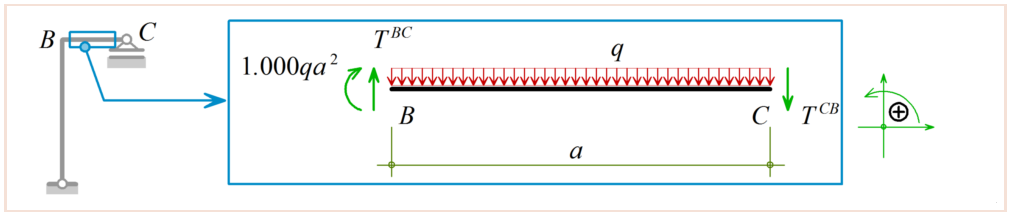
Siły tnące : odcinek BC

$$\sum M_i^B = 0, \qquad -T^{CB}a - qa\frac{a}{2} - 1.000qa^2 = 0 \tag{8.61}$$

$$T^{CB} = -1.500qa \tag{8.62}$$

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad +T^{BC} - qa - T^{CB} = 0 \tag{8.63}$$

$$T^{BA} = -0.500qa \tag{8.64}$$



Rys. 97 Siły tnące: pręt BC

Siły tnące : odcinek AB

$$\sum M_i^A = 0, \qquad -T^{BA}\cdot 2a - qa\cdot a + 1.000qa^2 = 0 \tag{8.65}$$

$$T^{BA} = +0.000qa \tag{8.66}$$

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad +T^{BA} + qa - T^{AB} = 0 \tag{8.67}$$

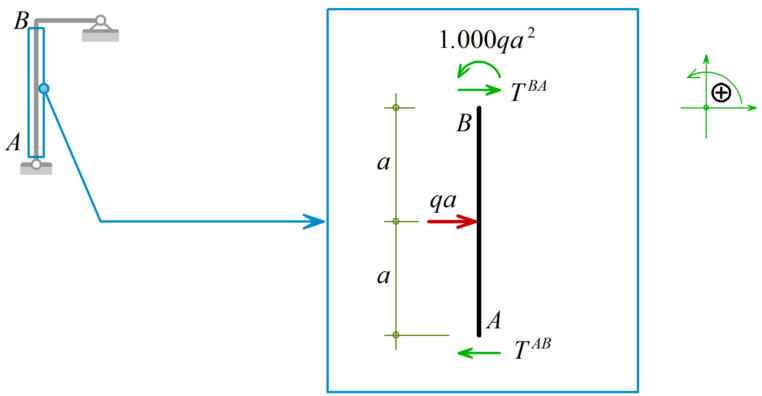
$$T^{AB} = 1.000qa \tag{8.68}$$

8.2.4 Wyznaczenie sił osiowych

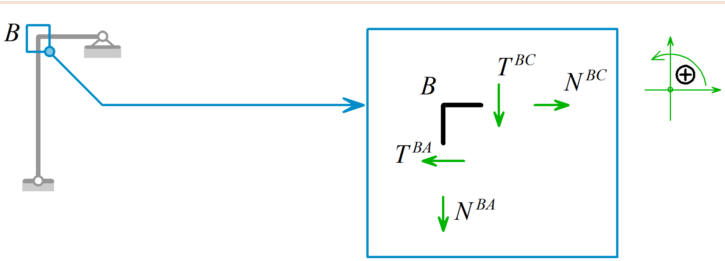
Równowaga węzła B

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad -T^{BA} + N^{BC} = 0 \tag{8.69}$$

$$N^{BC} = T^{BA} = +0.000qa \tag{8.70}$$



Rys. 98 Siły tnące: pręt AB



Rys. 99 Siły osiowe: równowaga węzła B

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad -T^{BC} - N^{BA} = 0 \tag{8.71}$$

$$N^{BA} = -T^{BC} = +0.500qa \tag{8.72}$$

8.2.5 Wykresy sił wewnętrznych

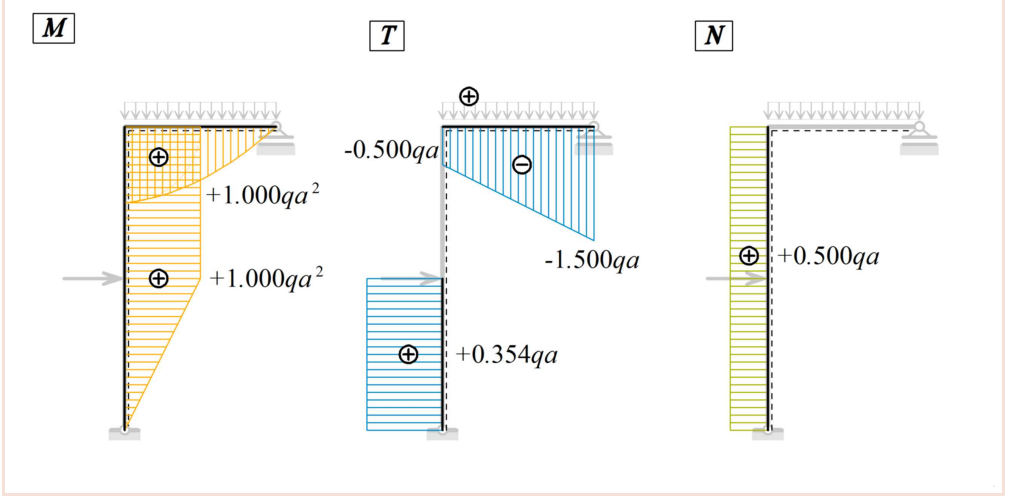
Na rysunku 100 na stronie 40 przedstawiono końcowe wykresy sił wewnętrznych.

8.2.6 Obliczenie wartości reakcji podporowych

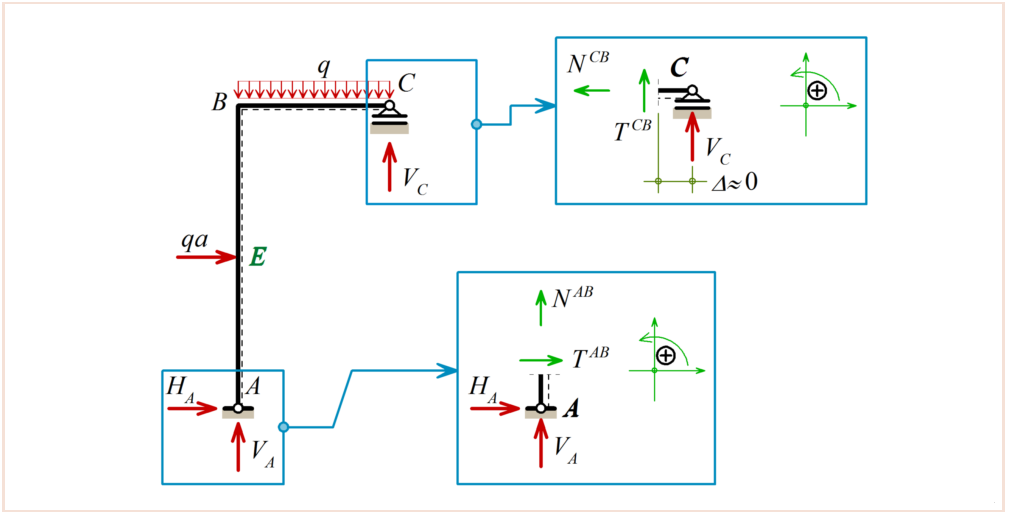
Podpora w punkcie A

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad H_A + T^{AB} = 0 \tag{8.73}$$

$$H_A = -T^{AB} = -1.000qa \tag{8.74}$$



Rys. 100 Wykres sił wewnętrznych: momenty oraz siły tnące



Rys. 101 Reakcje podporowe

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad V_A + N^{AB} = 0 \tag{8.75}$$

$$V_A = -N^{AB} = -0.500qa \tag{8.76}$$

Podpora w punkcie B

$$\sum P_{ix} = 0, \qquad -N^{BC} = 0 \tag{8.77}$$

$$H_C = +0.000qa \tag{8.78}$$

$$\sum P_{iy} = 0, \qquad V_C + T^{CB} = 0 \tag{8.79}$$

$$V_C = -T^{CB} = +1.500qa \tag{8.80}$$

8.2.7 Sprawdzenie globalnych warunków równowagi

Sprawdzenie warunku $\sum P_{ix} = 0$

$$\sum P_{ix} = H_A + qa = -1.000qa + qaqa = 0.0000qa \ \checkmark \tag{8.81}$$

Sprawdzenie warunku $\sum P_{iy} = 0$

$$\sum P_{iy} = V_A - qa + V_C = -0.500qa - qa + 1.500qa = 0.0000qa \ \checkmark \tag{8.82}$$

Sprawdzenie warunku $\sum M_i^E = 0$

$$\begin{aligned} \sum M_i^E &= +H_A \cdot a - qa\frac{a}{2} + V_C \cdot a = \\ &= (-1.000qa^2) - 0.500qa^2 + 1.500qa^2 = \\ &= 0.000qa^2 \approx 0 \cdot qa^2 \ \checkmark \end{aligned} \tag{8.83}$$

UWAGA: *określić stopień statycznej niewyznaczalności układu!!! (patrz schemat zadania na stronie 37.*

Część IV

Płaskie układy przestrzennie obciążone

9 Analiza kinematyczna

9.1 Analiza kinematyczna - wprowadzenie

9.1.1 Wprowadzenia

Warunek konieczny statycznej wyznaczalności :

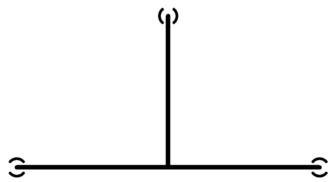
$$\mathfrak{L}_{sw} = 3 \cdot E_N - 2 \cdot P_w - 1 \cdot P_k - 1 \cdot R = 0 \tag{9.1}$$

$\mathfrak{L}_{sw}$ - liczba stopni swobody układu,
E_N - liczba elementów płaskich prętowych,
P_w - liczba przegubów walcowych (tzw. zawiasy),
P_k - liczba przegubów kulistych,
R - liczba reakcji podporowych.

9.2 Analiza kinematyczna - zadania

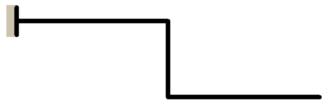
9.2.1 Przykład 3D-AK1: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



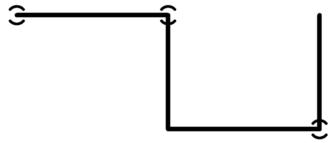
9.2.2 Przykład 3D-AK2: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



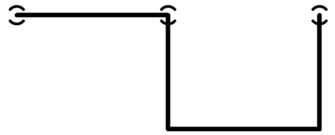
9.2.3 Przykład 3D-AK3: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



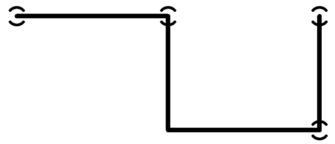
9.2.4 Przykład 3D-AK4: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



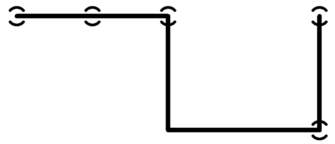
9.2.5 Przykład 3D-AK5: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



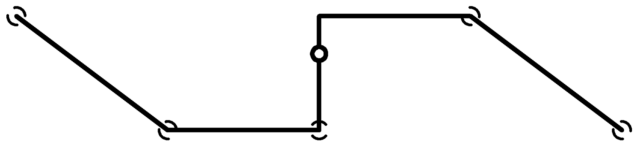
9.2.6 Przykład 3D-AK6: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



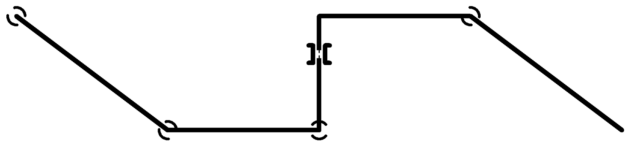
9.2.7 Przykład 3D-AK7: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



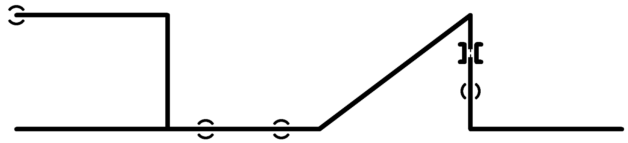
9.2.8 Przykład 3D-AK8: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



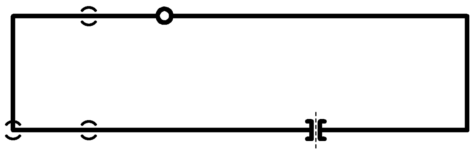
9.2.9 Przykład 3D-AK9: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



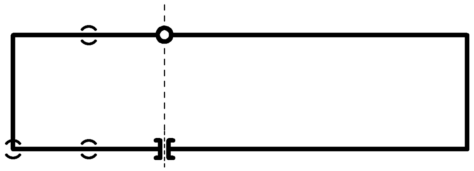
9.2.10 Przykład 3D-AK10: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



9.2.11 Przykład 3D-AK11: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.

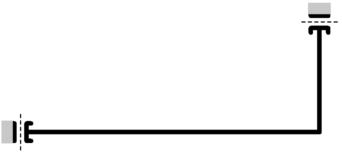


9.2.12 Przykład 3D-AK12: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.

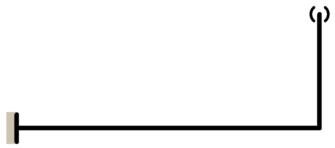
9.2.13 Przykład 3D-AK13: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



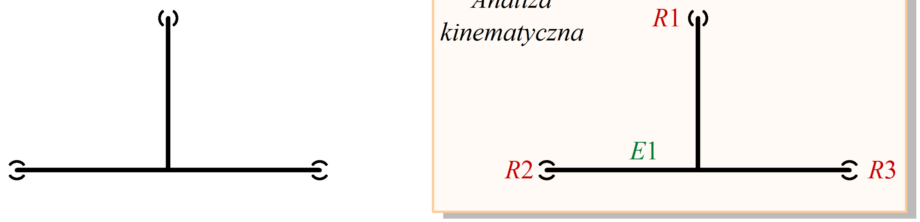
9.2.14 Przykład 3D-AK14: treść zadania

Dla zadanego układu należy przeprowadzić analizę kinematyczną.



9.3 Rozwiązania

9.3.1 Przykład 3D-AK1: rozwiązanie

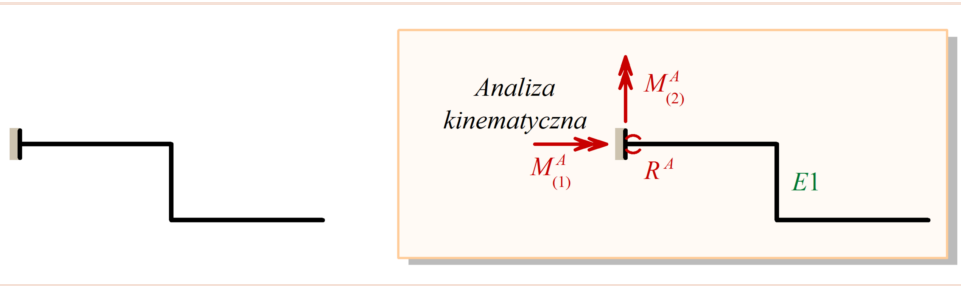


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 3}_{R1,R2,R3} = 0 \quad \surd \tag{9.2}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.2 Przykład 3D-AK2: rozwiązanie

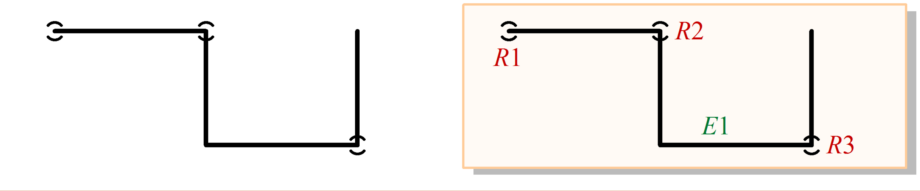


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 3}_{M^A_{(1)},M^A_{(2)},R^A} = 0 \quad \surd \tag{9.3}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.3 Przykład 3D-AK3: rozwiązanie

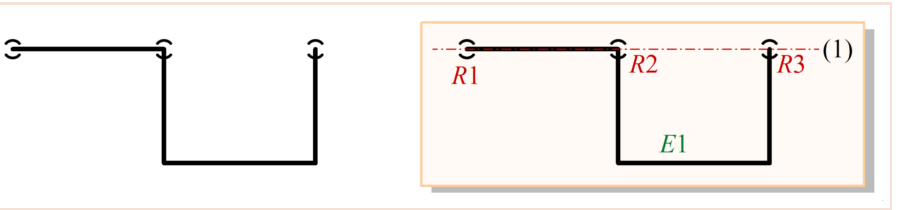


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 3}_{R1,R2,R3} = 0 \quad \surd \tag{9.4}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.4 Przykład 3D-AK4: rozwiązanie

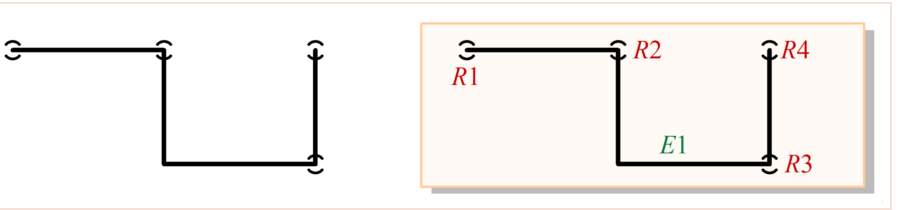


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 3}_{R1,R2,R3} = 0 \quad \surd \tag{9.5}$$

Odp.: Układ geometrycznie zmienny (**GZ**). *Wszystkie podpory leżą na jednej osi (1) - możliwy obrót względem niej.*

9.3.5 Przykład 3D-AK5: rozwiązanie

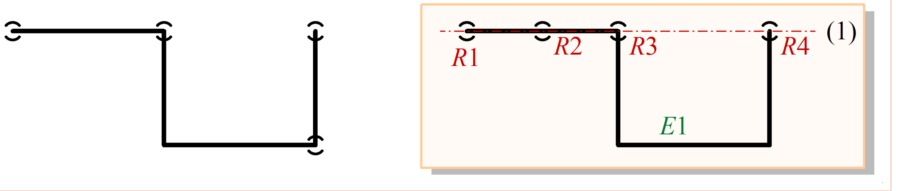


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 4}_{R1,R2,R3,R4} = -1 < 0 \quad ! \tag{9.6}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie niewyznaczalny (1× **SN**).

9.3.6 Przykład 3D-AK6: rozwiązanie

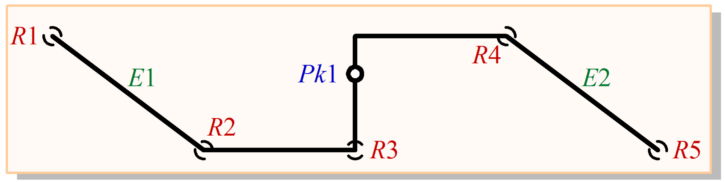


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 1}_{E1} - \underbrace{1 \cdot 4}_{R1,R2,R3,R4} = -1 < 0 \quad ! \tag{9.7}$$

Odp.: Układ geometrycznie zmienny (**GZ**). *Wszystkie podpory leżą na jednej osi (1) - możliwy obrót względem niej.*

9.3.7 Przykład 3D-AK7: rozwiązanie

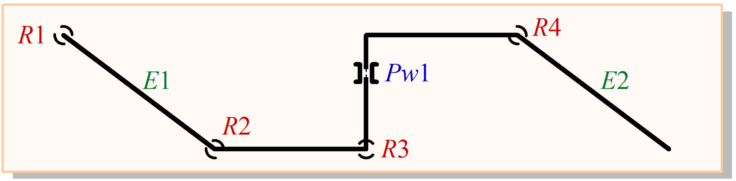


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 2}_{E1,E2} - \underbrace{1 \cdot 1}_{Pk1} - \underbrace{1 \cdot 5}_{R1,R2,R3,R4,R5} = 0 \quad \surd \tag{9.8}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.8 Przykład 3D-AK8: rozwiązanie

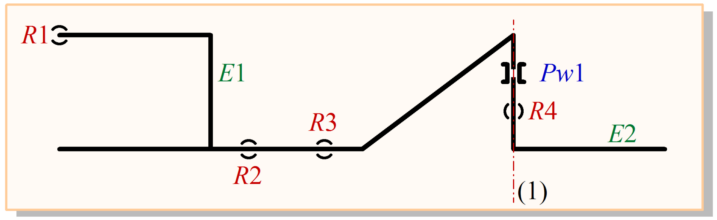


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 2}_{E1,E2} - \underbrace{2 \cdot 1}_{Pw1} - \underbrace{1 \cdot 4}_{R1,R2,R3,R4} = 0 \quad \surd \tag{9.9}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.9 Przykład 3D-AK9: rozwiązanie

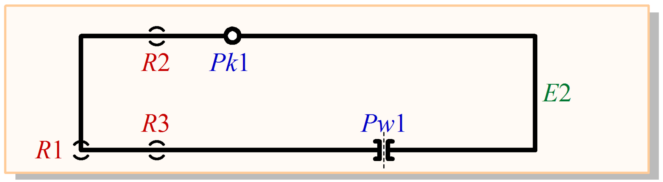


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 2}_{E1,E2} - \underbrace{2 \cdot 1}_{Pw1} - \underbrace{1 \cdot 4}_{R1,R2,R3,R4} = 0 \quad \surd \tag{9.10}$$

Odp.: Układ geometrycznie zmienny (**GZ**). *Podpora R4 leży na osi (1) przegubu walcowego Pw1 - możliwy obrót elementu E2 względem osi (1).*

9.3.10 Przykład 3D-AK10: rozwiązanie

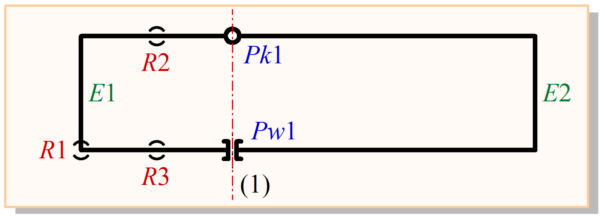


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3 \cdot 2}_{E1,E2} - \underbrace{2 \cdot 1}_{Pw1} - \underbrace{1 \cdot 1}_{Pk1} - \underbrace{1 \cdot 3}_{R1,R2,R3} = 0 \quad \surd \tag{9.11}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie wyznaczalny (SW).

9.3.11 Przykład 3D-AK11: rozwiązanie

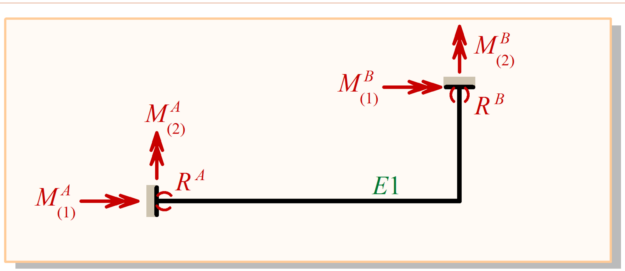


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3\cdot 2}_{E1,E2} - \underbrace{2\cdot 1}_{Pw1} - \underbrace{1\cdot 1}_{Pk1} - \underbrace{1\cdot 3}_{R1,R2,R3} = 0 \quad \surd \tag{9.12}$$

Odp.: Układ geometrycznie zmienny (**GZ**). *Przegub Pk1 leży na osi (1) przegubu walcowego Pw1 - możliwy obrót elementu E2 względem osi (1).*

9.3.12 Przykład 3D-AK12: rozwiązanie

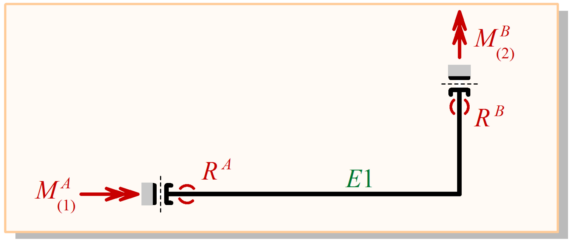


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3\cdot 1}_{E1} - \underbrace{1\cdot 6}_{\substack{M^A_{(1)}, M^A_{(2)}, R^A \\ M^B_{(1)}, M^B_{(2)}, R^B}} = -3 < 0 \quad \mathbf{!} \tag{9.13}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie niewyznaczalny (3× **SN**).

9.3.13 Przykład 3D-AK13: rozwiązanie

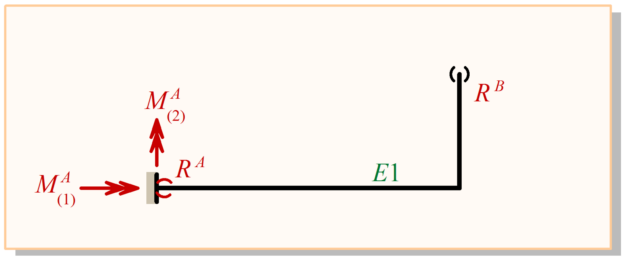


Warunek konieczny:

$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3\cdot 1}_{E1} - \underbrace{1\cdot 4}_{\substack{M^A_{(1)}, R^A \\ M^B_{(2)}, R^B}} = -1 < 0 \quad \mathbf{!} \tag{9.14}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie niewyznaczalny (1× **SN**).

9.3.14 Przykład 3D-AK14: rozwiązanie



Warunek konieczny:

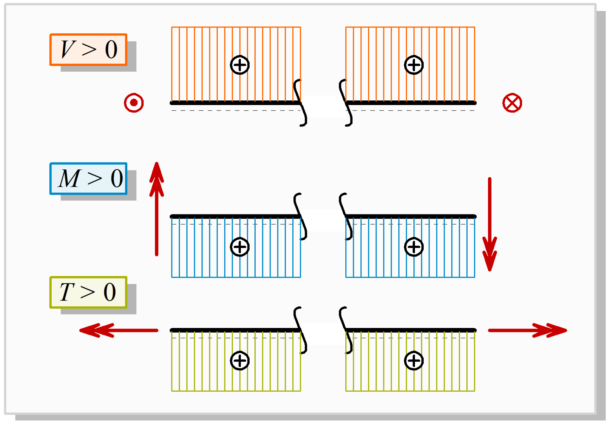
$$\mathfrak{L}_{sw} = \underbrace{3\cdot 1}_{E1} - \underbrace{1\cdot 4}_{\substack{M^A_{(1)}, M^A_{(2)}, R^A \\ R^B}} = -1 < 0 \quad \mathbf{!} \tag{9.15}$$

Odp.: Układ geometrycznie niezmienny (GN), statycznie niewyznaczalny (1× **SN**).

10 Układy otwarte

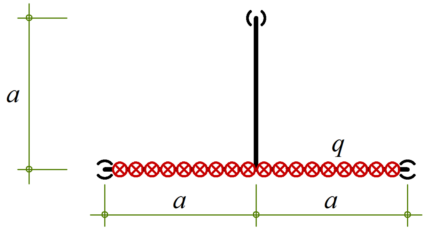
10.1 Przykłady

Przyjęto następujące znakowanie:



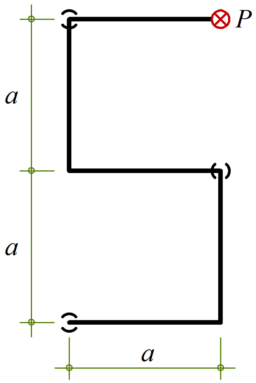
10.1.1 Przykład 3D-O1: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a.



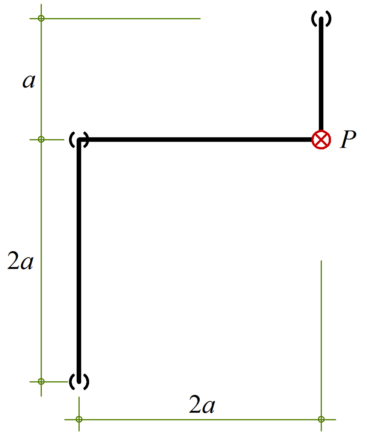
10.1.2 Przykład 3D-O2: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



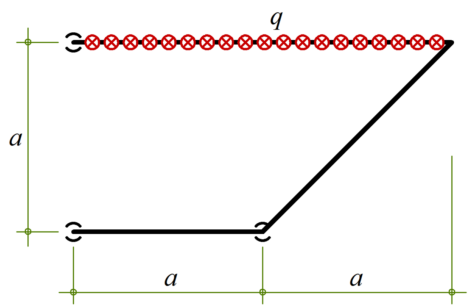
10.1.3 Przykład 3D-O3: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



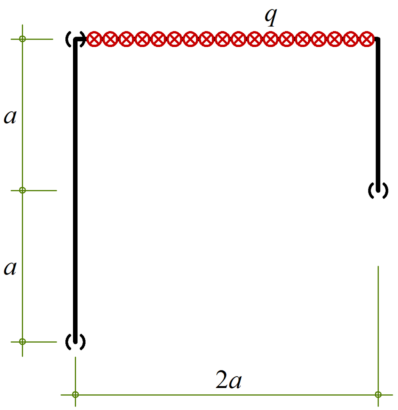
10.1.4 Przykład 3D-O4: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a.



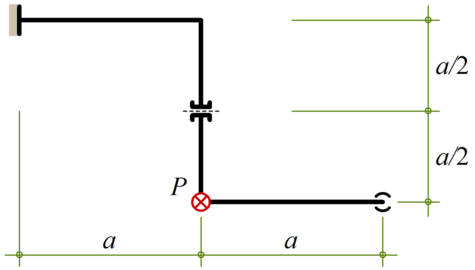
10.1.5 Przykład 3D-O5: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: q, a.



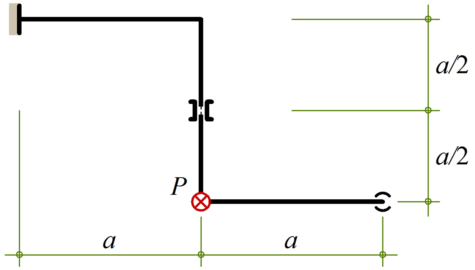
10.1.6 Przykład 3D-O6: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



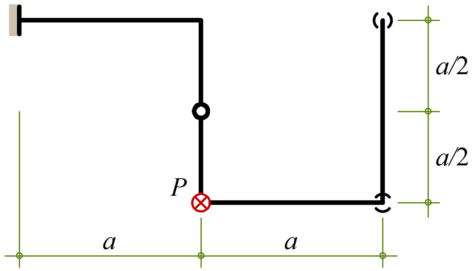
10.1.7 Przykład 3D-O7: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



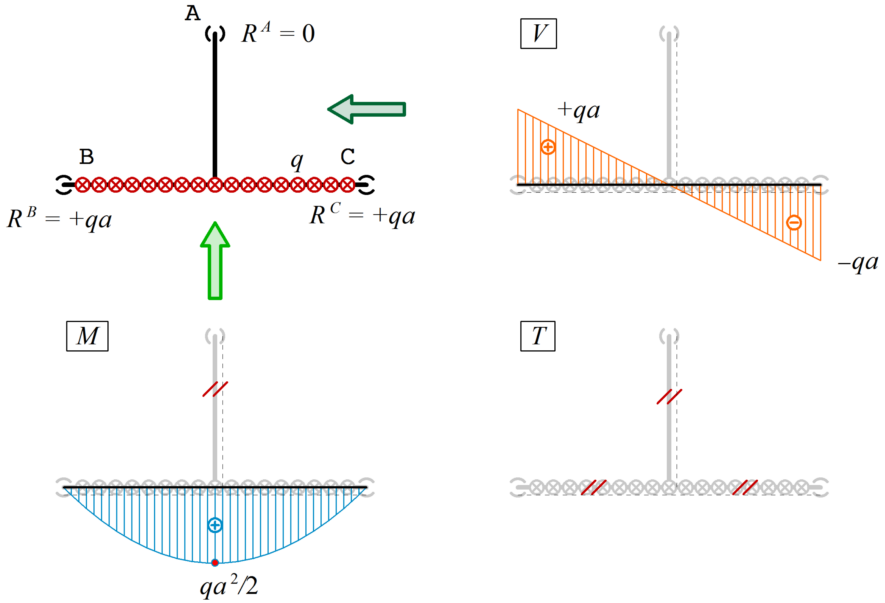
10.1.8 Przykład 3D-O8: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.

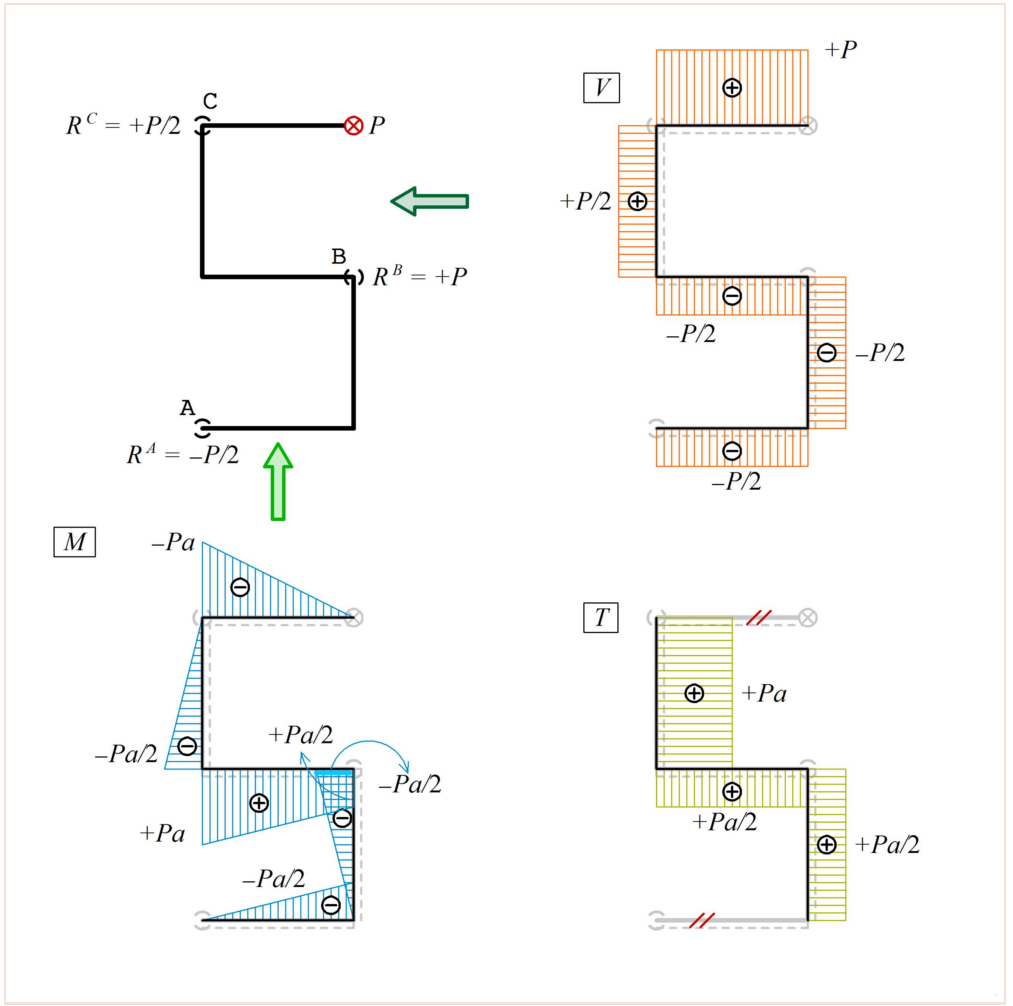


10.2 Rozwiązania

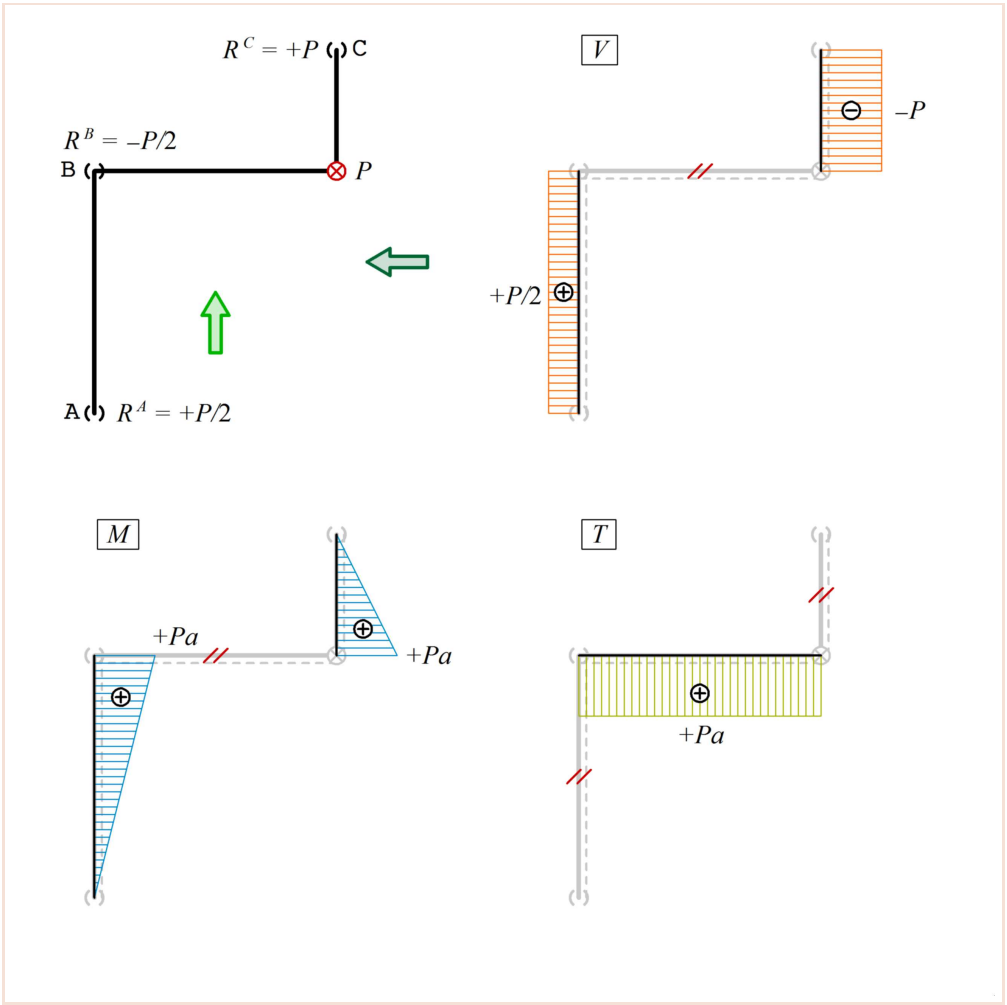
10.2.1 Przykład 3D-O1: rozwiązanie



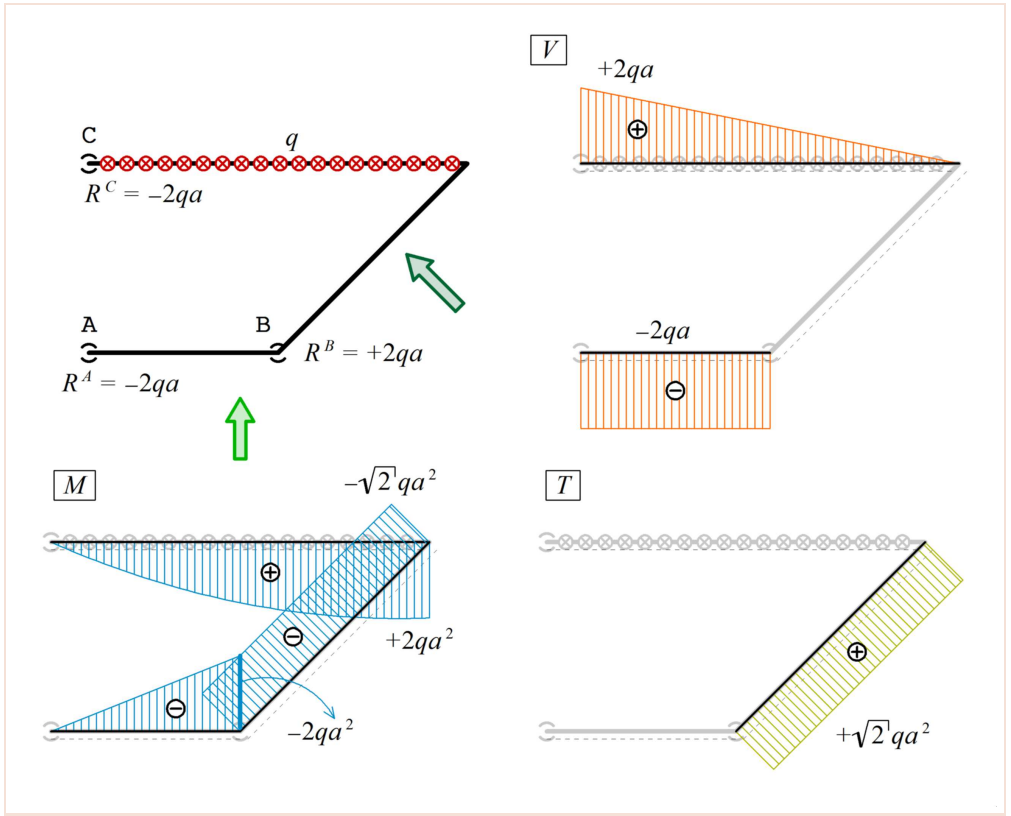
10.2.2 Przykład 3D-O2: rozwiązanie



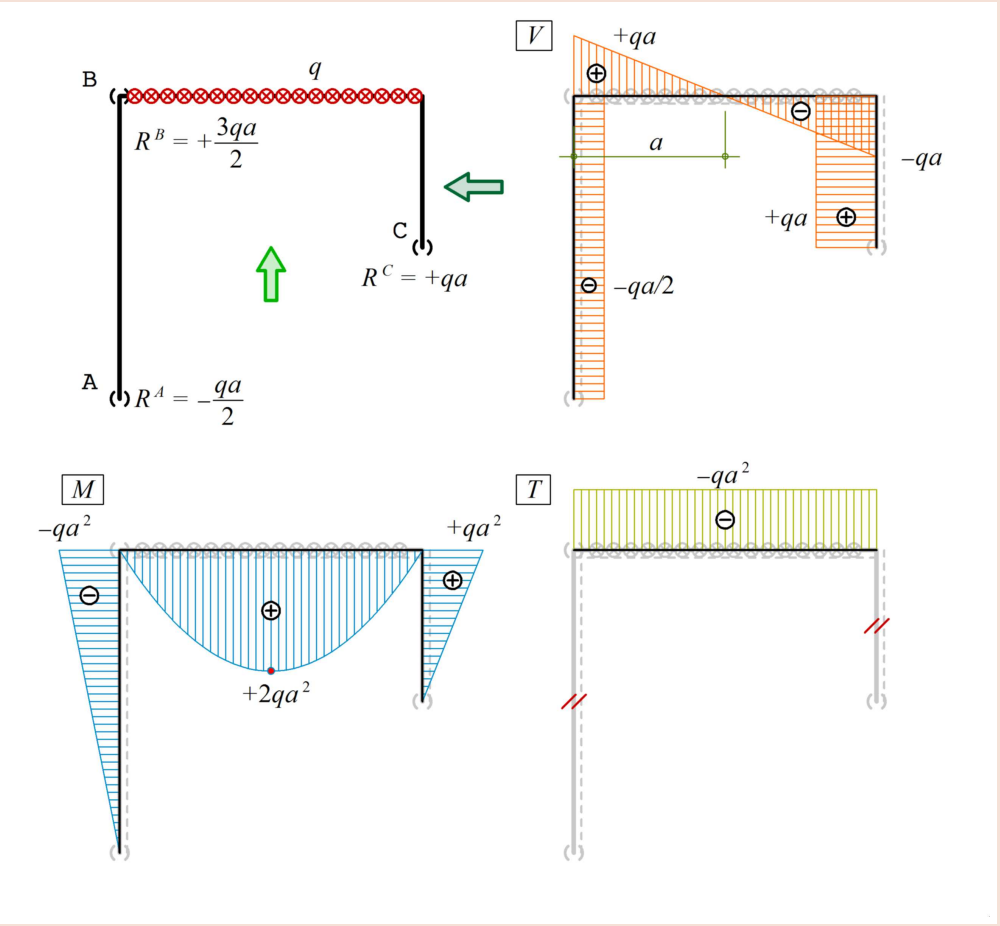
10.2.3 Przykład 3D-O3: rozwiązanie



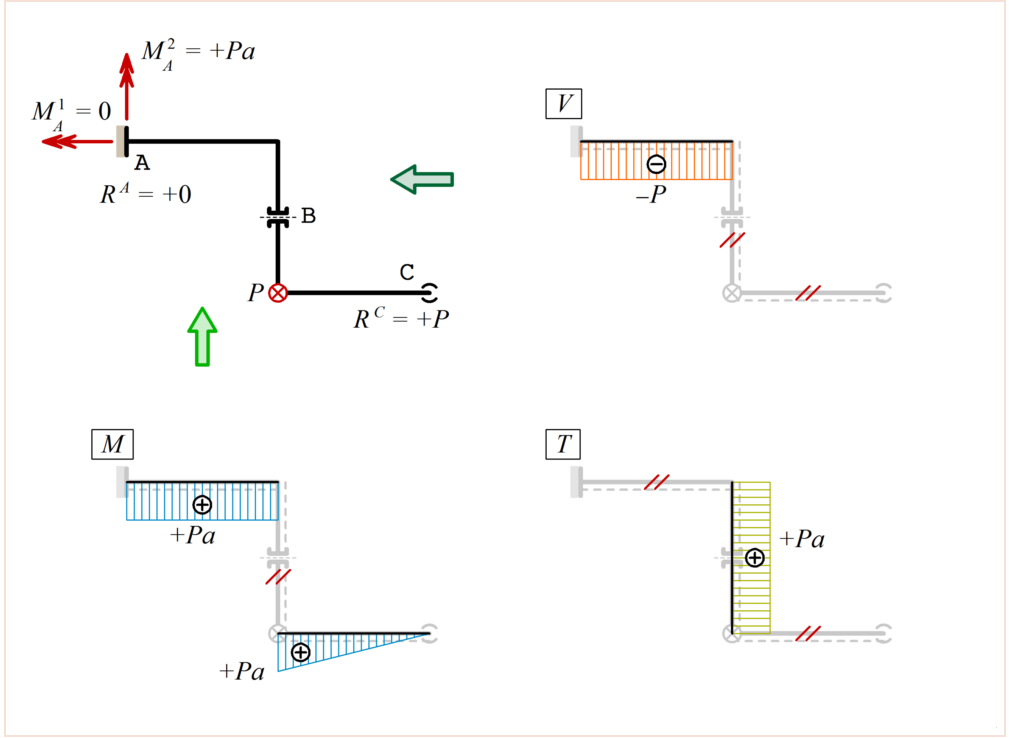
10.2.4 Przykład 3D-O4: rozwiązanie



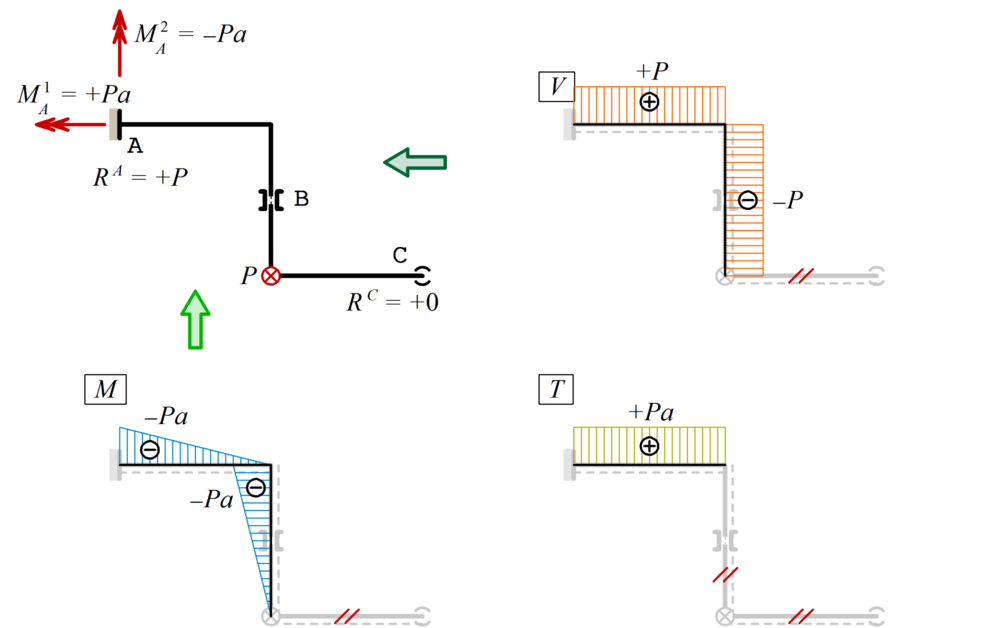
10.2.5 Przykład 3D-O5: rozwiązanie



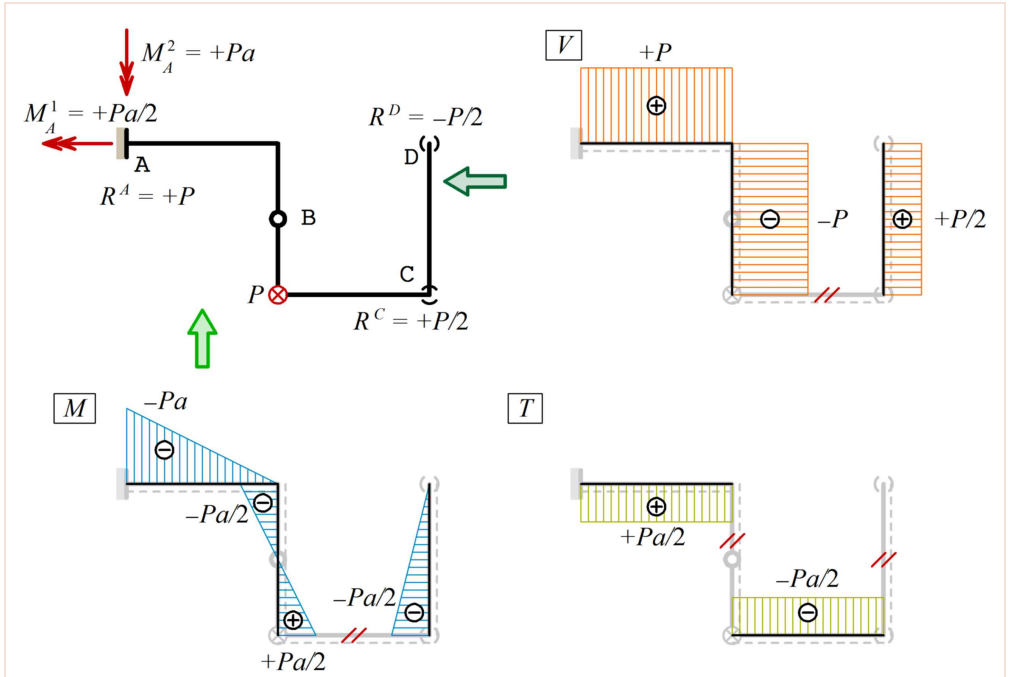
10.2.6 Przykład 3D-O6: rozwiązanie



10.2.7 Przykład 3D-O7: rozwiązanie



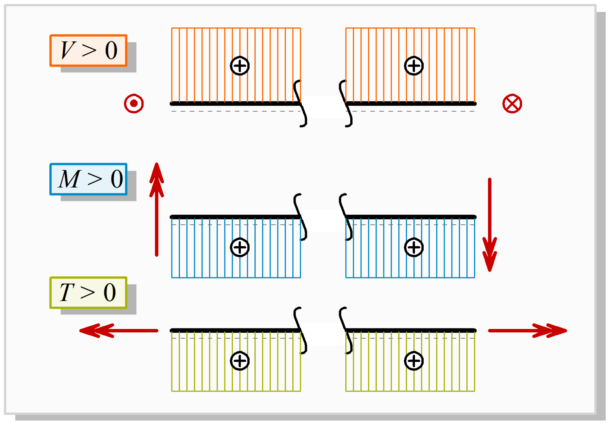
10.2.8 Przykład 3D-O8: rozwiązanie



11 Układy zamknięte - ruszty

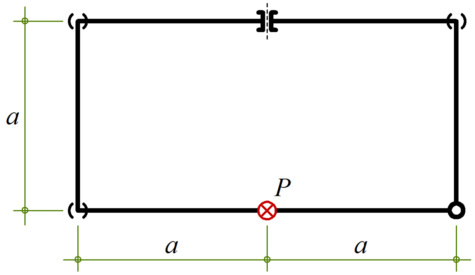
11.1 Przykłady

Przyjęto następujące znakowanie:



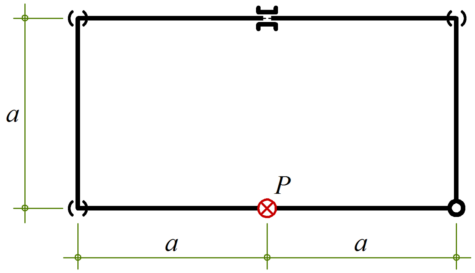
11.1.1 Przykład 3D-Z1: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



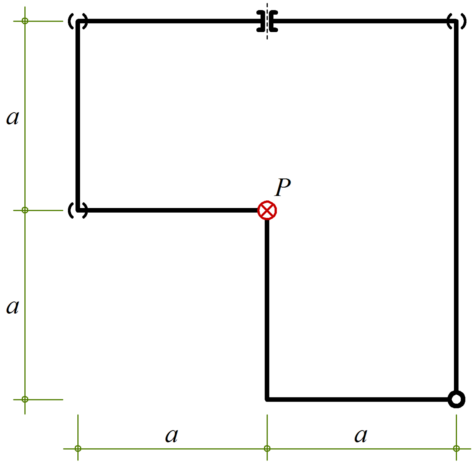
11.1.2 Przykład 3D-Z2: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



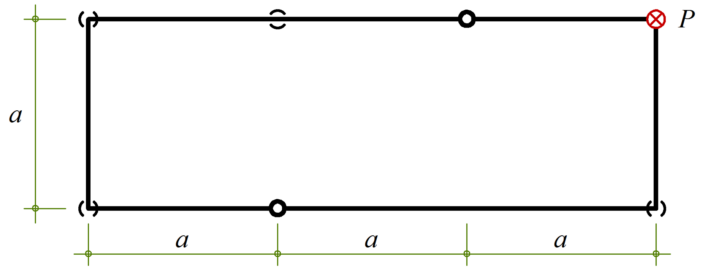
11.1.3 Przykład 3D-Z3: treść zadania

Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



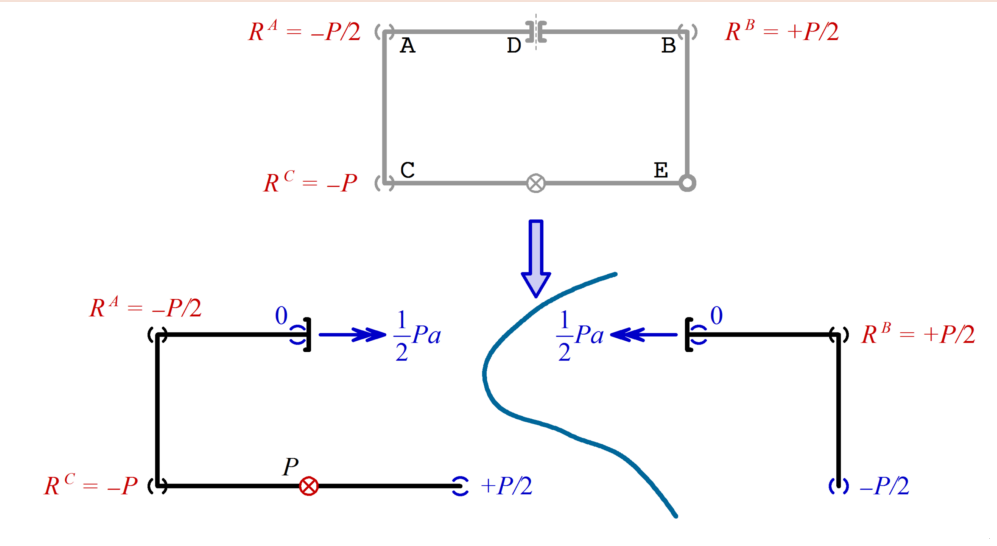
11.1.4 Przykład 3D-Z4: treść zadania

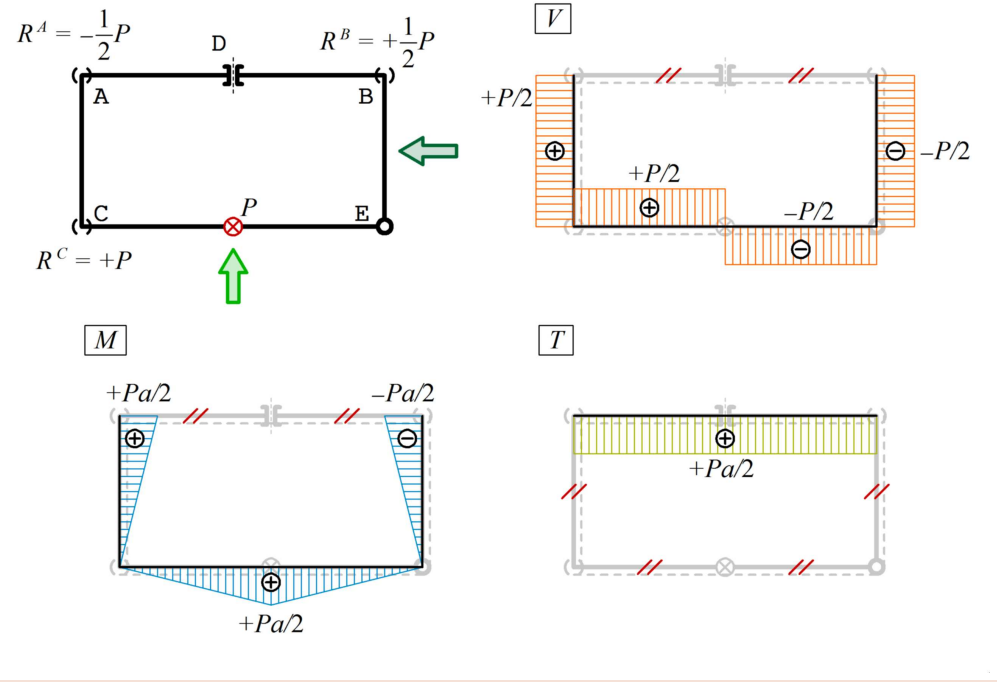
Dla zadanego układu należy narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: P, a.



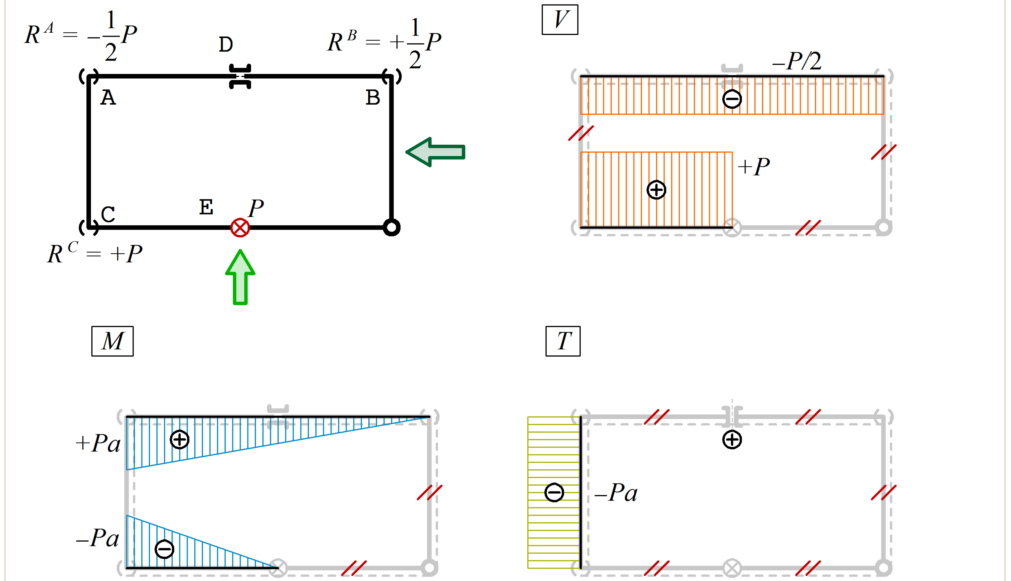
11.2 Rozwiązania

11.2.1 Przykład 3D-Z1: rozwiązanie



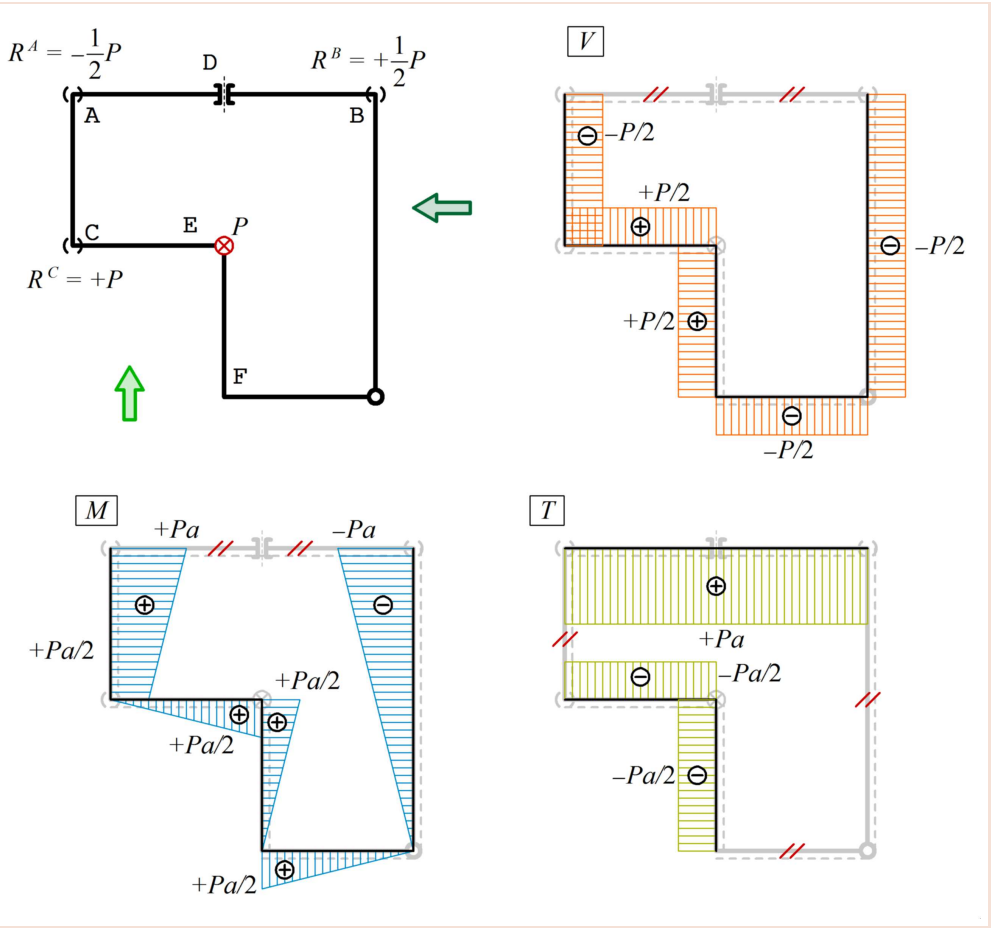


11.2.2 Przykład 3D-Z2: rozwiązanie

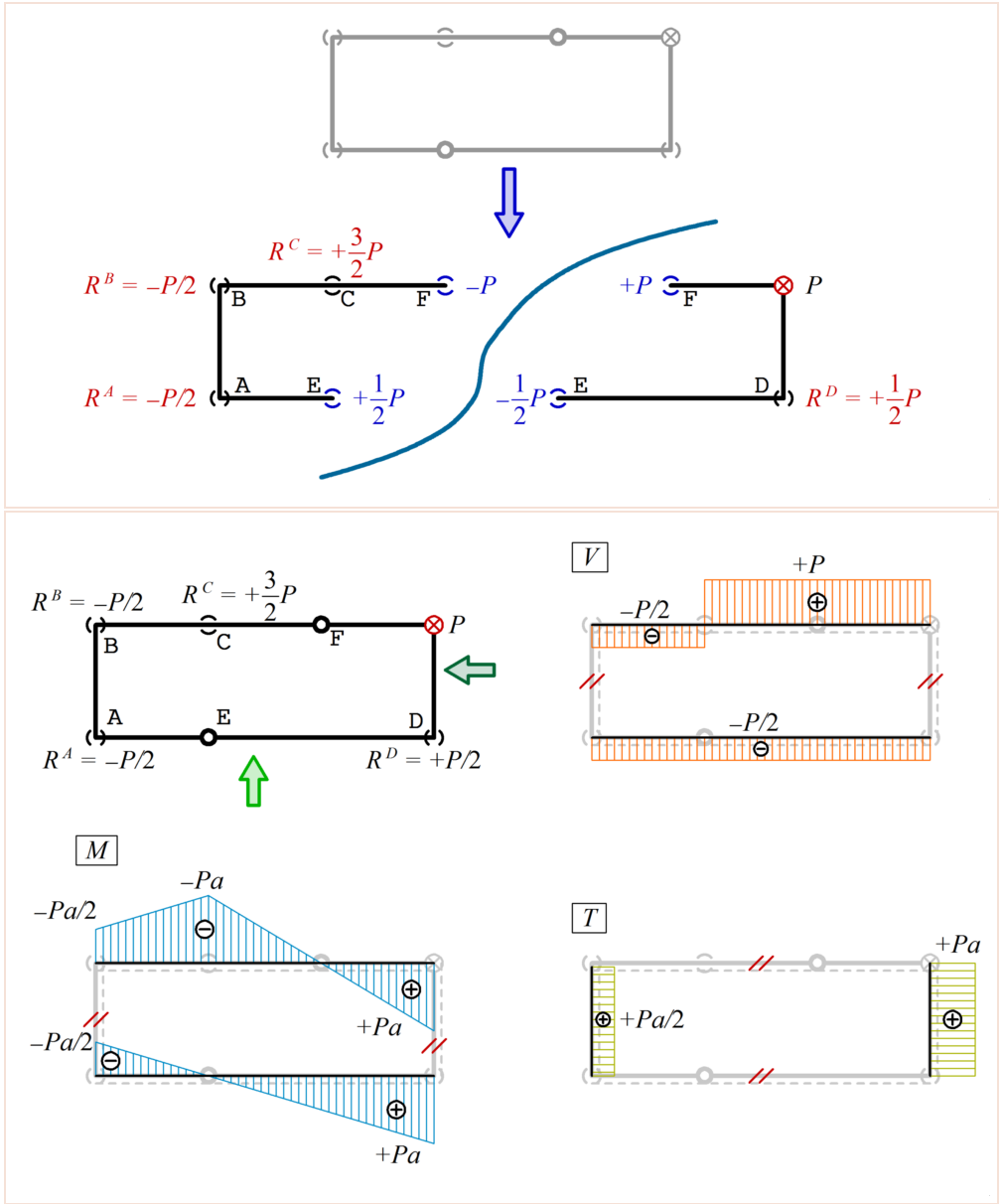


Materiał dydaktyczny do ćwiczeń. Przygotował dr inż. J. Pilśniak. Data: utw. 03 lutego 2014 - komp. 27 września 2014

11.2.3 Przykład 3D-Z3: rozwiązanie



11.2.4 Przykład 3D-Z4: rozwiązanie



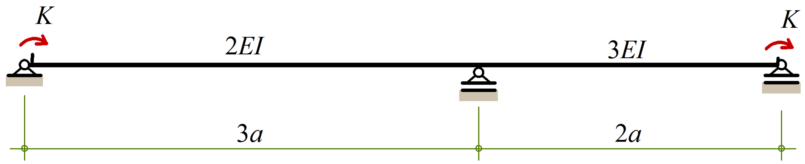
Część V

Egzamin - zadania

12 Termin 2 (data: 28 czerwca 2014 roku)

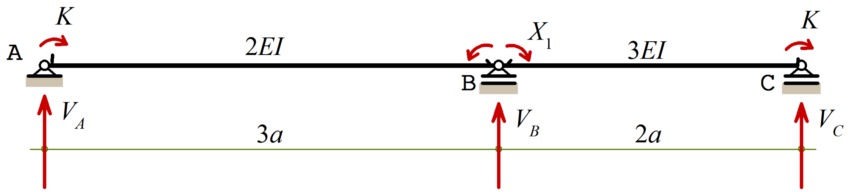
12.1 Zadanie 1

Stosując `metodę sił` ($\mathcal{MS}$) narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: a, K, EI.

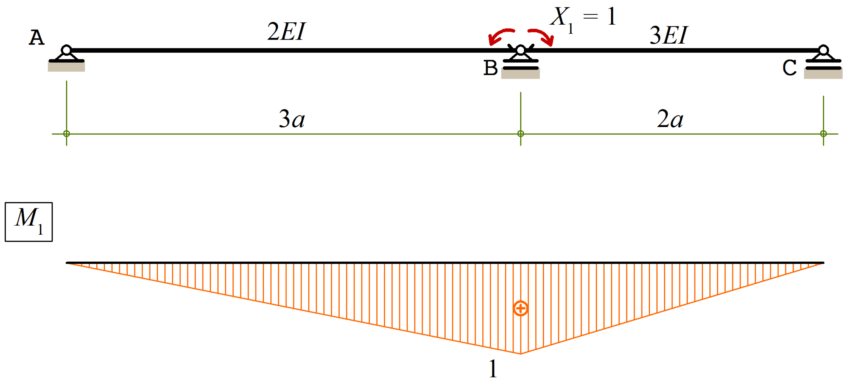


Rozwiązanie

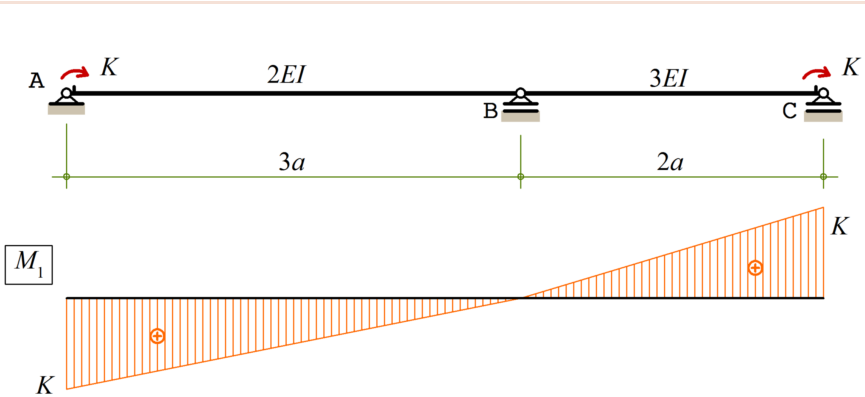
12.1.1 Układ zastępczy `metody sił`



12.1.2 Wykres M_1



12.1.3 Wykres M_P



12.1.4 Równanie $\mathcal{MS}$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI}\left(+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3a\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{3EI}\left(+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{13}{18}\frac{a}{EI} \tag{12.1}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{2EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot K\cdot 3a\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)+\frac{1}{3EI}\left(+\frac{1}{2}\cdot K\cdot 2a\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\right)=\frac{5}{36}\frac{Ka}{EI} \tag{12.2}$$

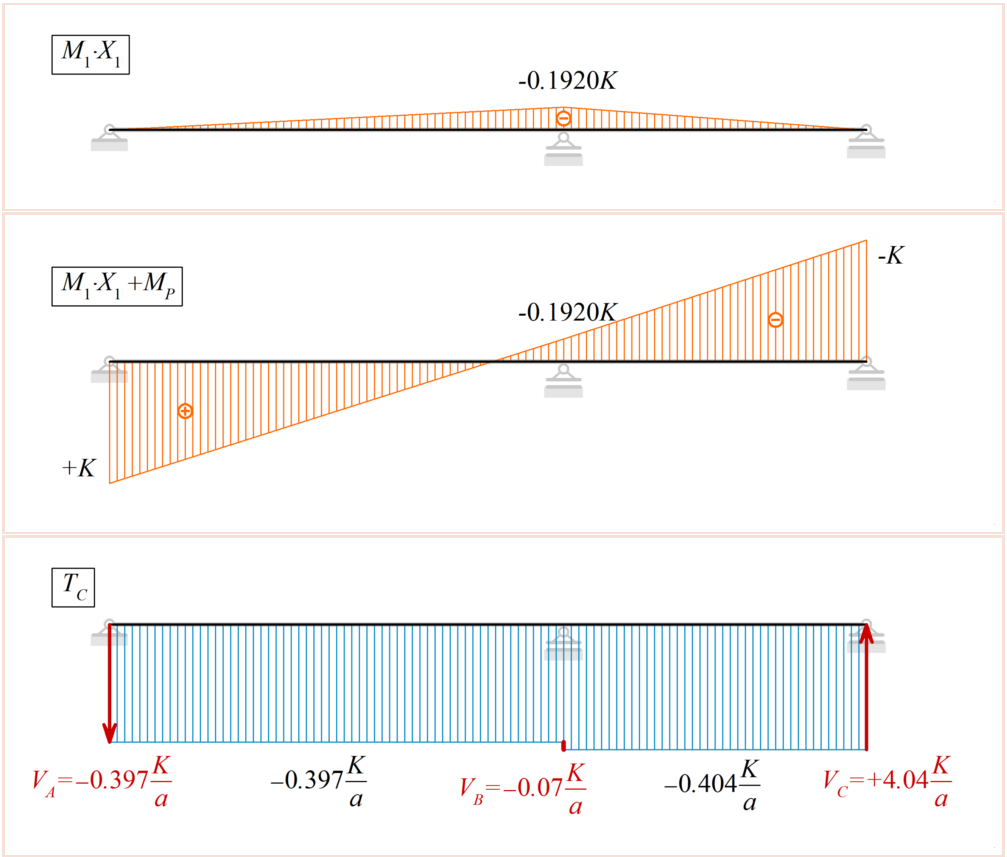
$$\delta_{11} = +0.7222\frac{a}{EI} \tag{12.3}$$

$$\delta_{1P} = +0.1389\frac{Ka}{EI} \tag{12.4}$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0, \quad X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{+0.1389\frac{Ka}{EI}}{+0.7222\frac{a}{EI}} \tag{12.5}$$

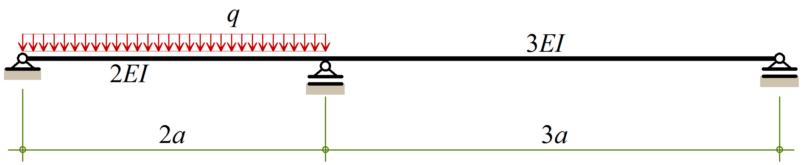
$$X_1 = -0.1920K \tag{12.6}$$

12.1.5 Wykresy



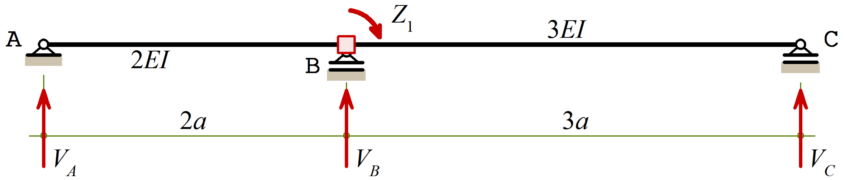
12.2 Zadanie 2

Stosując **metodę przemieszczeń** ($\mathcal{MP}$) narysować wykresy sił wewnętrznych. Dane: a, q, EI.

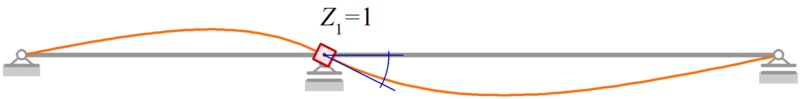


Rozwiązanie

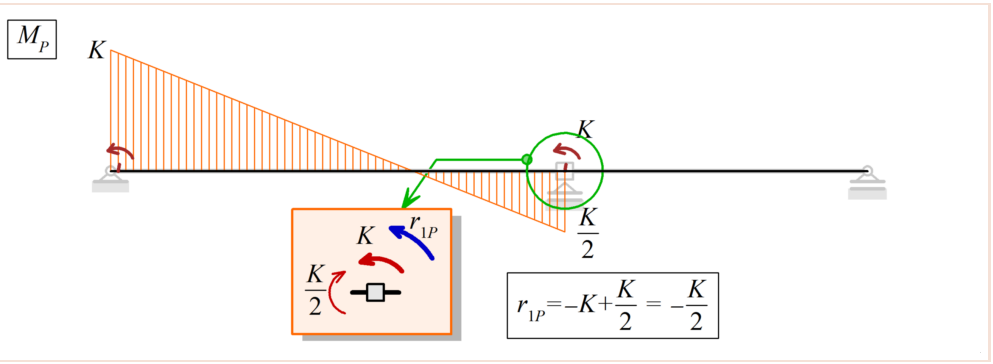
12.2.1 Układ zastępczy metody rzemieszczeń



12.2.2 Wykres M_1



12.2.3 Wykres M_P

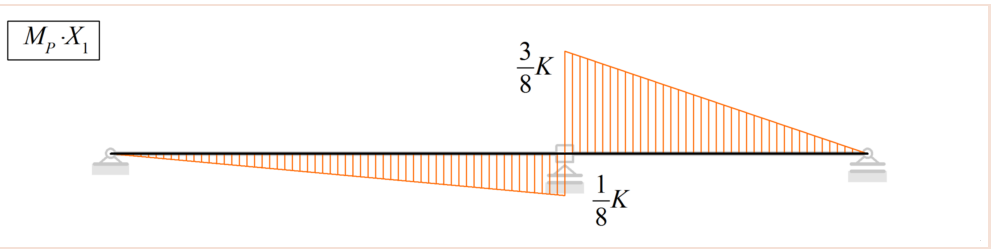


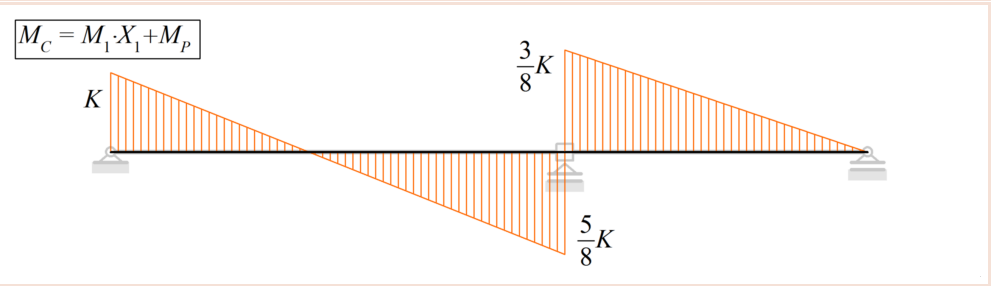
12.2.4 Równanie $\mathcal{MP}$

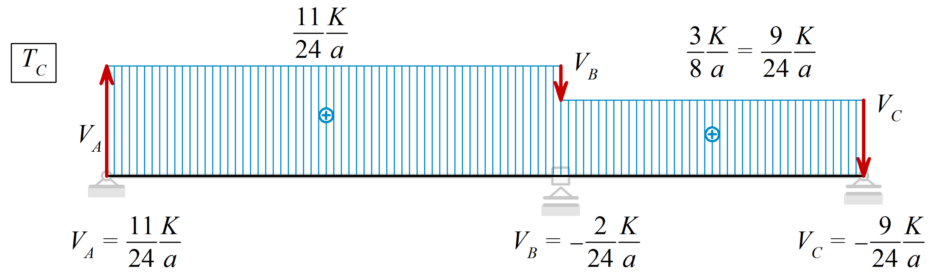
$$r_{11}Z_1 + r_{1P} = 0 \tag{12.7}$$

$$Z_1 = -\frac{r_{1P}}{r_{11}} = -\frac{-\frac{K}{2}}{4\frac{EI}{a}} = +\frac{1}{8}\frac{Ka}{EI} \tag{12.8}$$

12.2.5 Wykresy

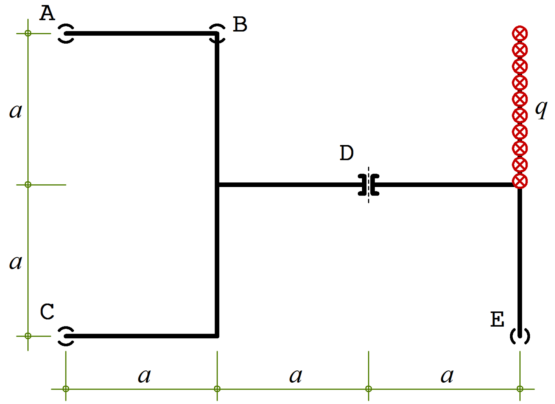
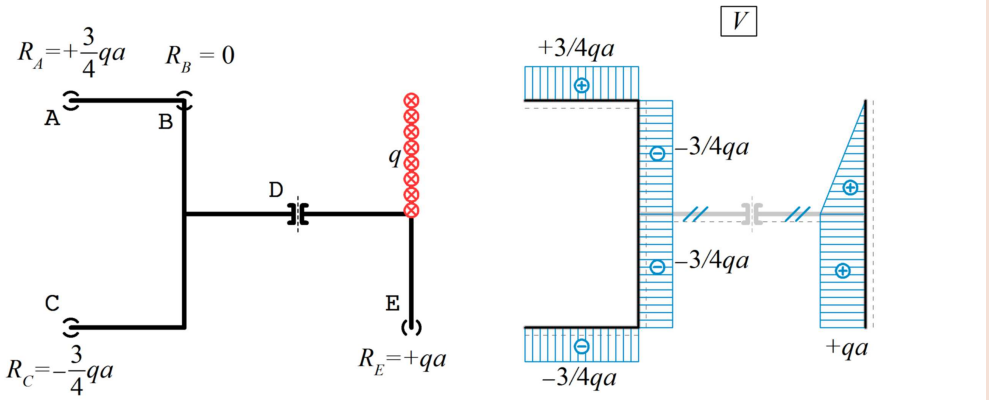
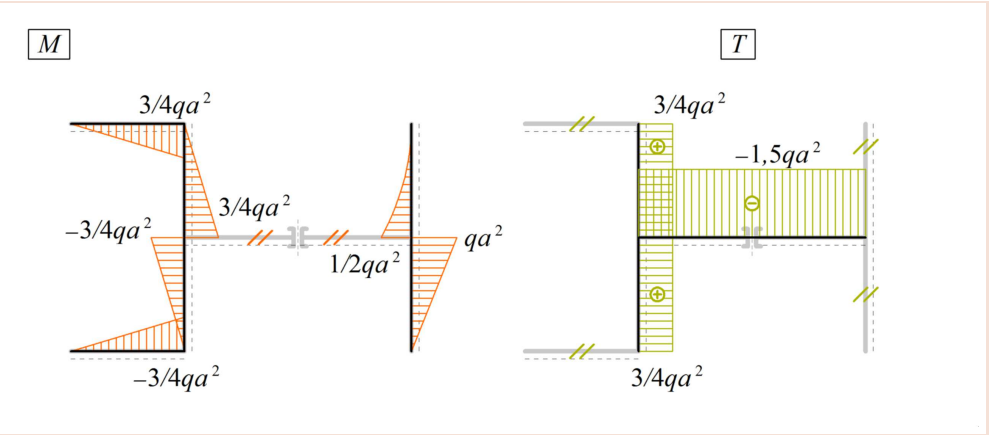






12.3 Zadanie 3

Narysować wykresy sił wewnętrznych.
Dane: a, q.



12.3.1 Wykresy